Méréstechnika házi feladat 3. Megoldás

2015. tavasz

1. Az eredeti definíció a következő:

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt} \tag{1}$$

A továbbiakban hagyjuk el a gyökjelet, mivel a példában javasolt számítási mód ezt a műveletet nem befolyásolja. Ez esetben az alábbi közelítés jogossága, illetve az egyenlőség vizsgálata kérdéses:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x^2(k\Delta t) \tag{2}$$

ahol $N = 200$ a minták száma, $\Delta t = 1/f_s$ a mintavételi időköz, $f_s = 10$ kHz. Közelítsük az integrált téglányösszeggel:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt \approx \frac{1}{N\Delta t}\sum_{k=0}^{N-1} x^2(k\Delta t)\Delta t = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x^2(k\Delta t) \tag{3}$$

A példában vázolt eljárás tehát az integrált téglányösszeggel közelíti. A példában adott jel időfüggvénye és mintavételezett értékei:

$$x(t) = A\sin(2\pi f_x t), \quad x(k\Delta t) = A\sin(2\pi f_x k\Delta t) \tag{4}$$

A négyzetre emelt minták:

$$x^2(k\Delta t) = A^2\sin^2(2\pi f_x k\Delta t) = \frac{A^2}{2}(1 - \cos(2\cdot 2\pi f_x k\Delta t)) \tag{5}$$

Ezt a (3) egyenletbe helyettesítve és a tagokat csoportosítva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x^2(k\Delta t) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\frac{A^2}{2} - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{A^2}{2}\cos(2\cdot 2\pi f_x k\Delta t)\right] \tag{6}$$

Az összeg második tagja zérus, ugyanis a szinuszfüggvény argumentumának tényezőit átrendezve azt kapjuk, hogy

$$2\cdot 2\pi f_x k\Delta t = 2\pi 2k\frac{\Delta t}{T_x} \tag{7}$$

ahol $T_x = 1/f_x$. Mivel a példában

$$\frac{\Delta t}{T_x} = \frac{f_x}{f_s} = \frac{1}{200} \tag{8}$$

ezért 200 minta pontosan két teljes periódust fed le, és ezen minták összege zérus. (Tetszőleges számú teljes periódus mintáinak összege zérus.) Az összeg tehát az első tag, azaz:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x^2(k\Delta t) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\frac{A^2}{2}\right] = \frac{1}{N}N\frac{A^2}{2} = \frac{A^2}{2} \tag{9}$$

amely éppen a szinuszos jel effektívérték-négyzete, azaz a (2) egyenletben éppen az egyenlőség teljesül, így az állítást bebizonyítottuk. (2 pont)

Ha a jelnek vannak felharmonikusai, akkor Fourier-sora így írható:

$$x(t) = X_0 + X_1\sin(2\pi f_x t) + X_2\sin(2\pi 2 f_x t) + \ldots \tag{10}$$

Ennek mintái:

$$x(k\Delta t) = X_0 + X_1\sin(2\pi f_x k\Delta t) + X_2\sin(2\pi 2 f_x k\Delta t) + \ldots \tag{11}$$

(A Fourier-sor szinuszfüggvényekkel való felírása korláltozás, de a gondolatmenet koszinuszos tagok vagy komplex Fourier-sor esetén is így vihető végig.) Ha a Fourier-sort a felharmonikusok miatt írtuk fel, akkor $X_0 = 0$, de az általánosság kedvéért szerepeltetjük.

A minták négyzetét most a következőképpen írhatjuk fel:

$$x^2(k\Delta t) = (X_0 + X_1 \sin(2\pi f_x k\Delta t) + X_2 \sin(2\pi 2 f_x k\Delta t) + ...) \cdot (X_0 + X_1 \sin(2\pi f_x k\Delta t) + X_2 \sin(2\pi 2 f_x k\Delta t) + ...) \tag{12}$$

A különböző frekvenciájú tagok szorzata összeg és különbségi frekvenciájú tagok összegeként írható fel, így a fent megismert gondolatmenet miatt ezek szummája zérus. Az látszik tehát, hogy az egyes komponensek négyzetére kell elvégezni a szummázást külön-külön, amelyek minden egyes szinuszos komponens (speciálisan a zérus frekvenciájú X_0 esetében is!) effektívérték-négyzetét adják, pontosan úgy, ahogyan ez a valódi integrálás esetén történik. Mivel minden komponensre igaz az előzőleg bizonyított egyenlőség, a teljes jel effektívérték-négyzetére is igaz lesz. (2 pont)

Ha a jel frekvenciája $f'_x = 51$ Hz, akkor nem teljesül, hogy egész számú periódusra végezzük el a szummázást, és példa első felében bizonyított egyenlőség nem teljesül. A hiba pontos értékének kiszámítása meghaladja a feladat kereteit. (1 pont)

2. Az ábrán szereplő hálózat átviteli függvénye a következő:

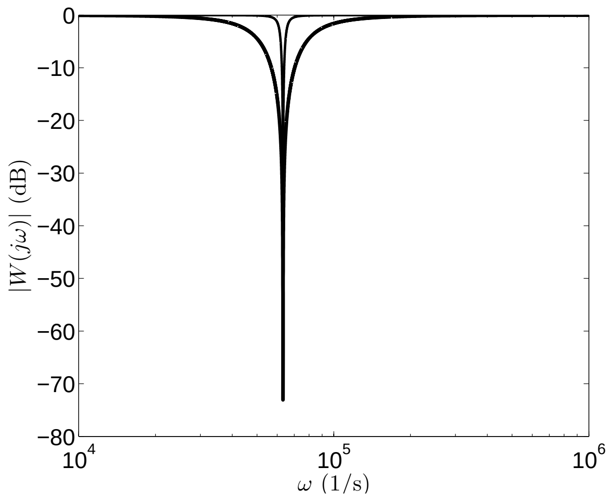
$$W(s) = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1 + s^2 LC}{1 + sRC + s^2 LC} \tag{13}$$

$s = j\omega$ helyettesítéssel az átviteli karakterisztika:

$$W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \; \zeta = \frac{RC}{2\sqrt{LC}} \tag{14}$$

(1 pont)

Mind a számlálónak, mind a nevezőnek töréspontja van ω_0 körfrekvencián. Alatta a meredekség zérus, felette +40 dB/dekád, illetve −40 dB/dekád, rendre a számláló, illetve a nevező esetében. A számláló csillapítása nulla, ezért értéke a törésponti körfrekvencián zérus, a nevező értéke a törésponti körfrekvencián a csillapítástól függő véges érték. Ebből következően az átvitel a törésponti körfrekvencián zérus; lényegesen kisebb, illetve nagyobb körfrekvencián egységnyi. Az átviteli karakterisztika abszolút értéke az alábbi ábrán látható:

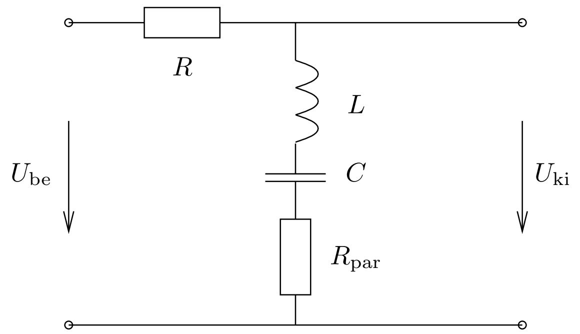


A törésponti körfrekvencia számszerű értéke: $\omega_0 = 6.3246 \cdot 10^4\ \frac{1}{s}$. A hálózat ún. lyukszűrő, olyan sávzáró szűrő, amelynek zárósávja egyetlen frekvenciára korlátozódik. A példában megadott adatokhoz a vastagabb vonallal rajzolt, szélesebb karakterisztika tartozik.

(2 pont)

A (14) egyenletből látható, hogy a ζ csillapítás arányos az ellenállás értékével. Ha az ellenállás értéke kisebb, a nevező kisebb veszteségű, és átvitele ω_0 környezetében kisebb lesz, $R \to 0$ esetén nullához tart. Ezért R csökkentésével a „leszívás" egyre élesebb lesz. Az ábrán $R = 100\ \Omega$ esetén látható a karakterisztika, vékonyabb vonallal rajzolva. Értelemszerűen, ha R értékét növeljük, a szűrő egyre szélesebb lesz.
(1 pont)

Amennyiben veszteséges a tekercs és/vagy a kondenzátor, a kapcsolás így rajzolható át:



Mind a tekercs, mind a kondenzátor vesztesége figyelembe vehető soros ellenállás formájában, ezek eredője az ábrán az R_{par} parazita ellenállás. Ennek a módosított hálózatnak az átviteli függvénye a (13) egyenlet alapján:

$$W(s) = \frac{R_{\mathrm{par}} + sL + \frac{1}{sC}}{(R_{\mathrm{par}} + R) + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1 + sR_{\mathrm{par}}C + s^2LC}{1 + s(R_{\mathrm{par}} + R)C + s^2LC} \tag{15}$$

Az átviteli karakterisztika a következőképpen módosul:

$$W(j\omega) = \frac{1 + 2\zeta_{\mathrm{par}}\frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + 2\zeta'\frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{16}$$

Fontos, hogy ω_0 nem változik, továbbá a reális $R_{\mathrm{par}} \ll R$ esetben $\zeta' \approx \zeta$. A függvényből is látható módon, minél nagyobb a veszteség, annál nagyobb lesz az átvitel a törésponti körfrekvencián, azaz annál kisebb lesz a „leszívás". Az átvitel értéke a fizikai kép alapján is számítható: a rezonanciafrekvencián az induktivitás és a kondenzátor eredő impedanciája zérus, az átvitelt csak R és R_{par} határozza meg:

$$W(j\omega_0) = \frac{R_{\mathrm{par}}}{R_{\mathrm{par}} + R} \cong \frac{R_{\mathrm{par}}}{R} \tag{17}$$

azaz pl. $R = 1000\ \Omega$ és $R_{\mathrm{par}} = 1\ \Omega$ esetén a „leszívás" -60 dB.
(1 pont)