Méréstechnika házi feladat 2. Megoldás

2015. tavasz

1. A névleges érték becslője a mért ellenállásértékek átlaga, amelynek szórása annál kisebb, minél több mérést végzünk. A két mérés közül csak a 2. adatai alkotnak teljes rendszert, ezért a triviális megoldás, hogy abból számítunk konfidenciaintervallumot. Itt viszont csak kevés adat van, ezért itt az átlag szórása nagyobb, mint az 1. mérés esetén, tehát célszerű lenne mégis az 1. mérés alapján becsülni a névleges értéket. Mivel mindkét mérés azonos várható értékű és szórású populációból származik, s_2 is σ egy becslője. Ez viszont valószínűségi változó, szabadságfoka $N_2 - 1$, így a konfidenciaintervallum $N_2 - 1$ paraméterű Student-t eloszlással írható fel:

$$P\left[\hat{R}_1 - \frac{s_2}{\sqrt{N_1}} t_{14,0.05} < R < \hat{R}_1 + \frac{s_2}{\sqrt{N_1}} t_{14,0.05}\right] = 90\%. \tag{1}$$

ahol $\hat{R}_1 = \bar{R}_1 = 6801\ \Omega$ és $t_{14,0.05} = 1.761$. Behelyettesítve:

$$P\left[6786.3\ \Omega < R < 6815.7\ \Omega\right] = 90\% \tag{2}$$

(1 pont)

A bizonyításhoz írjuk fel, hogy a várható érték becslője milyen valószínűségi változó:

$$x = \frac{\hat{R}_1 - R}{\frac{s_2}{\sqrt{N_1}}} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{N_1}} z}{\sqrt{\frac{\frac{\sigma^2}{N_2-1}\chi^2_{N_2-1}}{N_1}}} \tag{3}$$

Ahol z standard normális eloszlású valószínűségi változó. Egyszerűsíteni lehet σ-val és N_1-gyel:

$$x = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{N_2-1}}{N_2-1}}} = t_{N_2-1} \tag{4}$$

Tehát x valóban $N_2 - 1$ paraméterű Student-t eloszlású valószínűségi változó, azaz az (1) szerinti számítás helyes.
(2 pont)

2. A megadott minták alapján kiszámítható a várható érték becslője, valamint a tapasztalati szórás:

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} t_i = 4.2633\ \text{s}, \quad s_1 = \sqrt{\frac{1}{N_1 - 1}\sum_{i=1}^{N_1}\left(t_i - \hat{t}_1\right)^2} = 0.0999\ \text{s} \tag{5}$$

ahol $\hat{t}_1$ jelöli a várható érték becslőjét, s_1 a tapasztalati szórást, $N_1 = 6$ pedig a minták száma. Mivel a szórást is a minták alapján becsültük, a konfidenciaintervallum megállapításához a Student t-eloszlást kell alkalmaznunk:

$$P\left[\hat{t}_1 - \frac{s_1}{\sqrt{N_1}} t_{5,0.025} < t < \hat{t}_1 + \frac{s_1}{\sqrt{N_1}} t_{5,0.025}\right] = 95\%. \tag{6}$$

ahol $t_{5,0.025} = 2.571$. Behelyettesítve:

$$P\left[4.158\ \text{s} < t < 4.368\ \text{s}\right] = 95\% \tag{7}$$

(1 pont)

Az újabb mérésekről megállapítható, hogy ún. kiugró mérési adatok, mert csak igen magas konfidenciaszinten lennének az előző populációhoz tartozók. Pl. t_7-hez $t = \Delta t_7 / s_1 = 6.87$ tartozik. Ezért nem tekinthető érvényesnek a feltételezés, hogy az adatok eloszlása normális.

Ez esetben két lehetőség adódik: (a) a kiugró adatok elhagyása; vagy (b) a konfidenciaintervallum kiszámítása az eloszlás ismerete nélkül. Az (a) esetben a (7) megoldáshoz jutunk.

A (b) esetben az intervallumot a Csebisev-egyenlőtlenség alapján becsülhetjük meg:

$$P\left[|t-\hat{t}_2| \leq k \cdot \frac{s_2}{\sqrt{N_2}}\right] > 1 - \frac{1}{k^2} = 95\% \tag{8}$$

ahol $k = 4.472$, valamint a várható érték és a szórás új becslője:

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2} t_i = 4.2612 \text{ s}, \quad s_2 = \sqrt{\frac{1}{N_2-1}\sum_{i=1}^{N_2}(t_i-\hat{t}_2)^2} = 0.3810 \text{ s} \tag{9}$$

Behelyettesítve a (8) egyenletbe

$$k \cdot \frac{s_2}{\sqrt{N_2}} = 0.6956 \text{ s} \tag{10}$$

Ezzel a (7) egyenletnek megfelelő konfidenciaintervallum:

$$P\left[3.566 \text{ s} < t < 4.957 \text{ s}\right] = 95\% \tag{11}$$

Jól látható, hogy az intervallum sokkal szélesebbé vált. Érdemes a (8) egyenletbe más konfidenciaszinteket is behelyettesíteni. Ekkor láthatóvá válik, hogy minél magasabb konfidenciaszintet határozunk meg, annál irreálisabban széles konfidenciaintervallum adódik.

Pontozás: A kiugró adatok felismerése és azok egyszerű elhagyása 1 pontot ér, az új adatokkal, Csebisev-egyenlőtlenséggel számolva 2 pont szerezhető.

3. A henger térfogata az alábbi képlettel számítható ki:

$$V = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi m = \frac{d^2\pi}{4} m \tag{12}$$

Ebből az érzékenységek rögtön számíthatók:

$$c_d = \frac{\partial V}{\partial d} = \frac{d\pi}{2} m = 9425 \text{ mm}^2, \quad c_m = \frac{\partial V}{\partial m} = \frac{d^2\pi}{4} = 2827 \text{ mm}^2 \tag{13}$$

Az első esetben, egy mérési eredmény esetén az egyes változók standard mérési bizonytalansága megegyezik a B típusú standard bizonytalansággal:

$$u(d) = u(m) = u = \frac{r}{\sqrt{12}} = 0.0289 \text{ mm} \tag{14}$$

ugyanis a mérési eredmények eloszlása egyenletes egy, a mérési eredmény körüli $\pm r/2$ intervallumon belül. Ezzel a térfogat mérésének standard bizonytalansága és a kiterjesztett bizonytalanság:

$$u_1(V) = u\sqrt{c_d^2 + c_m^2} = 284.05 \text{ mm}^3, \quad \Delta V_1 = k\, u_1(V) = 568.10 \text{ mm}^3, \quad k = 2 \tag{15}$$

A térfogat becslője pedig:

$$\hat{V} = \frac{d^2\pi}{4} m = 282.74 \text{ cm}^3 \tag{16}$$

ahol d és m a példában megadott érték. A mérési eredmény tehát:

$$V_1 = \hat{V} \pm \Delta V_1 = 282.74 \pm 0.57 \text{ cm}^3 = 282.74(57) \text{ cm}^3, \quad k = 2 \tag{17}$$

(2 pont)

Több mérés esetén mind A, mind B típusú bizonytalansággal számolni kell. A B típusú bizonytalanság megegyezik az előzővel, az A típusú a szórásokból adódik:

$$u_A(d) = \frac{s_d}{\sqrt{K}}, \quad u_A(m) = \frac{s_m}{\sqrt{K}} \tag{18}$$

Az egyes mérések eredő standard bizonytalansága a következő:

$$u(d) = \sqrt{u_A^2(d) + u_B^2(d)} = 0.0318 \text{ mm}, \quad u(m) = \sqrt{u_A^2(m) + u_B^2(m)} = 0.0292 \text{ mm} \tag{19}$$

A térfogat mérésének standard bizonytalansága és a kiterjesztett bizonytalanság több mérés esetén tehát:

$$u_2(V) = \sqrt{c_d^2 u^2(d) + c_m^2 u^2(m)} = 311.18 \text{ mm}^3, \quad \Delta V_2 = k\, u_2(V) = 622.36 \text{ mm}^3, \quad k = 2 \tag{20}$$

V becslője továbbra is (16), így a mérési eredmény:

$$V_2 = \hat{V} \pm \Delta V_2 = 282.74 \pm 0.62 \text{ cm}^3 = 282.74(62) \text{ cm}^3, \quad k = 2 \tag{21}$$

(1 pont)

A tolómérővel való mérés hatására „belapuló” hengeren az egyes méreteket hibásan mérjük meg. Ennek a hibának a tulajdonságai, illetve a számszerűsítési lehetőségek a következők:

1. A mérési hiba rendszeres, ezért korrekciót kell alkalmazni;
2. A hiba valószínűségi változóval modellezhető, amelynek várható értékét mint korrekciót kell alkalmazni, véletlen komponense pedig mint bizonytalanság veendő figyelembe;
3. A paraméterek meghatározása történhet próbamérésekkel, pl. ugyanannak a méretnek különböző erősségű mérésekor adódó maximális és miminális mért értéke alapján.

(1 pont)

Megjegyzés.

A több mérésből számított bizonytalanság nagyobb lett, mint az egy mérésből származó. Az ellentmondás látszólagos, ugyanis csak a 2. mérés alkalmával tudtunk meggyőződni arról, hogy a mérést ugyanazokkal az eszközökkel elvégezve más és más eredményre jutunk. A nagyobb intervallum azt is jelenti, hogy a mérési eredményeinkhez reálisabb – sajnos szélesebb – intervallumot rendeltünk.