Méréstechnika házi feladat 1. Megoldás

2015. tavasz

1. A példa az általános tömegvonzás egyenletéből kiindulva oldható meg. A levezetés során mellőzni fogjuk a Föld forgásából adódó centrifugális erő hatását, mert az elhanyagolható a tömegvonzáshoz képest. A Földön egy m tömegű testre ható gravitációs erő:

$$mg = \gamma \frac{M\,m}{R^2} \tag{1}$$

ahol M a Föld tömege, R az m tömegű test távolsága a Föld középpontjától, γ pedig a gravitációs állandó. Ekkor a nehézségi gyorsulás egy R távolságban lévő referenciapontban, illetve ahhoz képest h magasságban:

$$\begin{aligned} g_0 &= \gamma \frac{M}{R^2}, \\ g_h &= \gamma \frac{M}{(R+h)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

A két egyenlet hányadosát véve:

$$\frac{g_0}{g_h} = \frac{(R+h)^2}{R^2} \tag{3}$$

Egy l hosszúságú matematikai inga lengésideje a renferenciapontban, illetve h magasságban:

$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}, \\ T_h &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_h}} \end{aligned} \tag{4}$$

Most a második egyenletet osszuk el az elsővel, továbbá helyettesítsük be a nehézségi gyorsulások (3) arányát:

$$\frac{T_h}{T_0} = \sqrt{\frac{g_0}{g_h}} = \frac{R+h}{R} \tag{5}$$

Ebből a kérdéses h magasság már kifejezhető:

$$h = R\left(\frac{T_h}{T_0} - 1\right) \tag{6}$$

(2 pont)

Az összefüggés hibaanalízise a szokásos eszközökkel megtehető. A részletszámítások mellőzésével:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\Delta h}{h}\right|_{T_h} &= \frac{T_h}{T_h - T}\frac{\Delta T_h}{T_h}, \\ \left.\frac{\Delta h}{h}\right|_{T_0} &= -\frac{T_h}{T_h - T}\frac{\Delta T_0}{T_0} \end{aligned} \tag{7}$$

Feltételezve, hogy az időmérés hibája véletlen és azonos a két esetben, a hiba a következő:

$$\frac{\Delta h}{h} = 2\frac{T_h}{T_h - T}\frac{\Delta T}{T} \tag{8}$$

A konkrét számításhoz felhasználhatjuk az (5) összefüggést, így:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta h}{h}\frac{h}{R+h} = 5.26\cdot 10^{-8} \tag{9}$$

ahol a $h \approx 67$ m közelítésen kívül az $R \approx 6370$ km értéket is felhasználtuk. Az eredmény diszkusszióját célszerű a következő kérdés megválaszolásával összekötni.
(1 pont)

Látható, hogy a lengésidőket igen pontosan kell megmérni. Egyetlen vagy néhány lengés idejét is igen pontosan kellene mérni, hiszen egy $T = 1$ sec lengésidejű inga esetén egy lengést kb. 50 nsec hibával kellene detektálni; 20 lengés esetén is kb. 1 μsec lehet csak a hiba. A (7) kifejezésekből közvetlenül adódik, illetve a (6) egyenletből is látszik, hogy az aránymérés miatt a rendszeres hiba kiesik. A pontossági igény kielégítésére nincs is más lehetőség, mint annak biztosítása, hogy a két mérés során azonos rendszeres hibát követünk el, és az kiesik. Ehhez nyilvánvalóan azonos eszközt (ingát) kell alkalmazni, azonos órával kell mérni, továbbá biztosítani kell a környezeti feltételek állandóságát, különösen a hőmérséklet állandóságát, az ugyanis mind az eszközre (az inga hossza változik), mind pedig az órára (a kvarckristály elhangolódik) hatással van. Ezenkívül biztosítani kell, hogy a lengést más külső hatások se befolyásolják (rázkódás, légáramlás stb.). A légnyomás a felhajtóerő révén gyakorol hatást az ingára, ezért célszerű hermetikusan zárt burában elhelyezni az eszközt.
(1 pont)

Megjegyzések

1. A példa jellegre a légnyomás alapján történő méréssel analóg, de láthatóan jóval kevésbé változik a nehézségi gyorsulás, mint a légnyomás, ezért nem szerepelt a „kiválasztott" módszerek között.

2. A (6) képletből látszik, hogy R ismeretének pontossága nem kritikus. A magasságmérés relatív hibája megegyezik R ismeretének relatív hibájával. A Föld lapultsága mindössze 0.3%, a sugár tehát nem lényegesen különböző a földrajzi szélességeken. A földrajzi hely és a tengerszint feletti magasság *hozzávetőleges* ismeretében R hibája könnyen 0.1% alá csökkenthető, így a magasság meghatározásának R-től függő hibakomponense is.

3. Ha az inga nem tekinthető matematikai ingának, akkor is használható a (4) képlet, csak abban az esetben l a redukált inga hosszát jelenti. Adott inga esetében ez csak a geometriától és a felhasznált anyagoktól függ, így ennek értéke a két mérés során nem változik. A (6) kifejezés előnye az is, hogy nem szerepel benne l, így nincs szükség pontos ismeretére.

2. Az egyes térfogatokat az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} V_1 &= \hat{V_1} \pm \Delta V_1 \\ V_2 &= \hat{V_2} \pm \Delta V_2 \end{aligned} \tag{10}$$

ahol $\hat{V_1}$ és $\hat{V_2}$ jelöli a várható értékeket. Az egyes szórások az egyenletes eloszlás alapján:

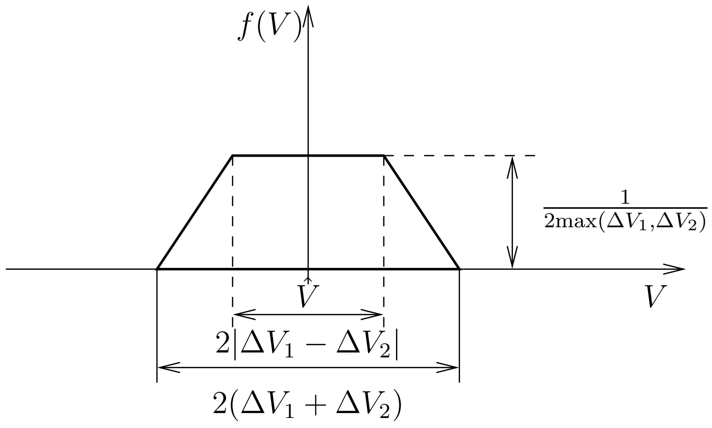
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\Delta V_1}{\sqrt{3}} \\ \sigma_2 &= \frac{\Delta V_2}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{11}$$

Az eredő várható érték a két várható érték összege, az eredő szórás pedig a két szórás négyzetes összegzésével számítható:

$$\hat{V} = \hat{V_1} + \hat{V_2} = 49 \text{ cl}, \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 3.3665 \text{ cl} \tag{12}$$

(1 pont)

A két mérési hiba egyenletes eloszlású valószínűségi változóval modellezhető, a térfogat valószínűség-sűrűségfüggvénye a két sűrűségfüggvény konvolúciója. Mivel a két sűrűségfüggvény nem feltétlenül azonos tartójú, az eredő sűrűségfüggvény nem háromszög-, hanem szimmetrikus trapézeloszlás lesz, ahogyan az alábbi ábrán látható:



(2 pont)

3. Az illesztett függvény egyenlete:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{13}$$

A négyzetes költségfüggvény pedig:

$$C = \sum_{n=1}^{N} (y_n - ax^2 - bx - c)^2 \tag{14}$$

Ezt követően fel kell írni az alábbi feltételrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial b} &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial c} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

(1 pont)
amely az alábbi egyenletrendszerre vezet:

$$\mathbf{D} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{D}_{ij} = \sum_{n=1}^{N} x_n^{[(3-i)+(3-j)]}, \quad \mathbf{d}_i = \sum_{n=1}^{N} y_n x_n^{(3-i)}, \quad i,j = 1,\ 2,\ 3 \tag{16}$$

(1 pont)
Az egyenletrendszer megoldása adja a kérdéses együtthatókat:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5.1191 \\ -0.2740 \\ 0.3336 \end{bmatrix} \tag{17}$$

(1 pont)

Megjegyzés. Az illesztett függvény egyértelmű, azaz más együtthatókészlet mellett a költségfüggvény nem minimális.