7. Gyakorlat

Modellillesztési és szűréselméleti feladatok

1. A vizsgált környezetről feltételezzük, hogy jellemezhető $y(t) = a_1 u(t) + a_2 u^2(t) + w(t)$ időfüggvénnyel. Elvégzünk N mérést. Határozza meg az időfüggvény paramétereinek legkisebb négyzetes hibájú $\hat{a}_{LS}$ becslőjét! Határozza meg a becslő közelítő számértékét arra az esetre, amikor adott $E\{u^2(t)\} = 1$, $E\{u^3(t)\} = 2$, $E\{u^4(t)\} = 5$, $E\{u^2(t)y(t)\} = 3$, $E\{u(t)y(t)\} = 1$!

Megoldás:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & u_0^2 \\ u_1 & u_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ u_{N-1} & u_{N-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}, \ \hat{\boldsymbol{a}}_{LS} = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{z},$$

$$[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{U}] = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 & \sum_{n=0}^{N-1} u_n^3 \\ \sum_{n=0}^{N-1} u_n^3 & \sum_{n=0}^{N-1} u_n^4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n \\ \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^4\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^3\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^4 & -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^3 \\ -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^3 & \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n \\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 y_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^4\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^3\right)^2} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^4\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n\right) - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^3\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 y_n\right) \\ -\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^3\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n\right) + \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 y_n\right) \end{bmatrix} =$$

$$\cong \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Mutassa be a polinomiális regresszió eljárását négyzetesnek tűnő függvénykapcsolat (például CMOS kapu villamos-teljesítmény igényének tápfeszültség-függése), két ismeretlen paraméter és *M* független mérés feltételezésével! Vezesse le az ismeretlen paraméterek kiszámítására alkalmas összefüggéseket! Indokolja meg, hogy miért előnyös a négyzetes hibakritérium és a paramétereiben lineáris modell együttes alkalmazása!

   A mérés modellje ilyenkor $y_n = a_0 + a_2 u_n^2 + w_n$, ahol w_n az additív zaj, $n = 0,1, \ldots, M-1$, mátrix-os írásmóddal: $z = Ua + w$.

   Feltételezzük, hogy az a paraméter $\hat{a}$ értéket vesz fel, és felállítjuk a megfigyelés modelljét: $U\hat{a}$. A megfigyelést ezzel összevetve keressük $\hat{a}$ legjobb beállítását négyzetes hibafüggvény feltételezésével:

   $J(a, \hat{a}) = (z - U\hat{a})^T (z - U\hat{a}) = z^T z - z^T U\hat{a} - \hat{a}^T U^T z + \hat{a}^T U^T U\hat{a} = z^T z - 2\hat{a}^T U^T z + \hat{a}^T U^T U\hat{a}$ (*)

   melynek szélsőértékét (minimumát) keressük: $\left.\frac{\partial J(a,\hat{a})}{\partial \hat{a}}\right|_{\hat{a}=\hat{a}_{LS}} = 0$ feltétel vizsgálatával. (*) deriválásával $-2U^T z + 2U^T U\hat{a} = 0$, amivel:

$$\hat{a}_{LS} = [U^T U]^{-1} U^T z$$

a legkisebb négyzetes hibájú becslő.

Az aktuális problémára részletezve:

$$z = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0^2 \\ 1 & u_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_{M-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{M-1} \end{bmatrix}, \; [U^T U] = \begin{bmatrix} M & \sum_{n=0}^{M-1} u_n^2 \\ \sum_{n=0}^{M-1} u_n^2 & \sum_{n=0}^{M-1} u_n^4 \end{bmatrix}, \; U^T z = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{M-1} y_n \\ \sum_{n=0}^{M-1} u_n^2 y_n \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} u_n^4 - \left(\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} u_n^2\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} u_n^4 & -\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} u_n^2 \\ -\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} u_n^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} y_n \\ \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} u_n^2 y_n \end{bmatrix}.$$

A paramétereiben lineáris modell és a négyzetes hibakritérium együttes alkalmazása az ismeretlen paraméterekre nézve lineáris egyenletrendszer megoldására vezet.

3. Mutassa be a skalár Kalman prediktor modelljét és zajparamétereit! Tanulmányainkból tudjuk, hogy a rekurzív becslő egyenletei:

$$\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n)), \; \hat{y}(n) = c\hat{x}(n)$$

ahol az $E\{e^2(n+1)\} = p(n+1)$ négyzetes hiba minimumát a következő iteratív számítással beállított $\beta(n)$ súlyozással kapjuk:

$$\beta(n) = acp(n)[c^2 p(n) + \sigma_n^2]^{-1}, \; p(n+1) = a(a - \beta(n)c)p(n) + \sigma_w^2$$

Határozza meg az állapotbecslés négyzetes hibáját az állandósult állapot elérését követően, feltételezve, hogy $a^2 = 0.5$, $c = 1$, $\sigma_w^2 = \sigma_n^2$! (Használja fel, hogy az állandósult hiba elérését követően a négyzetes hiba már nem változik.)

Megoldás:

$$x(n+1) = ax(n) + w(n), \; y(n) = cx(n) + n(n)$$

ahol $w(n)$ az ún. rendszerzaj, amelyre $E[w(n)] = 0$, $E[w(j)w(k)] = \sigma_w^2$, ha $j = k$, egyébként 0, $n(n)$ az ún. megfigyelési zaj, amelyre $E[n(n)] = 0$, $E[n(j)n(k)] = \sigma_n^2$, ha $j = k$, egyébként 0. $x(n) = 0, w(n) = 0$, ha $n < 0$.

$$E[w(n)x(n)] = 0 \; E[n(n)\hat{x}(n)] = 0 \; E[w(n)n(n)] = 0, \; \forall n.$$

$p(n+1) = p(n) = p$ jelöléssel: $\beta = \frac{acp}{c^2 p + \sigma_n^2}$, és $p = a\left(a - \frac{acp}{c^2 p + \sigma_n^2} c\right)p + \sigma_w^2 = \frac{a^2 \sigma_n^2}{c^2 p + \sigma_n^2} p + \sigma_w^2$, ahonnan

$p^2 + p\left[\frac{1-a^2}{c^2}\sigma_n^2 - \sigma_w^2\right] - \frac{1}{c^2}\sigma_w^2 \sigma_n^2 = 0$ egyenlet pozitív gyöke adja a megoldást. Behelyettesítve:

$p^2 - p[0.5\sigma_w^2] - \sigma_w^4 = 0$; $p_{1,2} = \frac{0.5\sigma_w^2 \pm \sigma_w^2 \sqrt{4.25}}{2}$; $p \approx 1.28\sigma_w^2$

4. Mutassa be a skalár Kalman szűrés modelljét és zajparamétereit! Vezesse le a szűrő optimális $a(n)$ és $b(n)$ paramétereit meghatározó ortogonalitási egyenleteket (max. 4 pont), majd $b(n)$ kifejezését annak ismeretében, hogy $a(n) = a[1 - b(n)c]$ (max. 4 pont)!

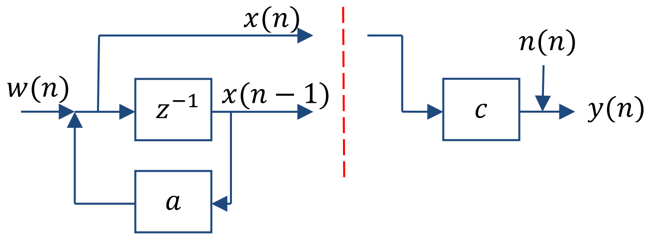
Megoldás:

$$x(n) = ax(n-1) + w(n), \; y(n) = cx(n) + n(n)$$

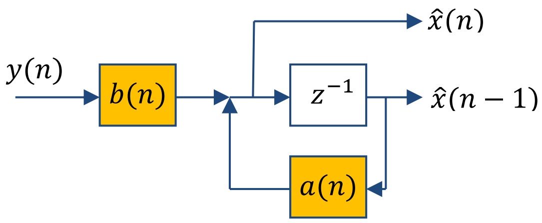
ahol $w(n)$ az ún. rendszerzaj, amelyre $E[w(n)] = 0$, $E[w(j)w(k)] = \sigma_w^2$, ha $j = k$, egyébként 0, $n(n)$ az ún. megfigyelési zaj, amelyre $E[n(n)] = 0$, $E[n(j)n(k)] = \sigma_n^2$, ha $j = k$, egyébként 0. $x(n) = 0, w(n) = 0$, ha $n < 0$.

$$E[w(n)x(n-1)] = E[n(n)\hat{x}(n-1)] = E[w(n)n(n)] = 0 \; \forall n.$$

A megfigyelés lineáris modellje:



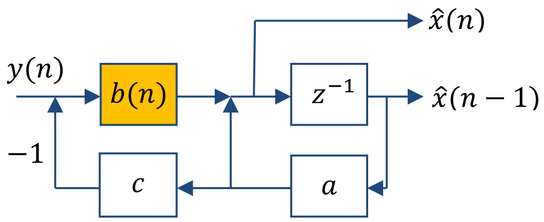
A rekurzív becslő:



$e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$ jelöléssel keressük $a(n)$ és $b(n)$ olyan értékét, amely minimalizálja a $E[e^2(n)] = E\left[\left(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n)\right)^2\right]$ négyzetes hibát:

$$\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial a(n)} = -2E[e(n)\hat{x}(n-1)] = 0, \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial b(n)} = -2E[e(n)y(n)] = 0$$

Mivel $a(n) = a[1 - b(n)c]$, ezért



$b(n)$ meghatározása:

Kiindulva az

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n), \quad E\{e^2(n)\} = E\{(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n))^2\}$$

összefüggésből, és

$$x(n) = ax(n-1) + w(n)$$

valamint

$$\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ca\hat{x}(n-1))$$

behelyettesítésével

$$E\{e^2(n)\} = E\left\{\left[ae(n-1) + w(n) - b(n)\big(ace(n-1) + cw(n) + n(n)\big)\right]^2\right\} =$$

$$= E\{[a[1 - b(n)c]e(n-1) + [1 - b(n)c]w(n) - b(n)n(n)]^2\}$$

Mivel a négyzetre emelésnél a keresztszorzatok várható értékei nullák, mert a zajfolyamatok függetlenek egymástól, illetve az állapotváltozók korábbi értékeitől:

$$E\{e(n-1)w(n)\} = 0, E\{e(n-1)n(n)\} = 0, E\{w(n)n(n)\} = 0,$$

ezért a négyzetre emelést követően csak a négyzetes tagok maradnak meg:

$$E\{e^2(n)\} = a^2[1 - b(n)c]^2 E\{e^2(n-1)\} + [1 - b(n)c]^2 E\{w^2(n)\} + b^2(n)E\{n^2(n)\}.$$

Bevezetve a

$$E\{e^2(n)\} = p(n);\ E\{w^2(n)\} = \sigma_w^2;\ E\{n^2(n)\} = \sigma_n^2$$

jelöléseket, keressük $p(n)$ minimumát $b(n)$ függvényében:

$$\frac{\partial p(n)}{\partial b(n)} = -2a^2[1 - b(n)c]cp(n-1) - 2[1 - b(n)c]c\sigma_w^2 + 2b(n)\sigma_n^2 = 0,$$

ahonnan a keresett optimális súlytényező

$$b(n)|_{opt} = \frac{a^2cp(n-1) + c\sigma_w^2}{a^2c^2p(n-1) + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2} = cp_1(n)[c^2p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1}, \text{ahol}$$

$$p_1(n) = a^2p(n-1) + \sigma_w^2$$