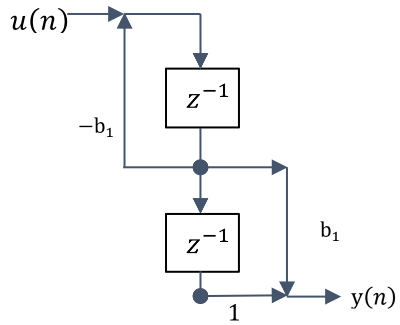
11. Gyakorlat

Modellalapú jelfeldolgozás

1. Bizonyítsa be, hogy az ábrán szereplő rendszer belső energiáját a $P_D = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix segítségével tudjuk megadni! Milyen állítást tudunk megfogalmazni abszolút-érték csonkítás esetén ezekre a struktúrákra? Adja meg a struktúra által tárolt energia kifejezését!



Megoldás:

A feladatban szereplő direkt struktúra állapot-, becsatolási és kicsatolási mátrixai:

$A = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [b_1 \quad 1]$

Igazolandó, hogy $A^T P_D A + C^T C = P_D$. Behelyettesítve:

$$\begin{bmatrix} -b_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix} [b_1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -b_1^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}$$

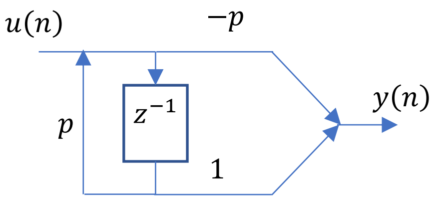
Mivel a P_D mátrix nem diagonálmátrix, ezért abszolút-érték kvantálás esetén sem tudunk megfogalmazni olyan állítást, hogy a rendszer belső energiáját disszipálni fogja, és ezáltal a határciklus oszcillációk elkerülhetők.

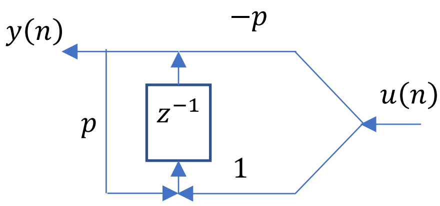
$$E = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_D \boldsymbol{x} = x_0^2 + 2b_1 x_0 x_1 + x_1^2$$

2. Írja fel egy olyan mindentáteresztő hálózat átviteli függvényét, amelynek egyetlen pólusa a *z* sík $p = 0.5 + j0$ koordinátájú pontjában helyezkedik el, és az átvitelének abszolút értéke 1! Rajzolja fel a hálózat jelfolyamgráfját a direkt struktúrának, valamint transzponáltjának megfelelően! Adja meg mindkét hálózat állapotváltozós leírását! Mindkét hálózat esetében vezesse le, hogy nulla bemenet esetén - végtelen idő alatt - mennyi energia nyerhető ki belőlük! Alkalmas transzformációval hozzon létre olyan beállítást, amely esetén a kivehető energia az állapotváltozó négyzetével egyezik! Adjon meg strukturálisan passzív realizációt is! Adja meg a kivehető energiát erre a realizációra is. Melyik elrendezésből vehető ki a legtöbb energia?

Megoldás:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}}$$





$x(n+1) = px(n) + u(n)$

$y(n) = x(n) - p\,x(n+1) = (1-p^2)x(n) - pu(n)$

$A = p, C = 1 - p^2$

$x(n+1) = px(n) + (1-p^2)u(n)$

$y(n) = x(n) - pu(n)$

$A_t = p, C_t = 1$

Az $A^T PA + C^T C = P$ összefüggéssel összhangban:

$pPp + (1 - p^2)^2 = P \rightarrow P = 1 - p^2 = 0.75$

$pP_t p + 1 = P_t \;\rightarrow\; P_t = \frac{1}{1-p^2} = \frac{4}{3} \cong 1.33$

A kivehető energia:

$0.75x^2$

$1.33x^2$

A hasonlósági transzformáció mátrixa:

$R = \sqrt{1 - p^2}$

$R_t = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$

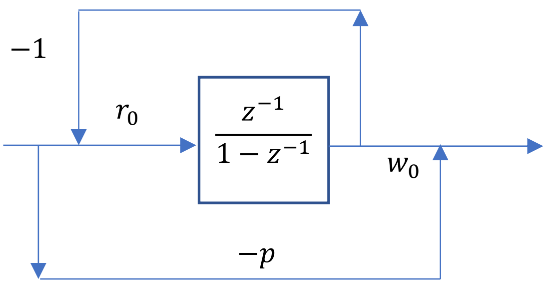
$A' = p, C' = \sqrt{1 - p^2}$

$A'_t = p, C'_t = \sqrt{1 - p^2}$

Ezzel $A^T A + C^T C = I$, mert

$p^2 + 1 - p^2 = 1$

$p^2 + 1 - p^2 = 1$



A strukturálisan passzív realizációhoz:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}} = -p + \frac{(1 - p^2)z^{-1}}{1 - pz^{-1}}$$

$$\frac{\frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} w_0}{1 + \frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}}} = \frac{r_0 z^{-1}}{1 - (1 - r_0)z^{-1}} w_0 = \frac{(1 - p^2)z^{-1}}{1 - pz^{-1}}$$

Ebből $r_0 = 1 - p = 0.5$, $w_0 = 1 + p = 1.5$

A kinyerhető energiához: $A = p, C = 1 + p$

$pPp + (1 + p)^2 = P \rightarrow P = \frac{1+p}{1-p} = 3$, amivel a kinyerhető energia: $3x^2$

Alternatív számolás: $(1 + p)^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^{2k} = \frac{1+p}{1-p}$

A rezonátoros struktúra transzponáltjának alkalmazása esetén: $A_t = p, C_t = r_0 = 1 - p$

$pP_t p + (1 - p)^2 = P_t \rightarrow P = \frac{1-p}{1+p} = \frac{1}{3} \cong 0.33$, amivel a kinyerhető energia: $0.33x^2$

A legtöbb energia a strukturálisan passzív, rezonátoros elrendezésből nyerhető ki, és ennek megfelelően ebben lesznek a legalacsonyabbak a belső jelszintek.

3. Valósítsa meg a $H(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$ átviteli függvényt rezonátoros struktúrával, $z_0 = 1$ és $z_1 = -1$ pozíciójú rezonátorok feltételezésével! A megvalósítás a blokkvázlat felrajzolását és a struktúra paramétereinek levezetését jelenti. Teljesül-e a választott megoldásnál a strukturális passzivitás feltétele?

Megoldás:

$$H(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{\frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} w_0 - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}} w_1}{1 + \frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{(1 + z^{-1}) r_0 z^{-1} w_0 - (1 - z^{-1}) r_1 z^{-1} w_1}{1 - z^{-2} + (1 + z^{-1}) r_0 z^{-1} - (1 - z^{-1}) r_1 z^{-1}} =$$

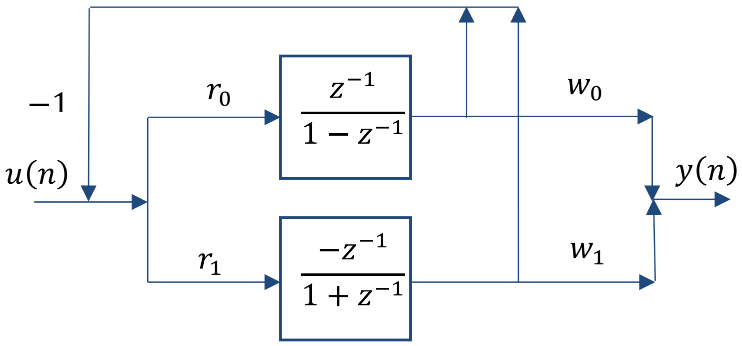
$$= \frac{(r_0 w_0 - r_1 w_1)z^{-1} + (r_0 w_0 + r_1 w_1)z^{-2}}{1 + (r_0 - r_1)z^{-1} + (r_0 + r_1 - 1)z^{-2}}$$

$r_0 - r_1 = b_1, r_0 + r_1 - 1 = b_2$, ahonnan

$$r_0 = \frac{1 + b_1 + b_2}{2} = 0.25, r_1 = \frac{1 - b_1 + b_2}{2} = 1.25,$$

ill.

$$w_0 = \frac{a_1}{1 + b_1 + b_2} = 1, w_1 = \frac{-a_1}{1 - b_1 + b_2} = -0.2,$$



A strukturális passzivitás feltétele nem teljesül, mert $r_0 + r_1 = 1 + b_2 > 1$.

Megjegyzés: A strukturális passzivitás teljesüléséhez az $1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = -(b_2 + b_1 z^{-1} + z^{-2})$ egyenlet gyökei jelölik ki a rezonátor pólusokat:

$z^{-2} + \frac{2b_1}{1+b_2} z^{-1} + 1 = z^{-2} + 2z^{-1} cos\varphi_0 + 1 = 0$, $z_{0,1} = cos\varphi_0 \pm jsin\varphi_0$ ahol $cos\varphi_0 = \frac{b_1}{1+b_2}$

A nevezőpolinomok egyeztetésével ($r_0 = r_1$)

$$1 + 2z^{-1} cos\varphi_0 + z^{-2} + 2r_0(z^{-1} cos\varphi_0 - z^{-2}) = 1 + 2(1 - r_0) z^{-1} \frac{b_1}{1 + b_2} + (1 - 2r_0) z^{-2}$$
$$= 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

ahonnan $1 - 2r_0 = b_2$, vagyis $r_0 = \frac{1-b_2}{2} = r_1$, $r_0 + r_1 = 1 - b_2 < 1$.

4. Bizonyítsa be, hogy az eredőben valós átvitelt megvalósító, komplex együtthatós, elsőfokú rezonátorokból felépített, visszacsatolt rezonátoros struktúrából kinyerhető energia a $\mathrm{Q} = \mathrm{diag}\langle \mathrm{r}_0^{-1}, \mathrm{r}_1^{-1}, \dots, \mathrm{r}_{N-1}^{-1} \rangle$ mátrix segítségével adható meg, amennyiben $\sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{r_m} = 1$, ahol $\mathrm{r_m} > 0$, $\forall \mathrm{m}$-re (max. 5 pont)!

Megoldás:

$A = diag\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \rangle$, $A^* = diag\langle z_0^{-1}, z_1^{-1}, \dots, z_{N-1}^{-1} \rangle$, $R^T = [r_0, r_1, \dots., r_{N-1}]$, $G = AR$, $C = [1,1, \dots,1]$ jelölésekkel, ahol a '*' konjugált transzponáltat jelent:

Bizonyítandó, hogy $(A - GC)^* Q (A - GC) + C^T C = Q$. Elvégezve a műveleteket:

$$A^*QA - A^*QGC - C^TG^*QA + C^TG^*QGC + C^TC$$
$$= A^*QA - A^*QARC - C^TR^TA^*QA + C^TR^TA^*QARC + C^TC =$$

$= Q - QRC - C^TR^TQ + C^TR^TQRC + C^TC = Q - 2C^TC + 2C^TC = Q$, ahol felhasználtuk, hogy

$A^*QA = Q$, $QR = C^T$, $R^TQ = C$, $R^TQR = \sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{r_m} = 1$.

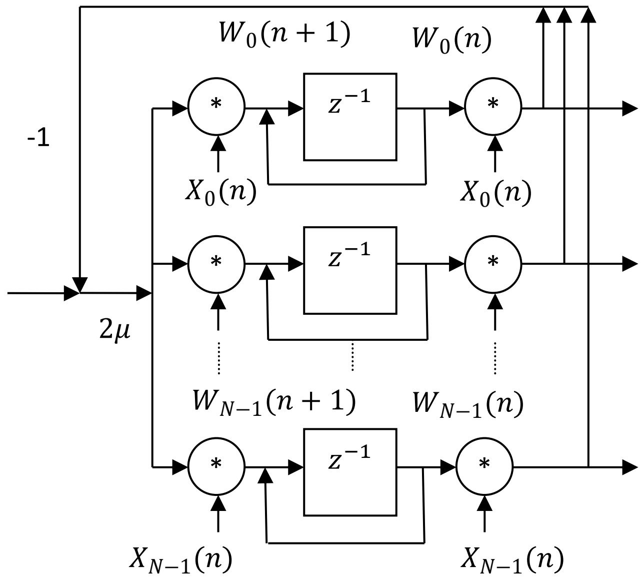
Megjegyzés: A Q mátrix szimmetrikus négyzetgyökével megvalósított hasonlósági transzformációval a rezonátoros struktúra ortogonális realizációjához jutunk.

5. Blokkvázlat és az összefüggések megadásával mutassa be az LMS eljárás és a rekurzív diszkrét Fourier transzformáció kapcsolatát! Mutassa be a μ konvergencia tényező megválasztásának kritériumát – az LMS eljárás alkalmazása esetén – a stabiltáselméleti megközelítésre alapozva! Adjon felső határértéket μ-re, ha $\dim \boldsymbol{X}(n) = N = 25$ és a regressziós vektor elemeinek maximuma $L = 10$!

Megoldás:
Az LMS eljárás lerajzolható ugyanolyan formában, mint a rekurzív jelreprezentáció. Az LMS algoritmus összefüggése komplex regressziós vektor esetén:

$$\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) + 2\mu e(n)\boldsymbol{X}^*(n),$$

azaz a bázisvektor az $\boldsymbol{X}(n)$ vektornak, a reciprok bázis vektor pedig az $2\mu\boldsymbol{X}^*(n)$ vektornak, azaz a komplex konjugált konstans szorosának felel meg. Ha $\boldsymbol{X}(n)$ a harmonikus komplex exponenciálisokat tartalmazza, és $2\mu = 1/N$, akkor az LMS eljárás éppen a rekurzív DFT-t írja le.



A paraméterhiba kifejezése:

$$\boldsymbol{V}(n+1) = [\boldsymbol{I} - 2\mu\boldsymbol{X}(n)X^T(n)]\boldsymbol{V}(n).$$

Ez utóbbi egy autonóm rendszer, amely globálisan aszimptotikusan stabil esetben:

$$\boldsymbol{V}(n) \Rightarrow 0, \text{ amivel } \boldsymbol{W}(n) \Rightarrow \boldsymbol{W}^*.$$

Ljapunov módszerével keresünk egy alkalmas energiafüggvényt. Esetünkben erre alkalmas:

$$G(n) = \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n).$$

Azt keressük, hogy ez miként csökkenthető:

$$\Delta G(n+1) = G(n+1) - G(n) \leq 0,$$

minden n-re. Ha $G(0)$ véges, akkor $\Delta G(n) \Rightarrow 0$.

$$\Delta G(n+1) = \boldsymbol{V}^T(n+1)\boldsymbol{V}(n+1) - \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n) =$$
$$= \boldsymbol{V}^T(n)[I - 2\mu\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n)]^T[I - 2\mu\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n)]\boldsymbol{V}(n) - \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n) =$$
$$\boldsymbol{V}^T(n)[-4\mu\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n) + [4\mu^2\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n)]\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n)]\,\boldsymbol{V}(n) =$$
$$= -4\mu e^2(n)(1 - \mu\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n))$$

ahol felhasználtuk, hogy $\boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{X}(n) = e(n)$. Mivel $\mu > 0$, ezért ha

$$0 < \mu < \frac{1}{\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n)}$$

∀n-re, akkor $\Delta G \Rightarrow 0$ magával vonja $\mu e^2(n) \to 0$, illetve $\boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{X}(n) \to 0$.

Megjegyzés:

A $\boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{X}(n)$ skalár szorzat lehet úgy is nulla, hogy a két vektor ortogonális, amikoris $\boldsymbol{V}(n) \neq 0$. Ez kerülendő.

μ elfogadható tartománya:

$$0 < \mu < \frac{1}{\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n)} < \frac{1}{NL^2} = \frac{1}{2500} = 0.0004$$