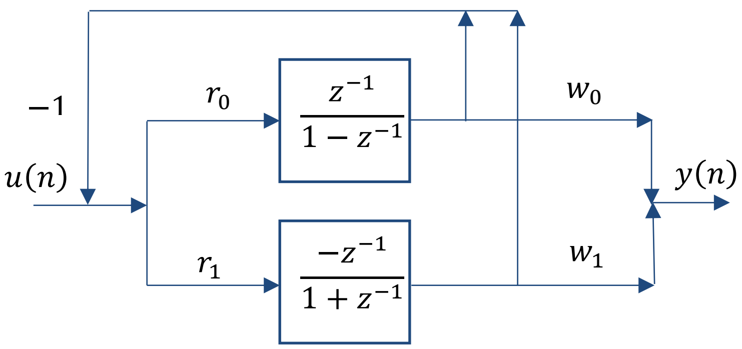
10. Gyakorlat

Modellalapú jelfeldolgozás

1. A $H(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$ átviteli függvénnyel jellemezhető rendszer állapotváltozóit kellene megbecsülnünk. Vélelmezzük, hogy a rendszer belső struktúrája a rezonátoros számítási struktúrának felel meg $z_0 = 1$ és $z_1 = -1$ pozíciójú rezonátorokkal. Bemenetén multiszinuszos gerjesztést alkalmazunk. A paramétereket ismertnek tételezzük fel: $a_1 = a_2 = 0.25$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0.5$. Rajzolja fel a vélelmezett rendszer jelfolyamgráfját, és határozza meg az abban szereplő paraméterek számértékét! Tervezzen olyan megfigyelőt (azaz számítsa ki a megfigyelő ismeretlen paramétereit), amely képes a vizsgált rendszer állapotváltozóinak a lehető legrövidebb időn belüli meghatározására! (A megfigyelési zaj elhanyagolható!) Ellenőrizze, hogy teljesül-e a hibarendszer sajátértékeire vonatkozó feltétel!

Megoldás:

A vélelmezett rendszer jelfolyamgráfja



$$H(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{\frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} w_0 - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}} w_1}{1 + \frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

$$= \frac{(1 + z^{-1}) r_0 z^{-1} w_0 - (1 - z^{-1}) r_1 z^{-1} w_1}{1 - z^{-2} + (1 + z^{-1}) r_0 z^{-1} - (1 - z^{-1}) r_1 z^{-1}} =$$

$$= \frac{(r_0 w_0 - r_1 w_1) z^{-1} + (r_0 w_0 + r_1 w_1) z^{-2}}{1 + (r_0 - r_1) z^{-1} + (r_0 + r_1 - 1) z^{-2}}$$

$r_0 - r_1 = b_1, r_0 + r_1 - 1 = b_2$, ahonnan

$$r_0 = \frac{1 + b_1 + b_2}{2} = 0.25, r_1 = \frac{1 - b_1 + b_2}{2} = 1.25,$$

ill.

$$w_0 = \frac{a_1 + a_2}{1 + b_1 + b_2} = 1, w_1 = \frac{-a_1 + a_2}{1 - b_1 + b_2} = 0,$$

Az állapotváltozós leírás:

$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - r_0 & -r_0 \\ r_1 & -1 + r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_0 \\ -r_1 \end{bmatrix} u(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}u(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)$$

A véges lépésben történő konvergencia feltétele, hogy

$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})^2=\boldsymbol{0}$ teljesüljön. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.75 & -0.25\\ 1.25 & 0.25\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=[1 \quad 0]$, $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}g_0\\ g_1\end{bmatrix}$

Egyenértékű feltétel, hogy a megfigyelő összes sajátértéke nulla.

$$\begin{bmatrix}0.75-g_0 & -0.25\\ 1.25-g_1 & 0.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.75-g_0 & -0.25\\ 1.25-g_1 & 0.25\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}(0.75-g_0)^2-0.25(1.25-g_1) & -0.25(0.75-g_0)-0.25^2\\ (1.25-g_1)(0.75-g_0)+0.25(1.25-g_1) & -0.25(1.25-g_1)+0.25^2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ebből $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}g_0\\ g_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. Ellenőrzésképpen:

$$\begin{bmatrix}-0.25 & -0.25\\ 0.25 & 0.25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.25 & -0.25\\ 0.25 & 0.25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

A hibarendszer összes sajátértéke nulla feltétel:

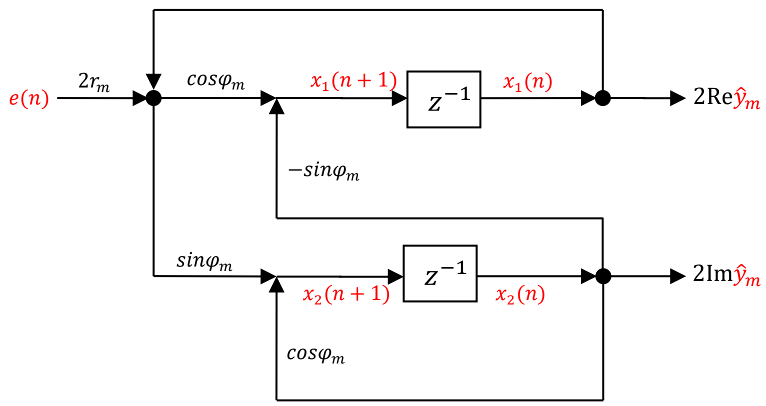
$$det\begin{bmatrix}\lambda-0.75+g_0 & 0.25\\ -1.25+g_1 & \lambda-0.25\end{bmatrix}=(\lambda-0.75+g_0)(\lambda-0.25)-0.25(-1.25+g_1)=$$
$$=\lambda^2+\lambda(1-g_0)+0.5-0.25(g_0+g_1)=0$$

Ebből is $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}g_0\\ g_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$.

2. A megfelelő elsőfokú, komplex együtthatós rezonátorok átviteli függvényéből $\left(\frac{r_m z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}\right)$ kiindulva vezesse le egy másodfokú, valós együtthatós diszkrét rezonátor átviteli függvényét! Mutassa meg, hogy az $A=\begin{bmatrix}cos\varphi_m & -sin\varphi_m\\ sin\varphi_m & cos\varphi_m\end{bmatrix}$ állapotátmenet mátrixszal, $G=2r_m\begin{bmatrix}cos\varphi_m\\ sin\varphi_m\end{bmatrix}$ becsatoló mátrixszal, valamint $\boldsymbol{C}=[1 \quad 0]$ kicsatoló mátrixszal jellemezhető, ún. ortogonális rezonátor átviteli függvénye ugyanilyen alakú! Rajzoljon fel egy olyan számítási vázlatot, amely az ortogonális rezonátort valósítja meg! Adja meg a struktúra transzponáltjának mátrixait is!

Megoldás:

$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}+\frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1-z_m^{-1} z^{-1}}=2r_m\frac{z^{-1}\cos\phi_m-z^{-2}}{1-2z^{-1}\cos\phi_m+z^{-2}}$$



$$\begin{bmatrix}zx_1(z)\\ zx_2(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi_m & -\sin\phi_m\\ \sin\phi_m & \cos\phi_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(z)\\ x_2(z)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2r_m\cos\phi_m\\ 2r_m\sin\phi_m\end{bmatrix}e(z),$$

ahonnan a második egyenlet: $zx_2(z)=x_1(z)\sin\phi_m+x_2(z)\cos\phi_m+2r_m e(z)\sin\phi_m$. Ebből

$x_2(z) = \frac{1}{z-cos\,\phi_m}[x_1(z)\,sin\,\phi_m + 2r_m e(z)\,sin\,\phi_m]$, amit az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$zx_1(z) = x_1(z)\,cos\,\phi_m - \frac{sin\,\phi_m}{z-cos\,\phi_m}[x_1(z)\,sin\,\phi_m + 2r_m e(z)\,sin\,\phi_m] + 2r_m e(z)\,cos\,\phi_m$$

Innen

$$x_1(z)\left[z - cos\,\phi_m + \frac{sin^2\,\phi_m}{z-cos\,\phi_m}\right] = 2r_m e(z)\left[cos\,\phi_m - \frac{sin^2\,\phi_m}{z-cos\,\phi_m}\right]$$

ahonnan:

$$\frac{x_1(z)}{e(z)} = 2r_m\frac{z\,cos\,\phi_m - 1}{z^2 - 2z\,cos\,\phi_m + 1} = 2r_m\frac{z^{-1}\,cos\,\phi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1}\,cos\,\phi_m + z^{-2}}$$

A struktúra transzponáltjának mátrixai:

$$\boldsymbol{A_t} = \begin{bmatrix} cos\varphi_m & sin\varphi_m \\ -sin\varphi_m & cos\varphi_m \end{bmatrix},\ \mathbf{G_t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{C_t} = 2r_m[cos\varphi_m \quad sin\varphi_m]$$

3. Tervezzen véges impulzusválaszú szűrőt a frekvencia-mintavételi eljárás segítségével! A szűrő átvitele nulla frekvencián egységnyi, $f_m/6$, $f_m/3$ és $f_m/2$ frekvencián (f_m a mintavételi frekvencia) pedig nulla. Rajzolja fel a szűrőt magvalósító Lagrange struktúra blokkvázlatát, és vezesse le az amplitúdó- és fáziskarakterisztikáját megadó összefüggést! Mekkora a szűrő átvitelének abszolút értéke $0.1 * f_m$ frekvencián?

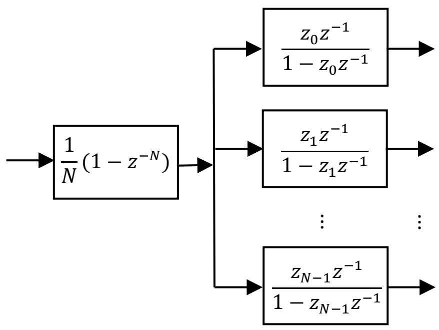
Megoldás:

A specifikációt teljesítő szűrő átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{6}\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}},$$

A Langrange struktúra általános blokkvázlata, amiből most csak a nulla frekvenciás rezonátort kell megvalósítani, mivel a többi „kicsatolása” nulla:

$$N = 6,\quad z_m = e^{j\frac{\pi}{3}m}, m = 0,1,\ldots,5$$



$$H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{z^{-1}}{6}\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}\bigg|_{z=e^{j\omega T}} =$$

$$= \frac{e^{-j\frac{1}{2}\omega T}}{6}e^{-j3\omega T}\frac{sin3\omega T}{sin\frac{1}{2}\omega T}$$

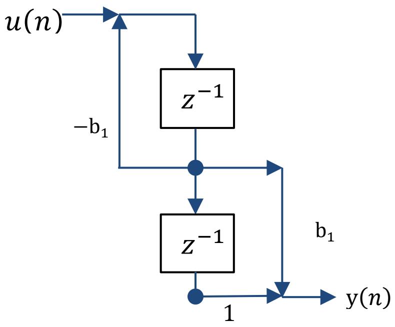
Az amplitúdókarakterisztika $\frac{1}{6}\left|\frac{sin3\omega T}{sin\frac{1}{2}\omega T}\right|$, a fáziskarakterisztika $\phi(\omega) = -\frac{7}{2}\omega T$ az $\omega T = k\frac{\pi}{3}$ helyen ($k = \pm1, \pm2, \ldots$) (az előjelváltás miatt) π fázisugrással, kivéve azokat a helyeket, ahol $sin\frac{\omega T}{2}$ is előjelet vált.

A szűrő átvitelének abszolút értéke $0.1 * f_m$ frekvencián: $\frac{1}{6}\left|\frac{sin0.6\pi}{sin0.1\pi}\right| \cong 0.513$, fázisa: -0.7π (radián).

4. Hogyan kell módosítani az 1. feladatban szereplő átviteli függvény paramétereit annak érdekében, hogy az átviteli függvény mindentáteresztő tulajdonságú legyen? Rajzolja fel az ennek megfelelően módosított átviteli függvényt megvalósító direkt struktúra blokkvázlatát! Bizonyítsa be, hogy a módosított $H(z)$ átviteli függvény mindentáteresztő tulajdonságú! Valósítsa meg ezt az átviteli függvényt másodfokú direkt struktúrájú rezonátorral is! Rajzolja le mindkét implementáció transzponáltjának blokkvázlatát is!

Megoldás:

Ahhoz, hogy a zérus(ok) és a pólus(ok) egymás tükörképei legyenek az egységsugarú körre vonatkoztatva, a $H(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$ átviteli függvényben $b_2 = 0, a_2 = 1, a_1 = b_1$ beállítás szükséges azzal, hogy az átviteli függvény előjele szabadon megválasztható ($a_2 = \pm 1, a_1 = \pm b_1$). A továbbiakban a pozitív előjelű változatot valósítjuk meg.



Az átvitel abszolút értékének négyzete a komplex konjugálttal történő szorzás után:

$$|H(z)|^2 = z^{-1}\frac{z^{-1} + b_1}{1 + b_1 z^{-1}} z \frac{z + b_1}{1 + b_1 z} = \frac{1 + b_1(z + z^{-1}) + b_1^2}{1 + b_1(z + z^{-1}) + b_1^2} = 1$$

Rezonátor átviteli függvény:

$$H(z) = 2r_m \frac{z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1}cos\varphi_m + z^{-2}}$$

A visszacsatolt rezonátoros struktúra átviteli függvénye:

$$\frac{2r_m \frac{z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1}cos\varphi_m + z^{-2}}}{1 + 2r_m \frac{z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1}cos\varphi_m + z^{-2}}} = \frac{2r_m(z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2})}{1 - 2(1 - r_m)z^{-1}cos\varphi_m + (1 - 2r_m)z^{-2}}$$

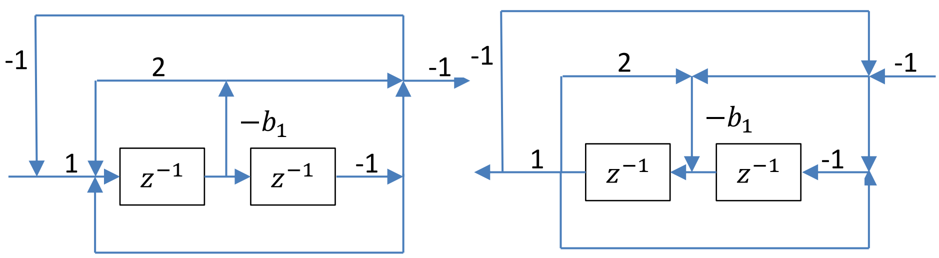
A kicsatolás: $w_m = -1$, mert a megvalósítandó átviteli függvény a $z_m = e^{j\varphi_m}$ helyen -1.

$$\frac{2r_m(z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2})}{1 - 2(1 - r_m)z^{-1}cos\varphi_m + (1 - 2r_m)z^{-2}}(-1) = \frac{z^{-2} + b_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

Az együtthatók egyeztetésével:

$$2r_m = 1, \qquad r_m = \frac{1}{2}, cos\varphi_m = -b_1$$

A rezonátoros megvalósítás és transzponáltja:



A direkt struktúra transzponáltja