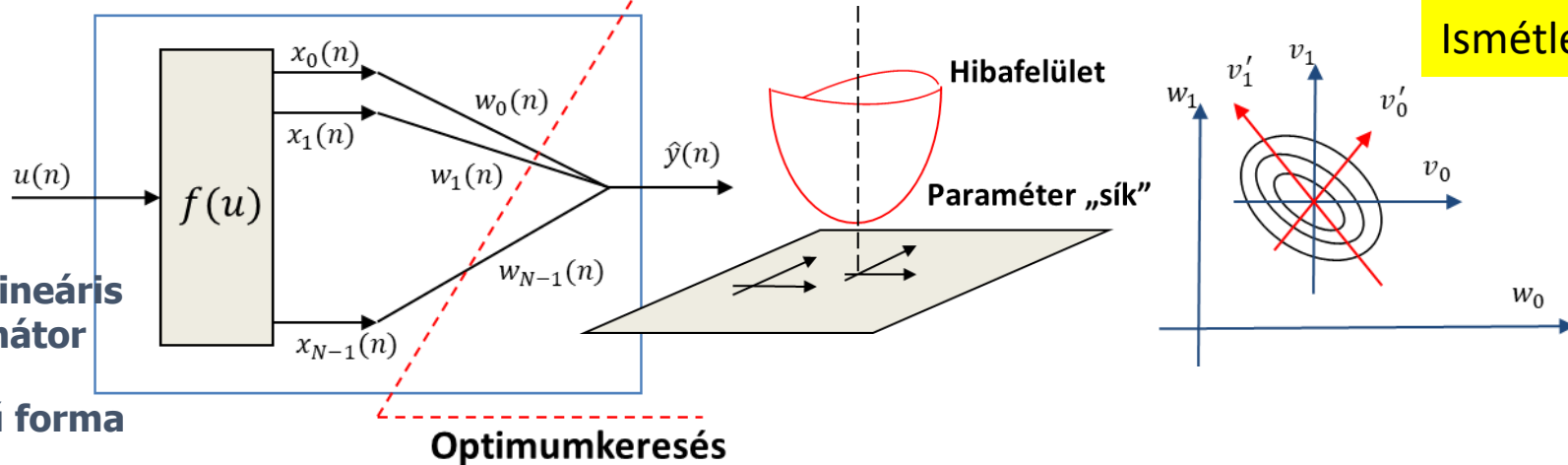
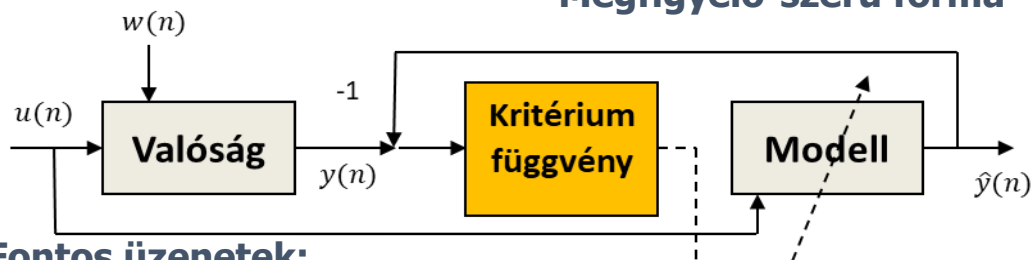
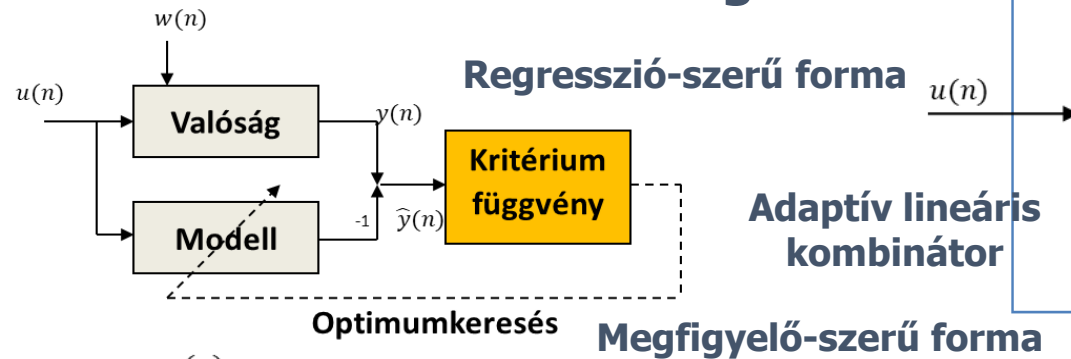


# Méréselmélet

## 5. fejezet: Szűréselmélet alapjai

2022. március 30.

# Modellillesztés: Összefoglalás



Optimumkeresés

$$J(\mathbf{W}(n)) = J_{min} + (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*)^T \mathbf{R} (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*) = J_{min} + \mathbf{V}^T(n) \mathbf{R} \mathbf{V}(n)$$

Newton módszer:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \mu \mathbf{R}^{-1} \nabla J(n)$$

$$\mathbf{V}(n+1) = (1 - 2\mu) \mathbf{V}(n)$$

Legmeredekebb lejtő módszere:

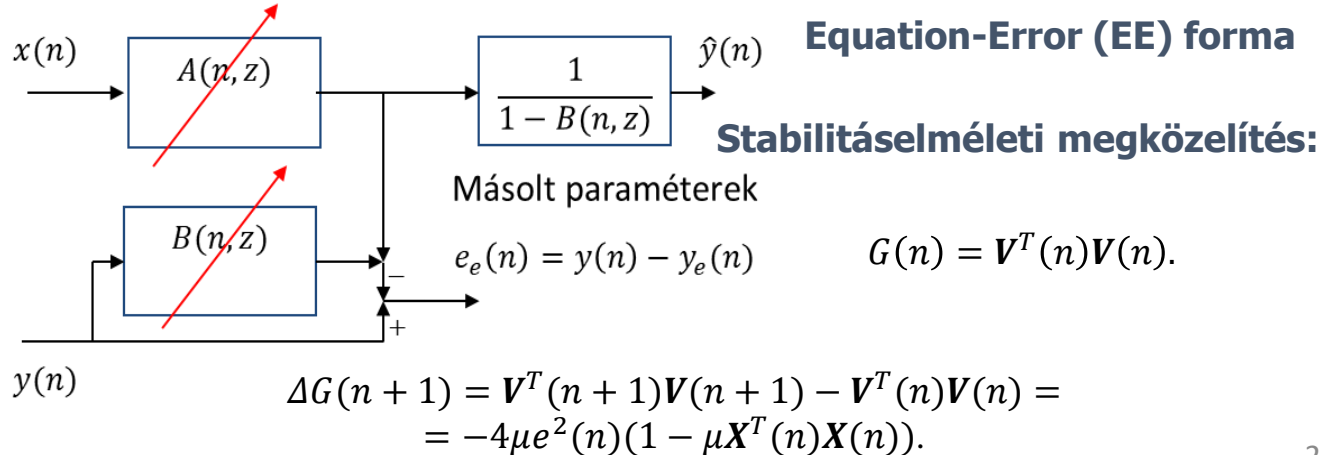
$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \mu \nabla J(n)$$

$$\mathbf{V}'(n+1) = (1 - 2\mu \lambda) \mathbf{V}'(n)$$

Legkisebb átlagos négyzetes (LMS) módszer:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}_n(n) + 2\mu \mathbf{X}(n) e(n)$$

$$\mathbf{V}(n+1) = \left[ \prod_{i=0}^n (1 - 2\mu \mathbf{X}(i) \mathbf{X}^T(i)) \right] \mathbf{V}(0)$$



$$\Delta G(n+1) = \mathbf{V}^T(n+1) \mathbf{V}(n+1) - \mathbf{V}^T(n) \mathbf{V}(n) = -4\mu e^2(n) (1 - \mu \mathbf{X}^T(n) \mathbf{X}(n)).$$

## Fontos üzenetek:

- A paramétereiben **lineáris** modelleket azért kedveljük, mert **négyzetes hibakritérium** esetén a szélsőérték-keresés lineáris egyenletrendszer megoldására vezet, mivel a négyzetes kifejezések paraméterek szerinti deriválása **lineáris** összefüggést eredményez.
- A modellillesztés feladatát alapvetően kétféle módszerrel oldhatjuk meg:
  - „**batch**” vagy „**off-line**” jelleggel, amikor felvett regisztrátumot utólag dolgozunk fel;
  - iteratív, rekurzív, „on-line”** jelleggel, amikor a felvétellel párhuzamos a feldolgozás.
- A modellillesztés célját illetően is alapvetően két nagy csoportot különböztetünk meg:
  - identifikáció:** a lehető legpontosabban szeretnénk megragadni a valóságot,
  - adaptáció:** a lehető legjobban szeretnénk követni a valóságot, a valóság változásait.

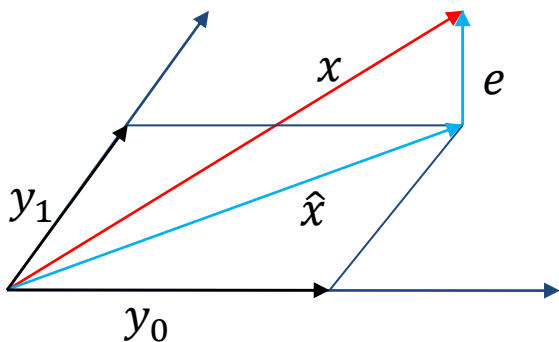
# 5. Szűréselmélet alapjai

(Jegyzet 58-70. oldalak)

## 5.1. Optimális nemrekurzív becslő (skalár Wiener Szűrő)

Keressük  $x$  legjobb becslőjét  $\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k$  (247) ún. **lineáris batch processzonnal**, ahol  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$  jelölik a megfigyelési adatokat, a  $\{a_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  pedig ismeretlen súlytényezők.

A legjobb becslés geometriai interpretációja (29. ábra):



Legjobbnek azt a becslést tekintjük, amelyik legkisebb hibával jár: ez az  $x$  vektor altérre történő merőleges vetítésével áll elő.

Megmutatjuk, hogy ez ekvivalens azzal a megoldással, amelyet a négyzetes hibakritérium minimalizálásával kaptunk:

$$e = x - \hat{x}, \quad E\{e^2\} = E\{(x - \hat{x})^2\} = E\left\{\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k\right)^2\right\} \quad (248) \quad \text{Elvégezve a deriválást:}$$

$$\frac{\partial E\{e^2\}}{\partial a_j} = -2E\left\{\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k\right) y_j\right\} = 0, \quad E\{e y_j\} = 0, \quad \forall j - \text{re.} \quad (249)$$

geometriai interpretációban éppen azt fejezi ki, hogy az optimális beállítás esetén az  $e$  hibavektor merőleges valamennyi  $y_j$  vektorra.



amit soronként visszahelyettesítve:  $a_0 = a_1 = \dots = a_{N-1} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2 + N\sigma_x^2}$  Ezzel:  $\hat{x} = \frac{1}{N + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2} \sum_{k=0}^{N-1} y_k = \frac{\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_w}\right)^2}{1 + N\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_w}\right)^2} \sum_{k=0}^{N-1} y_k$

A négyzetes hiba várható értéke:  $E\{e^2\}|_{min} = \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \frac{N}{N + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2} = \frac{\sigma_w^2}{N + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2}$  azaz az additív zaj hatása jelentősen csökkenthető.

## Rekurzív becslő az optimális nemrekurzív becslőből

**Bevezető példa:** az egyszerű lineáris átlagolás rekurzív formában.

$\hat{x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k)$  Az iterációs indexhez asszociálhatjuk a diszkrét időt ( $n = 1, 2, \dots$ ).

$$\hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y(k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n+1} y(n) = \frac{n}{n+1} \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} (y(n) - \hat{x}(n))$$

A rekurzív eljárás nagy előnye, hogy nem kell megvárni az összes adatot: folyamatosan számolható az egyre jobb minőségű becslő.

$N$  helyett  $n$ -t írva  $\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) y(k)$ ,  $a_k(n) = \frac{1}{n + \gamma}$ ,  $E\{e^2(n)\}|_{min} = \frac{\sigma_w^2}{n + \gamma}$   
 ( $\gamma = \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2$ ):

Mindezeket megismételve  $n+1$ -re:

$$\hat{x}(n+1) = \sum_{k=0}^n a_k(n+1) y(k), \quad a_k(n+1) = \frac{1}{n+1 + \gamma}, \quad E\{e^2(n+1)\}|_{min} = \frac{\sigma_w^2}{n+1 + \gamma}$$

Követve a rekurzív átlagoló lépéseit:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1 + \gamma} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n+1 + \gamma} y(n) = \frac{n + \gamma}{n+1 + \gamma} \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1 + \gamma} y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1 + \gamma} (y(n) - \hat{x}(n))$$

A négyzetes hiba alakulása:  $\frac{E\{e^2(n+1)\}|_{min}}{E\{e^2(n)\}|_{min}} = \frac{a_k(n+1)}{a_k(n)} = \frac{n + \gamma}{n+1 + \gamma} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n + \gamma}} = \frac{1}{1 + \frac{E\{e^2(n)\}|_{min}}{\sigma_w^2}}$

A rekurzív összefüggés együtthatóit átnevezve:

$$\hat{x}(n+1) = a(n+1)\hat{x}(n) + b(n+1)y(n) = \hat{x}(n) + \underbrace{b(n+1)(y(n) - \hat{x}(n))}_{\text{korrekciós tag}}$$

**2. Példa:** Legyen  $\gamma = 2$ ,  $\sigma_w^2$  adott.

$$\begin{aligned} \hat{x}(n+1) &= \frac{n+2}{n+3}\hat{x}(n) + \frac{1}{n+3}y(n) \\ &= \hat{x}(n) + \frac{1}{n+3}(y(n) - \hat{x}(n)) \end{aligned}$$

## 5.2. Optimális rekurzív becslő (skalár Kalman szűrő és prediktor)

A modell, amit alkalmazunk a legegyszerűbb állapotváltozós modell, amit egy Gauss eloszlású fehér-zaj folyamat gerjeszt.

$$x(n) = ax(n-1) + w(n) \quad (264)$$

$$E\{w(n)\} = 0, E\{w(n)w(j)\} = \begin{cases} 0 & n \neq j \\ \sigma_w^2 & n = j \end{cases}$$

$\left. \begin{matrix} x(n) = 0 \\ w(n) = 0 \end{matrix} \right\}$  ha  $n < 0$  A (264) egy ún. **elsőrendű autoregresszív folyamat**: első rendben függ az értéke az előző „időpillanatbeli” értéktől.

Négyzetes várható értéke kifejezhető a zajfolyamat négyzetes várható értékével:  $E\{x(n)\} = 0$ ,  $E\{x^2(n)\} = ?$

$$E\{x^2(n)\} = R_{xx}(0) = \sigma_x^2 = E\{a^2x^2(n-1) + w^2(n) + 2ax(n-1)w(n)\} = a^2 R_{xx}(0) + R_{ww}(0) \rightarrow R_{xx}(0) = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2}$$

$$R_{xx}(0) = a^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2$$

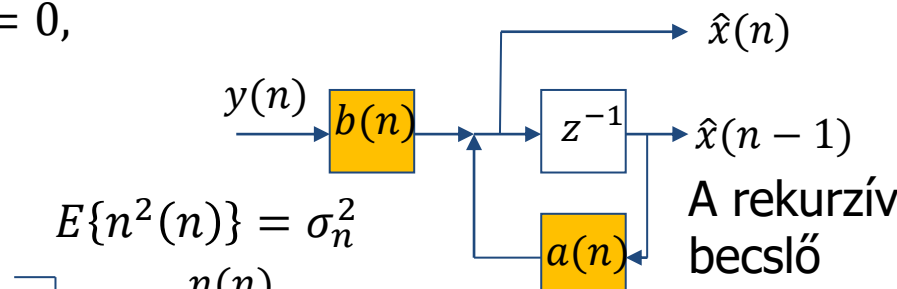
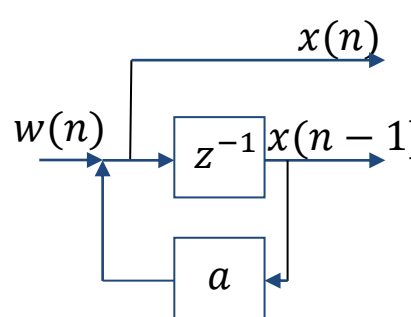
$$E\{x(n-1)w(n)\} = 0,$$

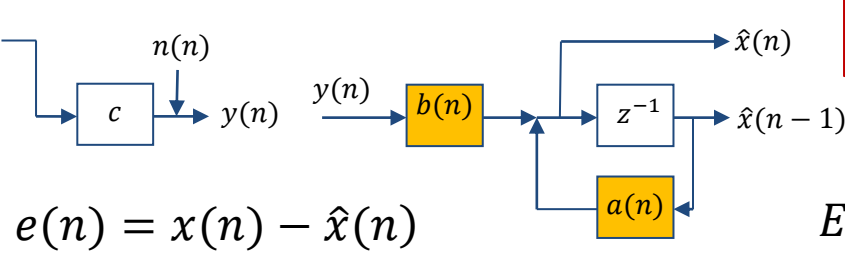
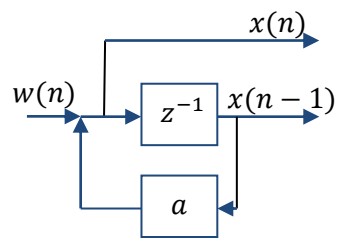
$$R_{xx}(1) = E\{x(n)x(n+1)\} = E\{x(n)(ax(n) + w(n+1))\} = aR_{xx}(0)$$

$$R_{xx}(2) = E\{x(n)x(n+2)\} = E\{x(n)(ax(n+1) + w(n+2))\} = a^2R_{xx}(0)$$

$$R_{xx}(j) = E\{x(n)x(n+j)\} = R_{xx}(j) = a^{|j|}R_{xx}(0)$$

mert  $E\{x(n)w(n+j)\} = 0, \forall n - re, \text{ és } \forall j > 0 - ra$





$$\hat{x}(n) = a(n)\hat{x}(n-1) + b(n)y(n)$$

rekurzív szűrő

$$\hat{x}(n+1) = \alpha(n)\hat{x}(n) + \beta(n)y(n)$$

rekurzív prediktor

$$E\{e^2(n)\} = E\{(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n))^2\} \quad (271)$$

Keressük az optimális súlytényezőket:  $\frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial a(n)} = -2E\{e(n)\hat{x}(n-1)\} = 0$ ,  $\frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial b(n)} = -2E\{e(n)y(n)\} = 0$   
**„ortogonalitás“!** **„ortogonalitás“!**

**a(n) meghatározása:**

$$E\{[x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n)]\hat{x}(n-1)\} = 0. \text{ Beleírva: } a(n)x(n-1) - a(n)x(n-1) = 0, y(n) = cx(n) + n(n)$$

$$E\{[a(n)(x(n-1) - \hat{x}(n-1)) - a(n)x(n-1)]\hat{x}(n-1) + [x(n) - b(n)cx(n) - b(n)n(n)]\hat{x}(n-1)\} = 0$$

$$a(n)E\{-e(n-1)\hat{x}(n-1) + x(n-1)\hat{x}(n-1)\} = E\{[(1 - b(n)c)x(n) - b(n)n(n)]\hat{x}(n-1)\}$$

Itt  $E\{e(n-1)\hat{x}(n-1)\} = 0$ , mert  $\hat{x}(n-1) = a(n-1)\hat{x}(n-2) + b(n-1)y(n-1)$  tagjai **ortogonálisak**  $e(n-1)$ -re.

Hasonlóképpen a megfigyelési zaj  $n(n)$  mintája korrelálatlan  $\hat{x}(n-1)$  értékével.

Behelyettesítve, hogy  $x(n) = ax(n-1) + w(n)$ , és  $E\{w(n)\hat{x}(n-1)\} = 0$ , kapjuk:

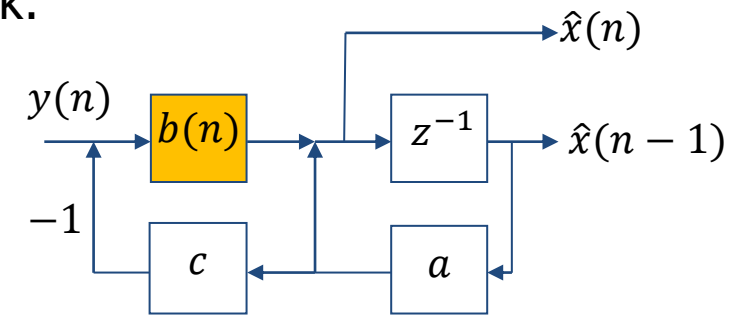
$$a(n)E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\} = a[(1 - b(n)c)]E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\} \rightarrow$$

$$a(n) = a[(1 - b(n)c)] \quad \hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ca\hat{x}(n-1))$$

**b(n) meghatározása:** (271) ← modell + becslő egyenletei

$$E\{e^2(n)\} = E\{[ae(n-1) + w(n) - b(n)(ace(n-1) + cw(n) + n(n))]\}^2$$

$$E\{e^2(n)\} = E\{[a[1 - b(n)c]e(n-1) + [1 - b(n)c]w(n) - b(n)n(n)]^2\}$$



$$E\{e(n-1)w(n)\} = 0$$

$$E\{e(n-1)n(n)\} = 0$$

$$E\{w(n)n(n)\} = 0$$

A négyzetre emelést követően csak a négyzetes tagok maradnak meg:

$$E\{e^2(n)\} = p(n)$$

$$E\{e^2(n)\} = a^2[1 - b(n)c]^2 E\{e^2(n-1)\} + [1 - b(n)c]^2 E\{w^2(n)\} + b^2(n) E\{n^2(n)\} \quad E\{w^2(n)\} = \sigma_w^2 \quad E\{n^2(n)\} = \sigma_n^2$$

$$\frac{\partial p(n)}{\partial b(n)} = -2a^2[1 - b(n)c]cp(n-1) - 2[1 - b(n)c]c\sigma_w^2 + 2b(n)\sigma_n^2 = 0$$

$$b(n) \Big|_{opt} = \frac{a^2cp(n-1) + c\sigma_w^2}{a^2c^2p(n-1) + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2}$$

**Összefoglalva:** A rendszer- és a megfigyelési modell:

$$x(n) = ax(n-1) + w(n) \quad y(n) = cx(n) + n(n)$$

$$b(n) \Big|_{opt} = cp_1(n)[c^2p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1}$$

ahol  $p_1(n) = a^2p(n-1) + \sigma_w^2$

Az optimális rekurzív szűrő:

$$\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ac\hat{x}(n-1)) \quad \hat{y}(n) = ac\hat{x}(n-1), \quad \text{ahol az } E\{e^2(n)\} = p(n) \text{ négyzetes hiba}$$

minimumát a következő iteratív számítással beállított  $b(n)$  súlyozással kapjuk:

$$p_1(n) = a^2p(n-1) + \sigma_w^2 \quad b(n) = cp_1(n)[c^2p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1} \quad p(n) = [1 - b(n)c]p_1(n)$$

**Optimális rekurzív becslő (skalár Kalman prediktor):** A rendszer- és a megfigyelési modell:

$$x(n+1) = ax(n) + w(n) \quad y(n) = cx(n) + n(n) \quad \text{az } E\{e^2(n+1)\} = p(n+1) \text{ négyzetes hiba}$$

Az optimális rekurzív prediktor:

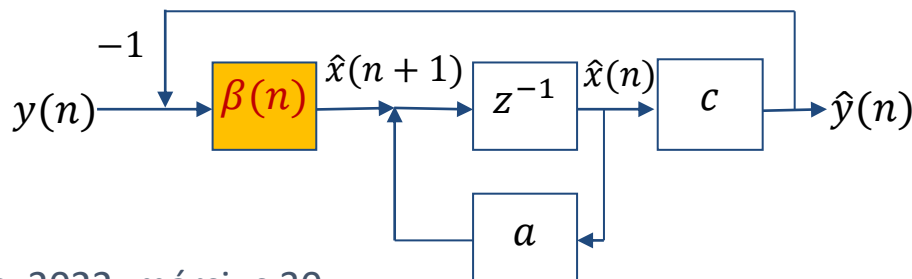
$$\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n)) \quad \hat{y}(n) = c\hat{x}(n)$$

minimumát a következő iteratív számítással beállított  $\beta(n)$  súlyozással kapjuk:

$$\beta(n) = acp(n)[c^2p(n) + \sigma_n^2]^{-1}, \quad p(n+1) = a(a - \beta(n)c)p(n) + \sigma_w^2$$

### 5.3. Optimális rekurzív becslő (vektor Kalman prediktor és szűrő)

Egylépéses  
Kalman  
prediktor



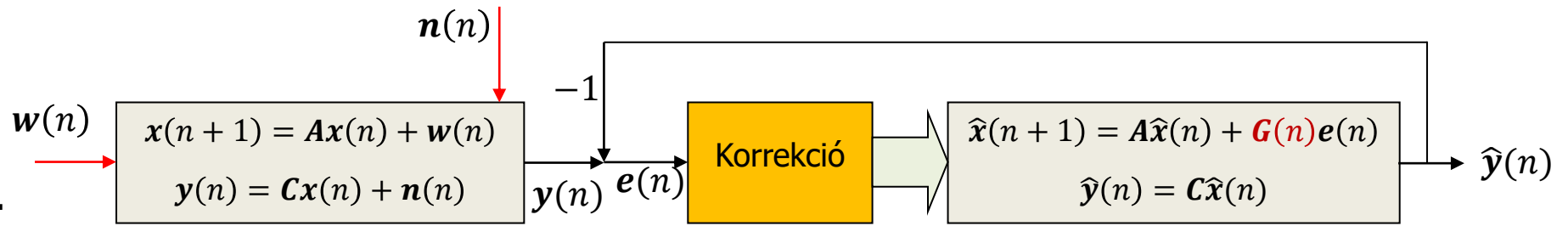
Az alábbiakban az optimális rekurzív becslő vektoros változatát mutatjuk be. A skalár esettel ellentétben a Kalman prediktor összefüggéseivel kezdünk:



$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{w}(n)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{n}(n),$$

$\mathbf{w}(n)$  az ún. rendszer-zaj,  
 $\mathbf{n}(n)$  az ún. megfigyelési-zaj.



Mind a rendszer-, mind a megfigyelési-zaj vektor egymástól és a rendszer állapotától független nulla várható értékű fehér Gauss folyamat.

$$\mathbf{Q}(n) = E\{\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^T(n)\}$$

$$\mathbf{R}(n) = E\{\mathbf{n}(n)\mathbf{n}^T(n)\}$$

Keressük azt a  $\mathbf{G}(n)$  mátrixot (az ún. prediktor erősítést), amely mellett a becslési hiba

$$\mathbf{P}(n+1) = E\{[\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1)][\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1)]^T\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)\}$$

kovariancia mátrixának nyoma minimális.

$$\text{tr}\mathbf{P}(n+1) = E[\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)]$$

$$\frac{\partial \text{tr}\mathbf{P}(n+1)}{\partial \mathbf{G}(n)} = \frac{\partial \text{tr}[(\mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C})\mathbf{P}(n)(\mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C})^T + \mathbf{Q}(n) + \mathbf{G}(n)\mathbf{R}(n)\mathbf{G}^T(n)]}{\partial \mathbf{G}(n)} = \mathbf{0}.$$

$$\frac{\partial \text{tr}\mathbf{P}(n+1)}{\partial \mathbf{G}(n)} = -2[\mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}]\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T + 2\mathbf{G}(n)\mathbf{R}(n) = \mathbf{0}. \quad \mathbf{G}(n) = \mathbf{A}\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}(n)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}(n)]^{-1} \quad \mathbf{F}(n) = \mathbf{A} - \mathbf{G}(n)\mathbf{C}$$

jelöléssel:

A deriválásnál a következő szabályokat alkalmaztuk:  $\frac{\partial \text{tr}[\mathbf{X}\mathbf{W}\mathbf{X}^T]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{X}\mathbf{W}^T + \mathbf{X}\mathbf{W}$ ;  $\frac{\partial \text{tr}[\mathbf{X}\mathbf{W}]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{W}^T$ ;  $\frac{\partial \text{tr}[\mathbf{W}\mathbf{X}^T]}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{W}$ ,

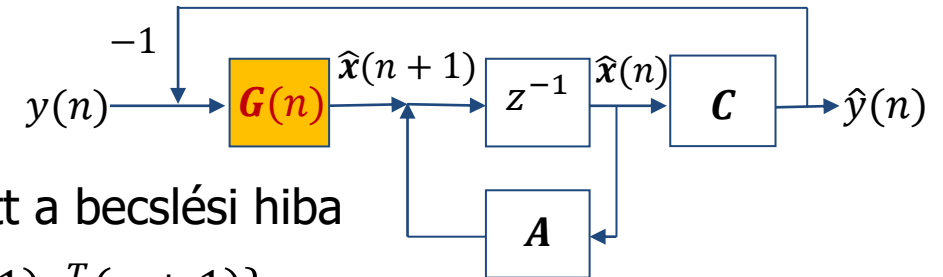
ahol a  $\mathbf{W}$  mátrix az  $\mathbf{X}$  mátrixtól független.

A mérési eljárás, amit a kiegészített modellhez rendelünk egy megfigyelő:

$$\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{G}(n)\mathbf{e}(n) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{G}(n)(\mathbf{y}(n) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(n))$$

Neve: Kalman prediktor

A skalár esetben  $\mathbf{G}(n)$  szerepét  $\beta(n)$  töltötte be.



$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n)\mathbf{n}^T(n)\} = 0$$

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n)\mathbf{w}^T(n)\} = 0,$$

$$E\{\mathbf{w}(n)\mathbf{n}^T(n)\} = 0$$

$$P(n+1) = E\{[F(n)\varepsilon(n) + w(n) - G(n)n(n)][F(n)\varepsilon(n) + w(n) - G(n)n(n)]^T\}$$

$$P(n+1) = F(n)P(n)F^T(n) + Q(n) + G(n)R(n)G^T(n) \quad \text{Létezik számítástechnikailag kedvezőbb forma:}$$

Visszaírva  $F(n) = A - G(n)C$  kifejezését, és első tagját kifejtve:

$$P(n+1) = AP(n)A^T - AP(n)C^T G^T(n) - G(n)CP(n)A^T + \underbrace{G(n)CP(n)C^T G^T(n) + G(n)R(n)G^T(n)} + Q(n)$$

Marad az első, harmadik és hatodik tag, amiből:

$$G(n)[CP(n)C^T + R(n)]G^T(n) = AP(n)C^T G^T(n)$$

↑

$$P(n+1) = [A - G(n)C]P(n)A^T + Q(n)$$

**Összefoglalva:**  $x(n+1) = Ax(n) + w(n)$ ,  $y(n) = Cx(n) + n(n)$ .

$$G(n) = AP(n)C^T [CP(n)C^T + R(n)]^{-1}$$

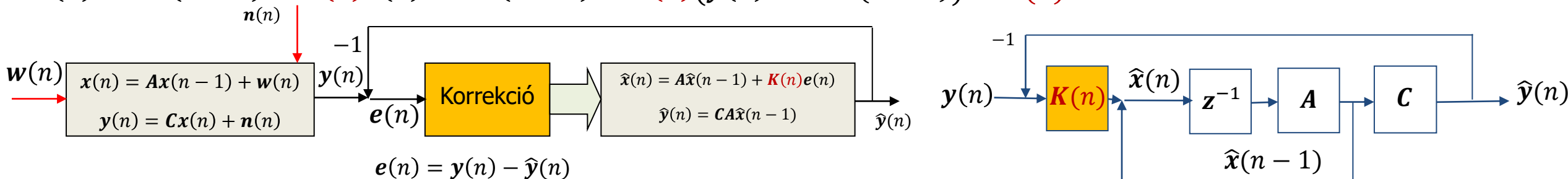
$$\hat{x}(n+1) = A\hat{x}(n) + G(n)[y(n) - C\hat{x}(n)] = A\hat{x}(n) + G(n)e(n)$$

$$G(n) = AP(n)C^T [CP(n)C^T + R(n)]^{-1}$$

$$P(n+1) = [A - G(n)C]P(n)A^T + Q(n)$$

**Optimális rekurzív becselő (vektor Kalman szűrő)**  $x(n) = Ax(n-1) + w(n)$ ,  $y(n) = Cx(n) + n(n)$

$$\hat{x}(n) = A\hat{x}(n-1) + K(n)e(n) = A\hat{x}(n-1) + K(n)(y(n) - CA\hat{x}(n-1)) \quad K(n) \text{ az ún. Kalman erősítés.}$$



$$P(n) = E\{[x(n) - \hat{x}(n)][x(n) - \hat{x}(n)]^T\} = E\{\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)\}$$

$trP(n) = E[\varepsilon^T(n)\varepsilon(n)]$  minimumát keressük  $K(n)$  függvényében.

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)[\mathbf{y}(n) - \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1)] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)\mathbf{e}(n)$$

$$\mathbf{K}(n) = [\mathbf{A}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n)]\mathbf{C}^T [\mathbf{C}[\mathbf{A}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n)]\mathbf{C}^T + \mathbf{R}(n)]^{-1}$$

$$\mathbf{P}(n) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(n)\mathbf{C}][\mathbf{A}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n)]$$

Bevezetve a  $\mathbf{P}_1(n) = [\mathbf{A}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n)]$  jelölést megkapjuk a Kalman szűrő szokásos formájú kifejezéseit:

$$\hat{\mathbf{x}}(n) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)[\mathbf{y}(n) - \mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1)] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(n-1) + \mathbf{K}(n)\mathbf{e}(n)$$

$$\mathbf{P}_1(n) = [\mathbf{A}\mathbf{P}(n-1)\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}(n)]$$

$$\mathbf{K}(n) = \mathbf{P}_1(n)\mathbf{C}^T [\mathbf{C}\mathbf{P}_1(n)\mathbf{C}^T + \mathbf{R}(n)]^{-1}$$

$$\mathbf{P}(n) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(n)\mathbf{C}]\mathbf{P}_1(n)$$

Amennyiben az alkalmazott rendszermodellek rendszerzajt becsatóló mátrixa nem az egységmátrix, hanem egy alkalmas  $\mathbf{B}$  mátrix, akkor a fenti összefüggésekben  $\mathbf{Q}(n)$  helyére  $\mathbf{B}\mathbf{Q}(n)\mathbf{B}^T$  írandó.

Determinisztikus gerjesztés hatása az összefüggések lineáris voltából fakadóan a szuperpozíció elvének alkalmazásával érvényesíthető.

## Összefoglalás + üzenet:

A Kalman szűrő és prediktor állapotegyenlettel jellemzett rendszer állapotváltozójának rekurzív becselője.

Az optimális szűréshez kapcsolódó mondanivaló kifejtésére mindkét struktúra alkalmas.

A kettő közötti különbség lényege az, hogy a Kalman szűrő a megfigyelt értéket a megfigyelés időpontjához rendelhető állapotváltozó érték becslésére használja, míg a Kalman prediktor annak következő időpontbeli értékét becsli/jósolja.

Az eljárások eredményességét ez a különbség nem befolyásolja.

A prediktor esetében "látványosabb" a mérés modelljének beépülése a megfigyelőbe.