

# Méréselmélet

1. fejezet: Bevezetés
2. fejezet: A döntéselmélet alapjai

2022. február 16.

# 1. Bevezetés 1.1. A Méréselmélet c. tárgy célkitűzése

A **Méréselmélet** c. tárgy arra vállalkozik, hogy rendszerezett formában áttekintse azokat a megfontolásokat és módszereket, amelyek alapvetők **mérési adatok** felhasználása és feldolgozása során. (alternatív elnevezés: **Mérés- és adattudomány**)

A mérési adatok a bennünket körülvevő valóság **megfigyeléséből** származnak, annak jobb **megismerését** és **befolyásolását** teszik lehetővé.



## Adatfajták:

- **Nyers adat:** A szenzorok kimenete az ún. nyers adat. (A nyers adatokat legfeljebb átlagolni szoktuk zajcsökkentési célból.)
- **Mért adat:** A nyers adatokat kalibráljuk, és szabványos mértékegységet rendelünk hozzájuk. Ez a folyamat a jelkondicionálás, melynek eredménye a mért adat.
- **Egyeztetett adat:** A mért adatokat további vizsgálatnak vetjük alá: hihetőség-vizsgálat, kiugró adatok kiszűrése, stb.

*Szintaktikus egyeztetés:* a mért érték kontextusának vizsgálata nélkül.

*Szemantikus egyeztetés:* a mért érték kontextusának vizsgálatával.

**Mérési bizonytalanság:** A mért adat **minőségjellemzője**.  
A mért érték körüli tartomány, amelyről feltételezzük, hogy abban a valódi érték valamekkora valószínűséggel fellelhető.

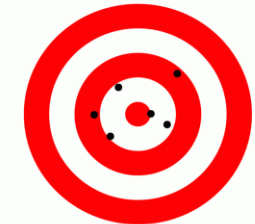
*Számszerűsítése:* a becsült szórással.

„A” típus: szórás a mérésből. „B” típus: szórás az a priori ismeretből.

A jobb (“pontosabb”) megismerésre és befolyásolásra irányuló törekvés valójában egy permanens folyamat, amely az előzetes, és a méréssel megszerzett ismeretek egyre finomabb ötvözése révén éri el célját.



Kicsi bizonytalanság, nagy pontosság



Nagy bizonytalanság, nagy pontosság



Kicsi bizonytalanság, kis pontosság



Nagy bizonytalanság, kis pontosság

**Pontosság?**  
(Accuracy)

**Bizonytalanság?**  
(Precision)

**Pontosság (Accuracy):** A mért értékek mennyire vannak közel a helyes (elméleti) értékhez?

**Bizonytalanság (Precision):** A mért értékek mennyire vannak közel egymáshoz?

**Torzítás (distortion)**

**Zavarás (disturbance)**

**Asszociáció:** Órák szinkronizálása: (a) Az órák **pontossága** érdekében toronyórához/atomórához (ún. **külső szinkronizáció**)  
(b) Az órák **kis bizonytalansága** érdekében egymáshoz (ún. **belső szinkronizáció**)

## 1.2. Mit tanultunk Méréstechnikából?

**Mérés és modellezés**  
modellillesztés

**Mérési hibák** (modellezési, átviteli és műszer-hiba) hibaterjedés (a teljes differenciál alkalmazása)  
mérőeszköz struktúrák (soros, párhuzamos, visszacsatolt)  
jelátalakítók hibái (nullpont, terhelési, hőmérsékleti, kalibrációs, stb. hibák)  
a műszerek pontossága (analóg, digitális; alkatrész és frekvenciafüggés)

Ezen témakörök ismeretét a Méréselmélet tárgy előtanulmányi követelményének tekintjük.

**Elemi mérési módszerek** (differencia, közvetlen és közvetett összehasonlítás, helyettesítő, felcserélési vagy Gauss módszer)

**Mérési sorozat kiértékelése** (a helyes érték legvalószínűbb értéke/becslője, a becslés bizonytalansága; az átlag szórása; stb.)

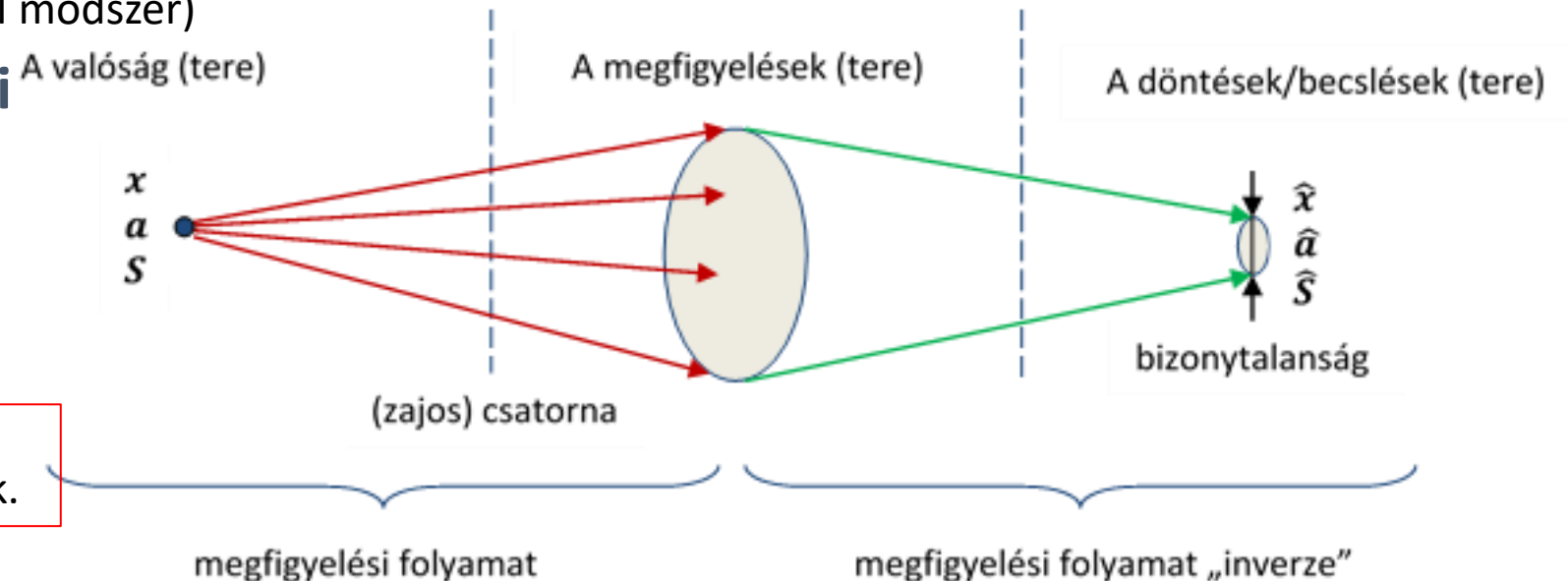
**A mérési bizonytalanság kifejezése** (a GUM módszer)

## 1.3. A mérési eljárás sajátosságai

A mérési eljárás a megismerési folyamat része, amelynek során a rendelkezésünkre álló ismereteinket pontosítjuk, ill. bővítjük.

A mérés során a **valóság** jelenségeit szeretnénk **megragadni**.

Olyan jellemzőkre építünk, amelyek valamilyen értelemben **stabilitást** mutatnak.

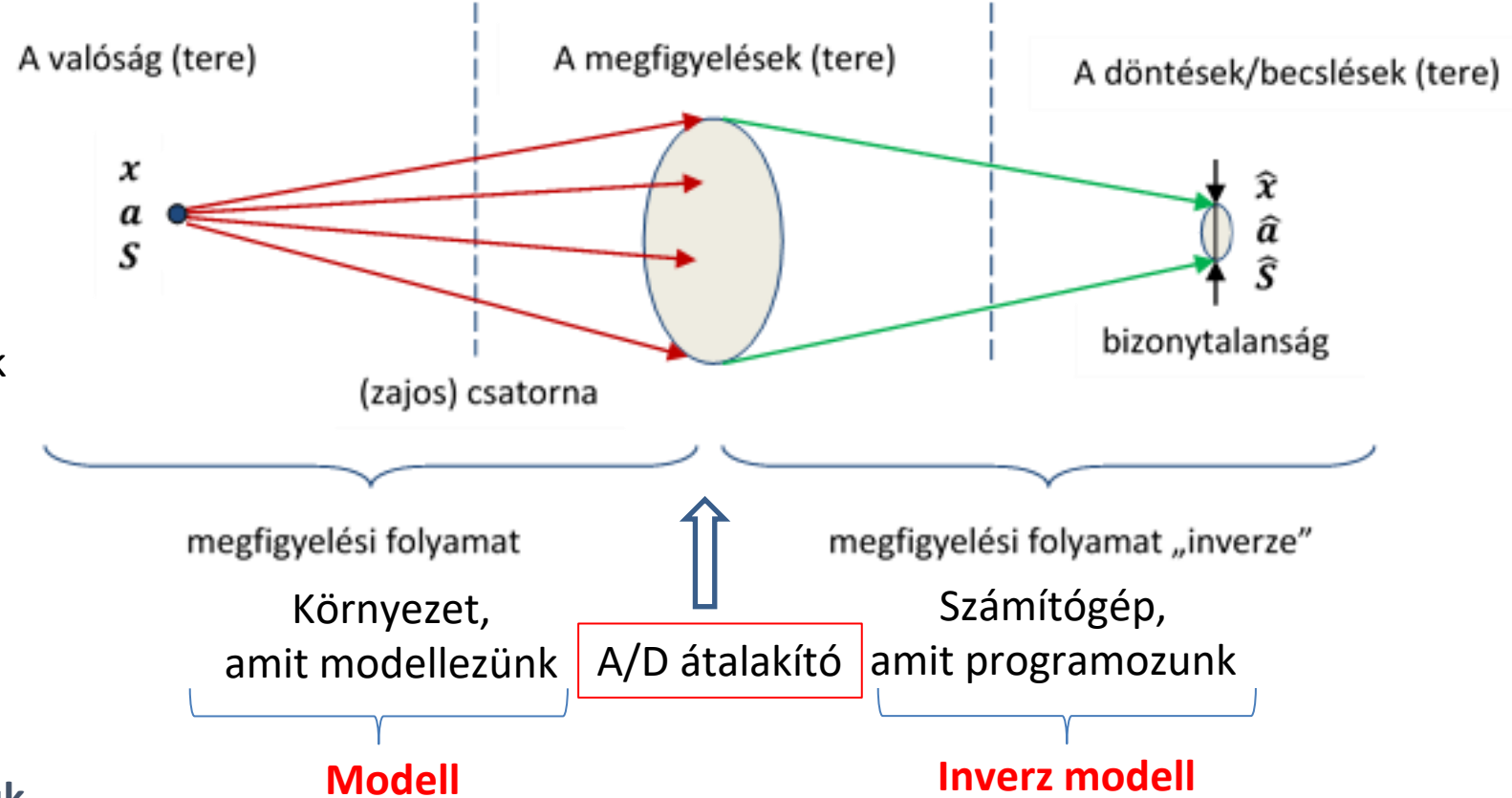


Fontos szerepet kapnak:

- az **állapotváltozók** ( $x$ ), amelyek változásai a kölcsönhatások révén fellépő energia-folyamatokhoz köthetők (feszültség, nyomás, hőmérséklet, sebesség, stb.)
- a **paraméterek** ( $a$ ), amelyek a kölcsönhatások intenzitásviszonyait ragadják meg, és
- a **struktúrák** ( $S$ ), amelyek a rendszer-komponensek kapcsolatait írják le.

A valóság „tere” egy olyan absztrakció, amelyben a vizsgált jellemzők konkrét értékei a tér egy pontjának felelnek meg.

A mérés előtt a pont koordinátáit **nem ismerjük**.  
 A mérések során egy-egy ilyen pont koordinátáinak meghatározására (megmérésére) törekszünk, ami – ismert módon – **csak közelítőleg** lehetséges (a mérés hibával terhelt).  
 További nehézség, hogy a **mérendő mennyiséghez** sok esetben nem férünk közvetlenül hozzá, ezért többnyire csak valamilyen leképezéséből tudunk kiindulni. Ezt a leképezést nevezzük **megfigyelésnek**.



**Modell**

**Inverz modell**

**Megfigyelés determinisztikus csatorna esetén:**

A megfigyelt „valóságot” autonóm rendszerként képzeljük el, és diszkrét modellel írjuk le.

A „valóságot” és a megfigyelést leíró állapot, ill. megfigyelési egyenletek:

$$x(n + 1) = Ax(n),$$

$$\dim[x(n)] = N, \dim[A] = N * N$$

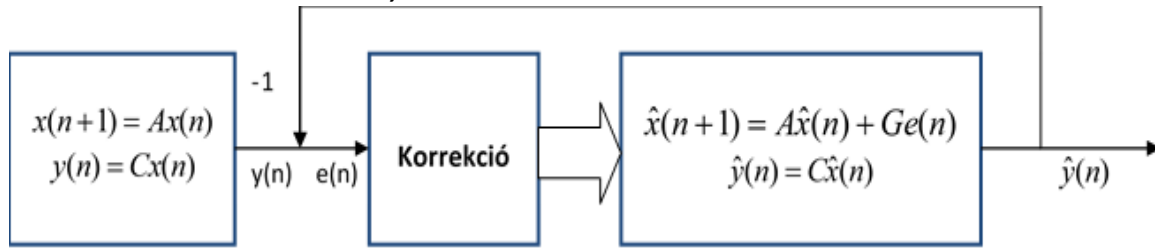
$$y(n) = Cx(n)$$

$$\dim[y(n)] = M, M \leq N, \dim[C] = M * N$$

Tudunk egy ilyen modellt invertálni? **Általában nem!**

Mikor tudunk? **Ha  $C^{-1}$  létezik!**

Ha **nem létezik**  $C^{-1}$ , akkor mást kell csinálni! A megoldás egy **szimulátor**! Ehhez a modellnek **be kell épülnie** a számítógépbe!



Ennek az eszköznek a neve: **megfigyelő**, amely a „valóság” **másolata** igyekszik lenni azáltal, hogy egy **korrekciós/tanuló/adaptáló** mechanizmus eredményeképpen **követi** azt.

Célunk az  $x(n)$  állapotvektor becslése.

Ezt vezéreljük a **megfigyelt értékekkel**! A követés bekövetkeztével a mérés „eredménye”  $\hat{x}(n)$  a megfigyelőből olvasható ki. A megfigyelőben megvalósuló „**másolat**” állapot, ill. megfigyelési egyenletei:

$$\hat{x}(n+1) = A\hat{x}(n) + Ge(n)$$

$G$ : **korrekciós mátrix**;  $\dim[G] = N * M$ ,  $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$

$$\hat{y}(n) = C\hat{x}(n)$$

A  $G$  mátrixot úgy tervezzük meg, hogy  $\hat{x}(n) \rightarrow x(n)$ .

A minimalizálandó állapothiba az állapotegyenletek különbségeként írható fel:

$$\underbrace{x(n+1) - \hat{x}(n+1)}_{\varepsilon(n+1)} = Ax(n) - A\hat{x}(n) - Ge(n) = \underbrace{(A - GC)}_F \underbrace{(x(n) - \hat{x}(n))}_{\varepsilon(n)}$$

$$\varepsilon(n+1) = F\varepsilon(n)$$

$F$  az ún. **hibarendszer** állapotátmenet mátrixa.

A  $G$  mátrix tervezése:  $\varepsilon(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , aminek érdekében  $\varepsilon(n+1) < \varepsilon(n)$ , lehetőleg  $\forall n$ -re.

$F$  csökkenti  $\varepsilon(n)$  hosszát minden lépésben: „**kontraktív**”. Az  $\varepsilon(n)$  hibavektorral kapcsolatos egyenlőtlenség a vektor hosszára (normájára) értelmezendő, skalár esetben pedig a hiba abszolút értékére. **Elvárás**: a hibarendszer a belső energiáját **disszipálja**.

**Esetek**: 1.  $F = A - GC = 0$ . Ebben az esetben  $G = AC^{-1}$ . Ez akkor lehetséges, ha  $C$  négyzetes, azaz a megfigyelés éppen annyi komponensű, mint maga az állapotvektor! Az egyenlet explicit formában megoldható! A konvergencia egyetlen lépéses!

2.  $F^N = (A - GC)^N = 0$ . Ebben az esetben a hibarendszer  $N$  lépésben konvergál:

$$x(N) - \hat{x}(N) = (A - GC)^N (x(0) - \hat{x}(0)) = 0$$

Az  $F^N = 0$  tulajdonságú mátrixok, az ún. **nemderogatórius nilpotens** mátrixok, amelyek sajátja, hogy **valamennyi sajátértékük nulla**.

Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek **véges impulzusválaszúak** (ún. **FIR** rendszerek), hiszen a kezdeti hiba **véges lépésben** eltűnik.

3. Ha  $F^N = (A - GC)^N \neq 0$ , akkor a stabilra tervezett hibarendszer állapotvektorának hossza **exponenciális jelleggel** csökken. Egy ilyen hibarendszer akkor lesz **stabil**, ha összes **sajátértéke** az egységsugarú körön **belül** helyezkedik el.

Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek **végtelen impulzusválaszúak** (ún. **IIR** rendszerek), mert a kezdeti hiba csak **végtelen lépésben** tűnik el.

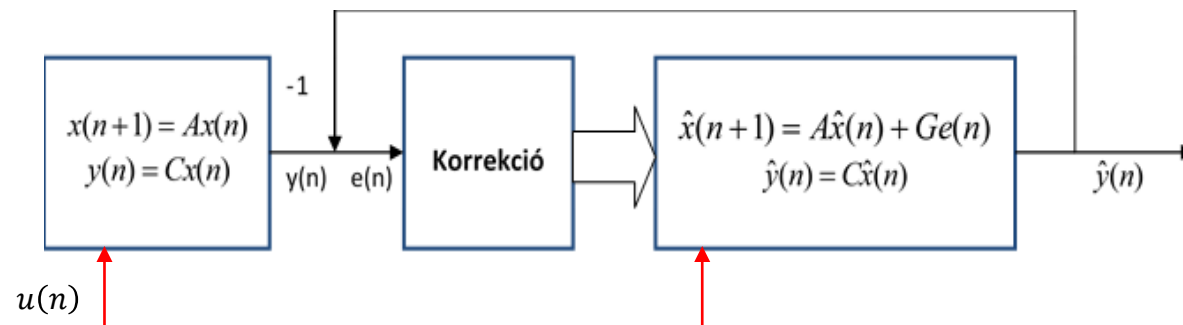
### Megjegyzések:

1. A megfigyelő elrendezés mindkét modellje „gerjeszthető” egy közös gerjesztéssel.

Mivel a modellek lineárisak, a **szuperpozíció** értelmében a megfigyelő konvergenciája változatlanul megvalósul.

2. Az ábra szerinti megfigyelőt **Luenberger megfigyelő**nek nevezzük. Luenberger szerint **majdnem minden rendszer** megfigyelő. A megfigyelő tulajdonság feltétele, hogy a megfigyelő legyen „gyorsabb”, mint a megfigyelt rendszer, különben nem képes követni a változásokat.

3. Egy ellenállás- vagy impedancia-mérő híd ismeretlen elemet tartalmazó hídága a valóság **fizikai modellje**, a kiegyenlítő elemet tartalmazó ága pedig a megfigyelőben felépülő, **beállítható/hangolható modell**.



A hídágak osztópontján megjelenő feszültségek különbsége vezérli a hangolást, és a végén a két feszültség megegyezik, a beállítható elemről leolvasott érték segítségével meghatározható az ismeretlen.

Ez az áramkör, a hangolást végző operátor részvételével megvalósítja a megfigyelőt.

### Példa:

Adott  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ;  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  Hogyan állítsuk be  $G$ -t? Milyen konvergenciát akarunk?

Itt van lehetőségünk egy lépéses konvergenciára, ehhez az  $A = GC$  lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$G = AC^{-1} = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**Példa:** Adott  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ;  $C = [1 \quad 1]$ . Hogyan állítsuk be  $G$ -t?  $G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = ?$  Itt nincs garancia az egy lépéses konvergenciára!  
 $N = 2$ .

$$GC = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} [1 \quad 1] = \begin{bmatrix} g_0 & g_0 \\ g_1 & g_1 \end{bmatrix}, [A - GC] = \begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix}, [A - GC]^2 = 0 \text{ alapján:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - g_0 & -g_0 \\ -g_1 & -1 - g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2g_0 + g_0^2 + g_0g_1 & -g_0 + g_0^2 + g_0 + g_0g_1 \\ -g_1 + g_1^2 + g_1 + g_0g_1 & 1 + 2g_1 + g_1^2 + g_0g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mellékátló kifejezéseit a főátló kifejezéseibe behelyettesítve kapjuk:  $1 - 2g_0 = 0$ ,  $1 + 2g_1 = 0$ , amiből:  $g_0 = 0.5$   
 $g_1 = -0.5$ .  
 Ellenőrzésképpen:  $\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Példa:** Határozzuk meg  $[A - GC]$  sajátértékeit erre az esetre:  $\det[\lambda I - A + GC] = 0$   $\det \begin{bmatrix} \lambda - 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & \lambda + 0.5 \end{bmatrix} =$   
 $= (\lambda - 0.5)(\lambda + 0.5) + 0.25 = \lambda^2 - 0.25 + 0.25 = 0$ . Mindkét sajátérték nulla.

### Megjegyzések:

1. Ez a tulajdonság **általánosan igaz** véges lépésben konvergálni képes rendszerek esetében.
2. Az ilyen rendszerek átviteli függvénye olyan (elfajuló) racionális törtfüggvény, amelynek **valamennyi pólusa az origóban** van:

$$H(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N} = \frac{a_N + a_{N-1}z + a_{N-2}z^2 + \dots + a_1 z^{N-1}}{z^N} \quad \text{Ezek az ún. **véges impulzusválaszú (FIR)** szűrők.}$$

Időtartománybeli megfelelője:  $y(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \dots + a_N x(n-N)$ , ahol a valós idejű **kiszámíthatóság** miatt csak  $x(n)$  korábbi mintái szerepelhetnek!

**Példa:** A sajátértékekre vonatkozó feltétel felhasználható a  $g_0$  és a  $g_1$  értékek meghatározására:

$$\det[\lambda I - A + GC] = 0, \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 + g_0 & g_0 \\ g_1 & \lambda + 1 + g_1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda(g_0 + g_1) + g_0 - g_1 - 1 = \lambda^2 = 0.$$

Ebből:  $g_0 + g_1 = 0$ , ill.  $g_0 - g_1 = 1$ , amiből:  $g_0 = 0.5$  és  $g_1 = -0.5$ . Ugyanarra az eredményre jutottunk!

**Megfigyelés zajos csatorna esetén:** Mivel a zajt véletlennek tételezzük fel, ezért a megfigyelt értékünk valószínűségi változó!

Ennek következtében a megfigyelő állapotváltozója, és ennek következtében a hibarendszer állapotváltozója is az lesz! Ebben az esetben nem lehet  $\varepsilon(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  az elvárásunk! Helyette a hibarendszer állapotváltozóit által hordozott átlagos „teljesítmény/energia” szintet igyekszünk minimalizálni, amikor a  $G$  mátrix legjobb beállítását keressük.

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_k^2(n) \right\} = E[\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n)] = \text{trace } E[\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)] = \text{trace } P(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \min$$

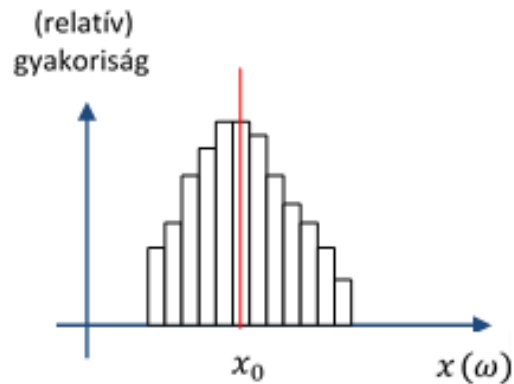
$\varepsilon(n+1) = F\varepsilon(n)$  helyett  $E[\varepsilon(n+1)\varepsilon^T(n+1)] = FE[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)]F^T = FP(n)F^T$  hibarendszer jellemzést használunk.

## 1.4. A zajos csatorna modellezése

Véletlen események leírására valószínűségi változókat, ill. sztochasztikus folyamatokat használunk.

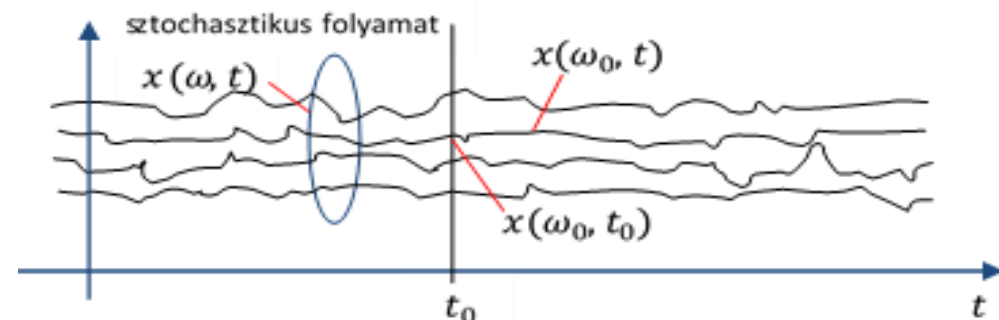
Az  $x(\omega)$  valószínűségi változó egy olyan függvény, amely a valószínűségi eseménytér  $\omega$  eseményeihez valós számokat rendel.

A véletlen jelenségekből származó mintákból hisztogramot készítve megkapjuk a valószínűség sűrűségfüggvény statisztikai jellemzését.



Ha a hisztogram felbontását minden határon túl finomítjuk, és végtelen számú kísérletet végzünk, akkor megkapjuk az  $f(x)$  ún. valószínűség sűrűségfüggvényt.

Az  $x(t, \omega)$  sztochasztikus folyamat egy olyan függvény, amely a valószínűségi eseménytér  $\omega$  eseményeihez valós időfüggvényeket rendel.

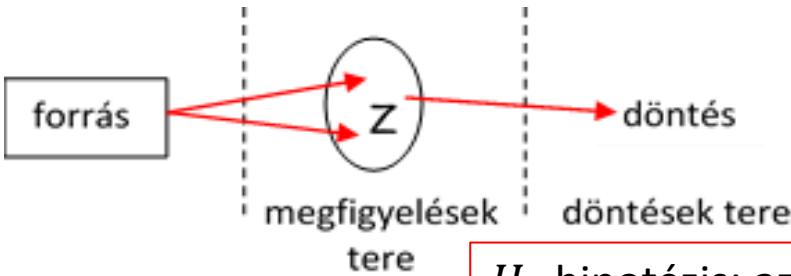


Ezen függvények adott időpontbeli (pl.  $t_0$ ) értékei egy valószínűségi változót reprezentálnak.



## 2. A döntésemélet alapjai

**Példa:** detektálás radarral. Bináris vagy kéthipotézises döntés: eldöntendő a jelenlét vagy a jelen nem lét kérdése.



A csatorna zajos, ugyanarról a jelenségről rendre eltérő értékű megfigyeléseket kapunk. El kell döntenünk, hogy – egy vagy több megfigyelésre alapozva – a két lehetséges hipotézisből melyiket fogadjuk el:

$H_0$  hipotézis: az (ellenséges) objektum nincs jelen.

$H_1$  hipotézis: az (ellenséges) objektum jelen van.

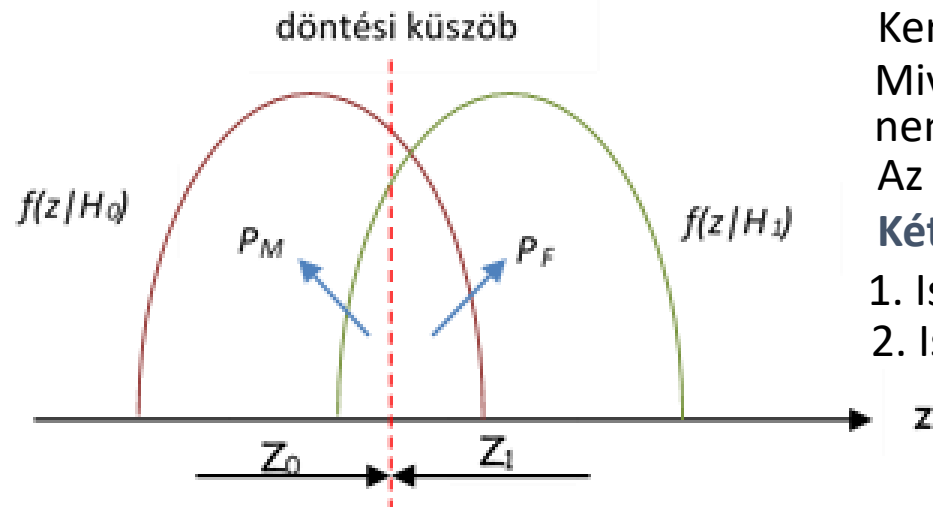
**Lehetséges hibák:** Elfogadjuk  $H_0$ -t, holott  $H_1$  igaz. Ennek valószínűsége  $P_M$  (miss probability).

**Tévesztés valószínűsége**

Elfogadjuk  $H_1$ -t, holott  $H_0$  igaz. Ennek valószínűsége  $P_F$  (false alarm probability).

**Téves riasztás valószínűsége**

A döntéshez előzetesen felvesszük a megfigyelések hisztogramját, és abból közelítőleg előállítjuk az  $f(z|H_0)$  és  $f(z|H_1)$  **feltételes sűrűségfüggvényeket**. Ezeket **csatorna-karakterisztikáknak** is nevezzük.



Keressük a döntési küszöböt valamilyen **optimum kritérium** szerint.

Mivel a sűrűségfüggvények átlapolódnak, ezért a döntési küszöb meghatározása nem triviális.

Az ehhez alkalmazható konkrét stratégia a rendelkezésre álló **információ** függvénye.

**Kéthipotézises Bayes döntés:** Alkalmazási feltételek:

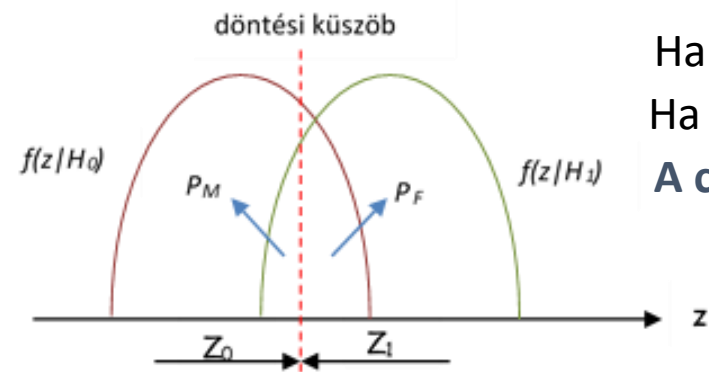
1. Ismerjük az ún. a priori valószínűségeket:  $H_0 \rightarrow P_0$  és  $H_1 \rightarrow P_1$ .
2. Ismerjük a csatornakarakterisztikákat:  $f(z|H_0)$  és  $f(z|H_1)$ .

Definiáljuk a költségeket:

$C_{ij}$  annak a költsége, hogy az  $i$ -edik hipotézist fogadtuk el, holott a  $j$ -edik igaz.

Értelmezzük a bekövetkezési valószínűségeket:

$P(H_i|H_j)$ , ahol az  $i$  index a feltételezett hipotézis, a  $j$  index pedig a bekövetkezett kimenetel azonosítója. ( $i$  és  $j$  most 0 vagy 1.)



Ha a küszöb alatti ( $Z_0$ ) tartományba esik a mért érték, akkor  $H_0$ -t fogadjuk el.

Ha a küszöb feletti ( $Z_1$ ) tartományba esik a mért érték, akkor  $H_1$ -t fogadjuk el.

**A cél:** a küszöb olyan beállítása, amely az átlagos **kockázatot** (risk)/**költséget** (cost) minimalizálja:

$$R = \underbrace{C_{00}P_0P(H_0|H_0)} + \underbrace{C_{10}P_0P(H_1|H_0)} + \underbrace{C_{01}P_1P(H_0|H_1)} + \underbrace{C_{11}P_1P(H_1|H_1)}$$

Annak költsége, hogy  $H_0$  következett be, és azt is fogadtuk el.

Annak költsége, hogy  $H_0$  következett be, és  $H_1$ -t fogadtuk el.

Annak költsége, hogy  $H_1$  következett be, és  $H_0$ -t fogadtuk el.

Annak költsége, hogy  $H_1$  következett be, és azt is fogadtuk el.

A kifejezés minimumát a döntési küszöb értékének alkalmas megválasztásával érjük el.

A bekövetkezési valószínűségek számítása:

$$P(H_i | H_j) = \int_{Z_i} f(z | H_j) dz,$$

$$R = C_{00}P_0 \int_{Z_0} f(z|H_0) dz + C_{10}P_0 \int_{Z_1} f(z|H_0) dz + C_{01}P_1 \int_{Z_0} f(z|H_1) dz + C_{11}P_1 \int_{Z_1} f(z|H_1) dz.$$

Mivel  $\int_{Z_1} f(z|H_0) dz = 1 - \int_{Z_0} f(z|H_0) dz$ , és  $\int_{Z_1} f(z|H_1) dz = 1 - \int_{Z_0} f(z|H_1) dz$ .

$$R = C_{10}P_0 + C_{11}P_1 + \underbrace{P_0(C_{00} - C_{10}) \int_{Z_0} f(z|H_0) dz}_{< 0} + \underbrace{P_1(C_{01} - C_{11}) \int_{Z_0} f(z|H_1) dz}_{> 0}$$

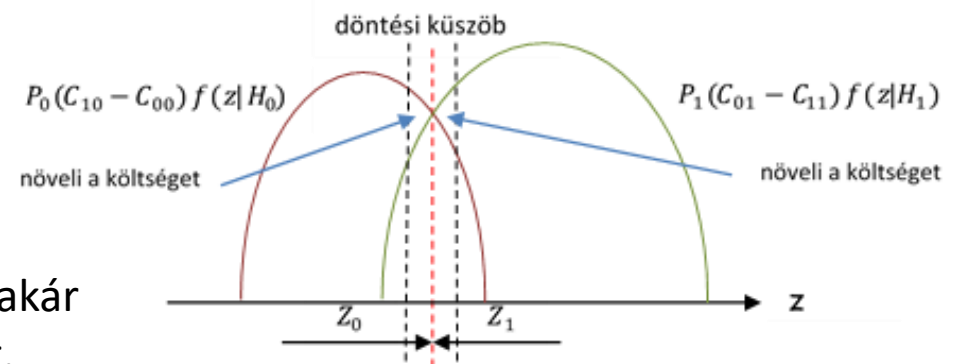
Tegyük fel, hogy  $C_{10} > C_{00}$ , és  $C_{01} > C_{11}$

Tekintsük a döntési küszöb helyét az összefüggésbeli egyváltozós integrál függvény független változójának!

Az átlagos kockázat minimuma a  $z$  változó azon értékénél (a keresett döntési küszöbértéknél) van, amelyre

$$P_0(C_{10} - C_{00})f(z|H_0) = P_1(C_{01} - C_{11})f(z|H_1).$$

A kiadódó döntési küszöbértéktől akár jobbra, akár balra eltérve az átlagos kockázat növekedni fog.



$$P_0(C_{10} - C_{00})f(z|H_0) = P_1(C_{01} - C_{11})f(z|H_1)$$



$$\frac{f(z|H_1)}{f(z|H_0)} = \frac{P_0(C_{10} - C_{00})}{P_1(C_{01} - C_{11})} = \eta; \Lambda(z)$$

**valószínűség**  
ún. „likelihood” arány  
függvény

Ha az aktuálisan megfigyelt értéket behelyettesítjük a „likelihood” arány függvénybe, és ha  $\Lambda(z) > \eta$ , akkor a döntés  $H_1$ ,  
ha  $\Lambda(z) < \eta$ , akkor a döntés  $H_0$ .

$$\Lambda(z) \begin{matrix} > \eta \\ < \eta \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix}$$

Ez az ún. Bayes döntési szabály vagy likelihood arány teszt.

**Megjegyzések:**

1. Ha a költségeket úgy választjuk meg, hogy  $\eta = \frac{P_0}{P_1}$  legyen, akkor a szabály  $P_1 f(z|H_1) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} P_0 f(z|H_0)$  alakban írható.

**utólagos**

Ez megegyezik a  $P(H_1|z) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} P(H_0|z)$  feltétellel, vagyis ilyenkor a döntést az *a posteriori* valószínűségek alapján hozhatjuk meg.

$P(H_0|z)$  annak a valószínűsége, hogy  $z$ -t mérve  $H_0$ ,  $P(H_1|z)$  pedig annak a valószínűsége, hogy  $z$ -t mérve  $H_1$  következett be.

Ezt a speciális esetet maximum a posteriori (MAP) döntésnek nevezzük.

2. Szokás a  $\lambda(z) = \ln \Lambda(z) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \ln \eta = \gamma$ , ún. log-likelihood arányt is használni.

**valószínűség**

**1. Példa:**

Konstans jel detektálása zajos csatornán keresztül: jelen van-e a jel a megfigyelésekben vagy nincsen?

Tegyük fel, hogy a megfigyelések független, Gauss eloszlású valószínűségi változók nulla várható értékkel, és  $\sigma_n^2$  varianciával.

A  **$H_0$  hipotézis** az, hogy a megfigyelés  $z_k = n_k$ , azaz **a jel nincsen jelen**, csak a zaj aktuális mintáját kapjuk.

A  **$H_1$  hipotézis** az, hogy a megfigyelés  $z_k = a + n_k$ , azaz **a jel jelen van**, a jel és a zaj aktuális mintájának összegét figyeltük meg.

$k = 0, 1, \dots, N - 1$ , azaz  $N$  mintát veszünk, és ezek együttes figyelembevételével döntünk. **Ekkor  $z$  egy  $N$  dimenziós vektor!**

A döntés során az együttes feltételes sűrűségfüggvényeket fogjuk használni, hiszen egyszerre veszünk figyelembe  $N$  mintát!

Minden mintáról tudjuk, hogy Gauss eloszlású. Mivel a minták függetlenek, az együttes feltételes sűrűség függvény az egyes feltételes sűrűségfüggvények szorzata lesz!

Egyetlen megfigyelés esetén a feltételes sűrűségfüggvények:

$$f(z|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}, \quad f(z|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} e^{-\frac{(z_k-a)^2}{2\sigma_n^2}}.$$

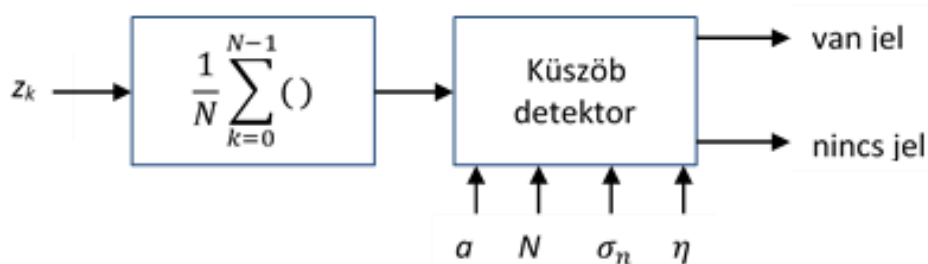
$$\Lambda(z) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{f(z_k|H_1)}{f(z_k|H_0)} = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{e^{-\frac{(z_k-a)^2}{2\sigma_n^2}}}{e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \eta,$$

$$\ln \Lambda(z) = \lambda(z) = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(z_k - a)^2}{2\sigma_n^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k^2}{2\sigma_n^2} = \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} -(z_k^2 - 2az_k + a^2 - z_k^2) = \frac{a}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k - \frac{Na^2}{2\sigma_n^2} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \ln \eta = \gamma$$

Átrendezve:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{\sigma_n^2}{Na} \ln \eta + \frac{a}{2}$$

előfeldolgozás      küszöbérték



A döntőkészülék blokkvázlata

Ha  $\eta = 1$ , akkor  $\ln \eta = 0$

ekkor

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{a}{2}$$

## 2. Példa: Változó amplitúdójú jel detektálása zajos csatornán keresztül: jelen van-e a jel a megfigyelésekben vagy nincsen?

Tegyük fel, hogy a megfigyelések független, Gauss eloszlású valószínűségi változók nulla várható értékkel, és  $\sigma_n^2$  varianciával.

A  **$H_0$  hipotézis** az, hogy a megfigyelés  $z_k = n_k$ , azaz **a jel nincsen jelen**, csak a zaj aktuális mintáját kapjuk.

A  **$H_1$  hipotézis** az, hogy a megfigyelés  $z_k = a_k + n_k$ , azaz **a jel jelen van**, a jel és a zaj aktuális mintájának összegét figyeltük meg.

$k = 0, 1, \dots, N - 1$ , azaz  $N$  mintát veszünk, és ezek együttes figyelembevételével döntünk. Ekkor  $z$  egy  $N$  dimenziós vektor!

A döntés során az együttes feltételes sűrűségfüggvényeket fogjuk használni, hiszen egyszerre veszünk figyelembe  $N$  mintát!

Minden mintáról tudjuk, hogy Gauss eloszlású.

$$f(z|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}, \quad f(z|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} e^{-\frac{(z_k-a_k)^2}{2\sigma_n^2}}.$$

A megfigyelések függetlensége miatt a  $N$  megfigyelés együttes sűrűségfüggvénye az egyedi megfigyelések sűrűségfüggvényeinek szorzata.

$$\Lambda(z) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{f(z_k | H_1)}{f(z_k | H_0)} = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{e^{-\frac{(z_k - a_k)^2}{2\sigma_n^2}}}{e^{-\frac{z_k^2}{2\sigma_n^2}}} \begin{matrix} H_1 > \eta \\ H_0 < \eta \end{matrix}$$

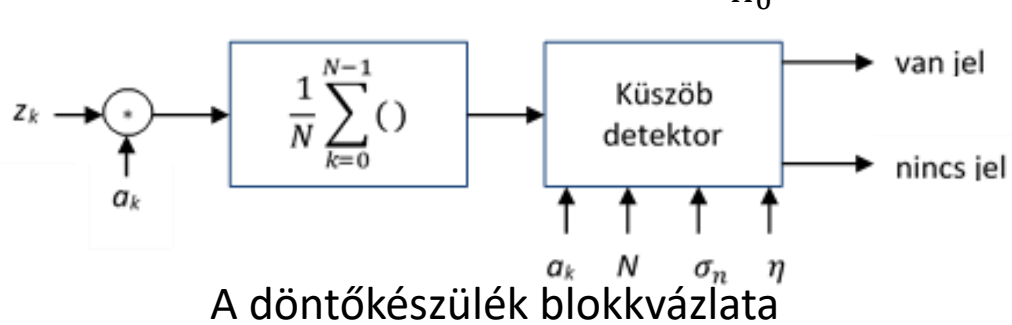
$$\ln \Lambda(z) = \lambda(z) = - \sum_{k=0}^{N-1} \left[ -\frac{(z_k - a_k)^2}{2\sigma_n^2} + \frac{z_k^2}{2\sigma_n^2} \right] = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k a_k - \frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2 \begin{matrix} H_1 > \ln \eta \\ H_0 < \ln \eta \end{matrix} = \gamma$$

Átrendezve:  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k z_k \begin{matrix} H_1 > \frac{\sigma_n^2}{N} \ln \eta \\ H_0 < \frac{\sigma_n^2}{N} \ln \eta \end{matrix} + \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k^2$

előfeldolgozás

„illesztett szűrő”

küszöbérték



Ha a minták egyformák, akkor az előző eredményt kapjuk.