

Méréselmélet

7. fejezet: Modellalapú jelfeldolgozás (folyt.)

2022. május 11.

Az ún. ortogonális struktúrák általában:

Az ortogonális struktúrákat úgy definiáljuk, hogy az $\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$ formájú rendszerleírásban, a $T^T T = I$, azaz $T^T = T^{-1}$, azaz T ortogonális mátrix. Képezzük a fenti összefüggés mindkét oldalának önmagával vett skalár-szorzatát!

$$[x^T(n+1) \quad y(n)] \begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = [x^T(n) \quad u(n)] T^T T \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$$

Ha feltételezzük, hogy a bemenet nulla, azaz $u(n) = 0$, akkor

Kifejtve: $\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) + y^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) + u^2(n)$

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) = -y^2(n) \quad \text{alakban írható.}$$

2) „Műszertechnika” szerepe

Itt $x(n)$ a rendszer állapotvektorát, $y(n)$ és $u(n)$ a skalár kimenet és a skalár bemenet diszkrét időfüggvényét jelöli.

Eszerint, ha van nem nulla kimenőjel, akkor az állapotváltozók által hordozott belső energiának csökkennie kell!

Ezt a tulajdonságot kiegészítve az **abszolút-érték csonkítás** stratégiájával garantálható, hogy a paraméterektől egyébként függetlenül a magára hagyott rendszer belső energiáját disszipálni fogja, és így ún. **határciklus oszcillációk** nem alakulnak ki.

Ez a feltétel teljesíthető a rezonátoros struktúra esetére!

$$A = \text{diag}\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \rangle, \quad G' = [z_0 \sqrt{r_0} \quad z_1 \sqrt{r_1} \quad \dots \quad z_{N-1} \sqrt{r_{N-1}}] \quad G = AC^T$$

$$\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - GC & G \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$$

$C = [\sqrt{r_0} \quad \sqrt{r_1} \quad \dots \quad \sqrt{r_{N-1}}]$ jelölésekkel, ahol a felső vessző most transzponálást, a „T” pedig a transzponált konjugáltat jelöl:

$$T^T T = I = \begin{bmatrix} (A - GC)^T & C^T \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - GC & G \\ C & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (A - GC)^T (A - GC) + C^T C = I = \underbrace{A^T A}_I - \underbrace{A^T GC}_{C^T C} - \underbrace{C^T G^T A}_{C^T C} + \underbrace{C^T G^T GC}_{C^T C C^T C} + C^T C = I,$$

$$(A - GC)^T G = 0 = A^T G - C^T G^T G = \underbrace{A^T AC^T}_I - C^T \underbrace{CA^T AC^T}_I = C^T - C^T C C^T$$

$$G^T G = I = CA^T AC^T = C C^T$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1$$

A feltétel akkor teljesül, ha: Ennek részletei hamarosan! $\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1$

Most csak annyit, hogy az RDFT esetén:

$$r_m = \frac{1}{N}, \forall m\text{-re.}$$

Az r_m értékek csatornánként megoszthatók a bemenet és a kimenet között (lásd később)!

Megjegyzés: Ha az állapotváltozók által hordozott energiát súlyozzuk a $\mathbf{Q} = \text{diag}\langle r_0^{-1}, r_1^{-1}, \dots, r_{N-1}^{-1} \rangle$ mátrixszal, akkor

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) = -y^2(n) \quad \text{helyett} \quad \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{r_k} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{r_k} x_k^2(n) = -y^2(n) \quad \text{adódik.} \quad r_m > 0, \forall m\text{-re.}$$

Ilyen energiaviszonyokat akkor kapunk, ha: $\mathbf{A} = \text{diag}\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \rangle$, $\mathbf{C} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$, $\mathbf{G}' = [z_0 r_0 \quad z_1 r_1 \quad \dots \quad z_{N-1} r_{N-1}]$,
Ezzel viszont az eredeti formában bevezetett rezonátoros struktúrához jutunk!

A korlátosság feltétele rezonátor alapú megfigyelőknél:

Kedvezők azok a számítási eljárások, amelyek passzívnek tekinthetők.

Ezek tipikusan - a struktúrájukból adódóan - a paramétereik értékétől függetlenül korlátosak, nem növelik a jelszintet egy bizonyos érték fölé. A rezonátoros struktúra esetében a visszacsatolt rendszer összegzett kimenetére vonatkozó átviteli függvény

$$H_P(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{a + jb}{1 + a + jb}$$

alakú, ahol $a = a(\omega)$ és $b = b(\omega)$ $a^2 + b^2 \leq (1 + a)^2 + b^2$, $0 \leq 1 + 2a$, $a \geq -0.5$
valós értékek, a hurokerősítés valós és képzetes részei.

Annak feltétele, hogy például $|H_P(z)| \leq 1$ legyen : $a \geq -0.5$.

Mivel
$$a = \text{Re} \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}$$

ill.
$$2a = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{g_k z^{-1}}{1 - z_k z^{-1}} + \frac{g_k^* z}{1 - z_k^* z} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{g_k z^{-1} - g_k z_k^{-1} + g_k^* z - g_k^* z_n}{2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{-\text{Re} \left[\frac{g_k}{z_k} \right] (2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z) + j \text{Im} \left[\frac{g_k}{z_k} \right] (z_k z^{-1} - z_k^{-1} z)}{2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z} \geq -1,$$

az $a \geq -0.5$ feltétel z értékétől függetlenül teljesül, ha

$$\text{Re} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{g_k}{z_k} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} r_k \leq 1$$

$$\text{Im} \left[\frac{g_k}{z_k} \right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Megjegyzések: 1. A rekurzív DFT esetén $r_k = \frac{1}{N} \quad \forall k\text{-ra.}$

2. Az exponenciálisan átlagoló DFT esetén $r_k = \frac{\alpha}{N} \quad \forall k\text{-ra, } 0 < \alpha \leq 1.$

3. Stabil szűrők esetén mindig létezik olyan rezonátor-pólus készlet, amelyre $\sum_{k=0}^{N-1} r_k \leq 1$ teljesül.

4. Stabil szűrők esetén az r_m , $m = 0, 1, \dots, N-1$, pozitív szám.

5. A tulajdonságot **strukturális passzivitásnak** nevezzük, a paramétereiktől független, egyedül $\sum_{k=0}^{N-1} r_k \leq 1$ teljesítendő!

A fenti tulajdonságokat megőrző tervezés menete:

(1) A megvalósítandó pólusok ismeretében a rezonátor-pólus pozíciók meghatározása úgy, hogy minden r_m érték valós legyen. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$H_P(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)}{1 + \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)} = 1 - \frac{\prod_{k=0}^{N-1} (1 - z_k z^{-1})}{D(z)}, \quad \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) = \frac{D(z)}{\prod_{k=0}^{N-1} (1 - z_k z^{-1})} - 1$$

ahol $D(z)$ a megvalósítandó nevező polinom, továbbá

$$2a = \left[\frac{D(z)}{\prod_{k=0}^{N-1} (1 - z_k z^{-1})} + \frac{D^*(z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N-1} (1 - z_k^{-1} z)} - 2 \right] \geq -1, \text{ ahol } a = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} \geq -0.5$$

amiből – mivel a rezonátor pólus pozícióknak megfelelő frekvenciákon az egyenlőség érvényesül – a rezonátor pólus pozíciók meghatározhatók:

$$\prod_{k=0}^{N-1} (1 - z_k z^{-1}) = \left[1 \pm \frac{z^{-(N-M)} D^+(z)}{D(z)} \right] D(z).$$

$$\pm: \prod_{k=0}^{N-1} z_k = \pm 1$$

Két készlet van!

Itt $D^+(z)$ egy olyan M -edfokú ($M \leq N$) polinom, amelynek gyökei a $D(z)$ polinom gyökeinek egységsugarú körre vonatkozó tükörképei, azaz $D^+(z)/D(z)$ egy mindentáteresztő típusú hálózatfüggvény.

(2) Az r_m értékek kiszámítása:

$$r_m = \frac{\prod_{k=0}^{M-1} (1 - p_k z_m^{-1})}{\prod_{k=0, k \neq m}^{N-1} (1 - z_k z_m^{-1})}$$

A $H_P(z)$ átviteli függvény megvalósításához annak szabad paramétereivel azonos számú paramétert állítunk be: a konjugált komplex átviteli függvény pólusok $\{p_k\}$ összesen M független adatot, továbbá a rezonátor pólus pozíciók $\{z_k\}$ és az $\{r_m\}$ értékek összesen N független adatot rögzítenek.

Példa:

$$H(z) = z^{-1} \frac{1 - a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}, \quad H_0(z) = r_0 \frac{z_0 z^{-1}}{1 - z_0 z^{-1}}, \quad H_1(z) = r_1 \frac{z_1 z^{-1}}{1 - z_1 z^{-1}}$$

$$N = 2, M = 1 \quad D(z) = 1 - b_1 z^{-1}, \quad D^+(z) = -b_1 + z^{-1},$$

$$\prod_{k=0}^1 (1 - z_k z^{-1}) = \left[1 \pm \frac{z^{-1}(-b_1 + z^{-1})}{1 - b_1 z^{-1}} \right] (1 - b_1 z^{-1})$$

Két eset:

$$\frac{z^{-1}(-b_1 + z^{-1})}{1 - b_1 z^{-1}} = -1 \rightarrow z^2 - 2b_1 z + 1 = 0, \quad z_{0,1} = b_1 \pm j \sqrt{1 - b_1^2} \quad r_0 = r_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{z^{-1}(-b_1 + z^{-1})}{1 - b_1 z^{-1}} = 1 \rightarrow z^2 = 1, \quad z_{0,1} = \pm 1 \quad r_0 = \frac{1 - b_1}{2} \quad r_1 = \frac{1 + b_1}{2}$$

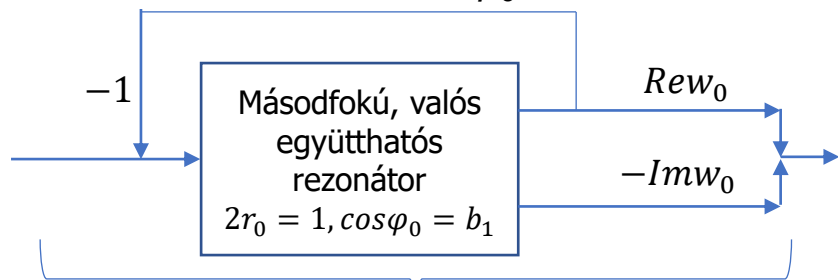
A tervezés eredménye:

1. eset: $z_{0,1} = b_1 \pm j\sqrt{1 - b_1^2} = \cos\varphi_0 \pm j\sin\varphi_0$

$z_0 z_1 = 1$ $r_0 = r_1 = \frac{1}{2}$ $r_0 + r_1 = 1$

$H(z) = w_0 T_0(z) + w_1 T_1(z)$

$w_0 = H(z_0) = a_1 + j\frac{a_1 b_1 - 1}{\sin\varphi_0}$ $w_1 = H(z_1) = w_0^*$



$H(z) = z^{-1} \frac{1 - a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$

Ha nincs egységnyi késleltetés, azaz:

$H(z) = \frac{1 - a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$

Ekkor csak a második részt tervezzük:

$N = 1, M = 1$ $D(z) = 1 - b_1 z^{-1}$, $D^+(z) = -b_1 + z^{-1}$,

Akkor ezt fel kell bontanunk az alábbi módon:

$H(z) = 1 + \frac{(b_1 - a_1)z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$

$(1 - z_0 z^{-1}) = \left[1 \pm \frac{-b_1 + z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}} \right] (1 - b_1 z^{-1})$

Két eset:

$z_0 = -1, \quad r_0 = 1 + b_1, \quad w_0 = -\frac{b_1 - a_1}{1 + b_1}$
 $z_0 = 1, \quad r_0 = 1 - b_1, \quad w_0 = \frac{b_1 - a_1}{1 - b_1}$

Melyiket használjuk?

Ha $b_1 < 0$, akkor az elsőt: $r_0 < 1$

felüláteresztő jellegű hatás

Ha $b_1 > 0$, akkor a másodikat: $r_0 < 1$

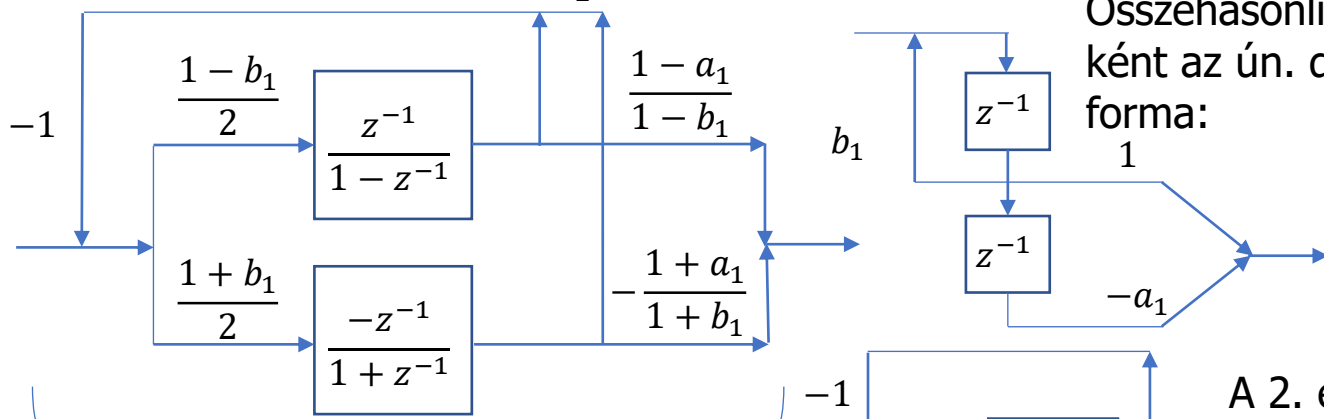
aluláteresztő jellegű hatás

2. eset:

$z_{0,1} = \pm 1$ $z_0 z_1 = -1$ $r_0 = \frac{1 - b_1}{2}$ $r_1 = \frac{1 + b_1}{2}$

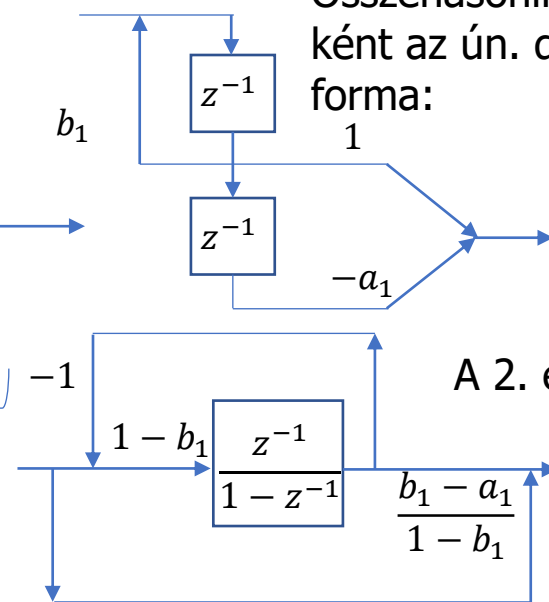
$r_0 + r_1 = 1$ $H(z) = w_0 T_0(z) + w_1 T_1(z)$

$w_0 = H(z_0) = \frac{1 - a_1}{1 - b_1}$ $w_1 = H(z_1) = -\frac{1 + a_1}{1 + b_1}$



$H(z) = z^{-1} \frac{1 - a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$

Összehasonlításként az ún. direkt forma:



A 2. eset:

Jelfeldolgozó algoritmusok „energiaviszonyai”

A visszacsatolást is tartalmazó jelfeldolgozó algoritmusok kapcsán stabilitási problémák merülhetnek fel. Ezek a másodlagos nemlineáris hatások (túlcsordulások és a kvantálások) következtében okozhatnak működésbeli problémákat. Jól kezelhetőek azok a módszerek, amelyeket ún. **veszteségmentes** rendszerekre dolgoztak ki.

Ezek azzal jellemezhetőek, hogy az általuk abszorbeált teljesítmény (egyetlen időlépés alatt felvett energia) – skálár bemenet és kimenet feltételezésével – $u^2(n) - y^2(n)$. Ha a bemenet nulla, az állapotvektor a kimeneten

$y(n+k) = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(n)$, $k = 0, 1, \dots$ jel-szekvenciát produkál, amely $\mathbf{x}^T(n) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^{T^k} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{A}^k \right] \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{P} \mathbf{x}(n)$ energiát képvisel.

Itt \mathbf{P} egy, a struktúrától függő pozitív definit mátrix.

(Ortogonalis rendszerek esetén $\mathbf{P} = \mathbf{I}$.) Veszteségmentes rendszerek esetében a rendszer energia növekménye:

$$\mathbf{x}^T(n+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n) = u^2(n) - y^2(n).$$

Behelyettesítve az állapot- és a megfigyelési egyenleteket:

$$[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{A}^T + u^T(n)\mathbf{B}^T]\mathbf{P}[\mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}u(n)] - \mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n) = u^T(n)u(n) - [\mathbf{x}^T(n)\mathbf{C}^T + u^T\mathbf{D}^T][\mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}u(n)].$$

Ahonnan:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{D}^T\mathbf{D} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{B} + \mathbf{C}^T\mathbf{D} = \mathbf{0},$$

a veszteségmentes rendszerek mátrixainak kapcsolata.

Ebből a \mathbf{P} mátrix meghatározható!

Példa: A direkt rezonátort csatoljuk úgy vissza, hogy az mindentáteresztő (azaz veszteségmentes) rendszert valósítson meg. Ehhez $r_m = 0.5$ érték tartozik, és a visszacsatolt rendszer átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{z^{-1}\cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - z^{-1}\cos\varphi_m} = z^{-1} \frac{\cos\varphi_m - z^{-1}}{1 - z^{-1}\cos\varphi_m}.$$

A hozzátartozó időtartománybeli állapotváltozós leírás $\beta = \cos\varphi_m$ jelöléssel:

$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(n), \quad y(n) = \begin{bmatrix} \beta & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}$$

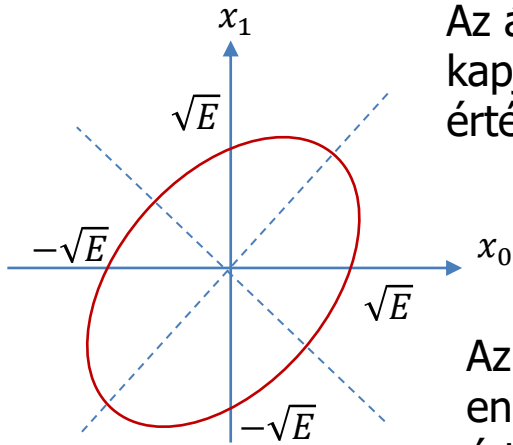
A \mathbf{P} mátrixot

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ formában keresve $\begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}$$

A tárolt energia kifejezése: $E = \mathbf{x}^T(n)\mathbf{P}\mathbf{x}(n) = x_0^2(n) - 2\beta x_0(n)x_1(n) + x_1^2(n)$

Ez az összefüggés $x_0(n)$ és $x_1(n)$ függvényében egy **ellipszist** ír le, melyet $\beta = 0.5$ feltételezésével a következő ábra illusztrál:



Az ábra koordináta-tengely metszékeinek értékét úgy kapjuk, hogy a fenti összefüggésbe $x_1 = 0$, ill. $x_0 = 0$ értéket helyettesítünk.

Az ellipszis tengelyeivel történő metszéspontok $x_0 = x_1$, ill. $x_0 = -x_1$ behelyettesítéssel származtathatók, koordinátájuk: $\pm\sqrt{E}$, ill. $\pm\sqrt{E}/3$.

Az ábra alapján belátható, hogy - adott energiaállapot mellett - az állapotváltozók aktuális értékeit abszolút-érték csonkítással kvantálva a rendszer magasabb energiájú pontba juthat.

Példa: Az ortogonális rezonátort csatoljuk úgy vissza, hogy az mindentáteresztő (azaz veszteségmentes) rendszert valósítson meg.

Ehhez $r_m = 0.5$ érték tartozik, és a visszacsatolt rendszer átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{z^{-1}\cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - z^{-1}\cos\varphi_m} = z^{-1} \frac{\cos\varphi_m - z^{-1}}{1 - z^{-1}\cos\varphi_m}$$

A hozzátartozó időtartománybeli állapotváltozós leírás $\alpha = \sin\varphi_m$, $\beta = \cos\varphi_m$ jelöléssel:

$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} u(n), \quad y(n) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}$$

A \mathbf{P} mátrixot $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ formában keressük. $(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \mathbf{P})$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$$

A kijelölt műveletek elvégzése után: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 p - 2\alpha\beta q + \beta^2 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$, ahonnan $p = 1$, $q = 0$ és $r = 1$, tehát

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Ezzel $E = x_0^2(n) + x_1^2(n)$ vagyis az azonos energiájú állapotok mértani helye **kör**. Ekkor minden esetben az abszolút-érték csonkítás kisebb energiájú pozícióba visz.

Példa: A hullámdigitális rezonátort csatoljuk úgy vissza, hogy az mindentáteresztő (azaz veszteségmentes) rendszert valósítson meg. Ehhez $r_m = 0.5$ érték tartozik, és a visszacsatolt rendszer átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{z^{-1}\cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - z^{-1}\cos\varphi_m} = z^{-1} \frac{\cos\varphi_m - z^{-1}}{1 - z^{-1}\cos\varphi_m}$$

A hozzátartozó időtartománybeli állapotváltozós leírás $\alpha = \cos\varphi_m + 1$, $\beta = \cos\varphi_m - 1$ jelöléssel:

$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(n), \quad y(n) = [\alpha \quad \beta] \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}$$

A \mathbf{P} mátrixot $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ formában keressük. $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{P})$

$$0.25 \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} \quad 0.25(p\beta^2 + 2q\alpha\beta + r\alpha^2) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q + \alpha^2 & Q + \alpha\beta \\ Q + \alpha\beta & Q + \beta^2 \end{bmatrix}$$

ahol $Q = 0.25(p\beta^2 + 2q\alpha\beta + r\alpha^2)$. Ebbe behelyettesítve p, q, r értékét: $Q = 0.25((Q + \alpha^2)\beta^2 + 2(Q + \alpha\beta)\alpha\beta + (Q + \beta^2)\alpha^2)$,

ahonnan $Q = \sin^2\varphi_m = -\alpha\beta$, $p = 2\alpha = 2(1 + \cos\varphi_m)$, $q = 0$, $r = -2\beta = 2(1 - \cos\varphi_m)$, amivel $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2(1 + \cos\varphi_m) & 0 \\ 0 & 2(1 - \cos\varphi_m) \end{bmatrix}$

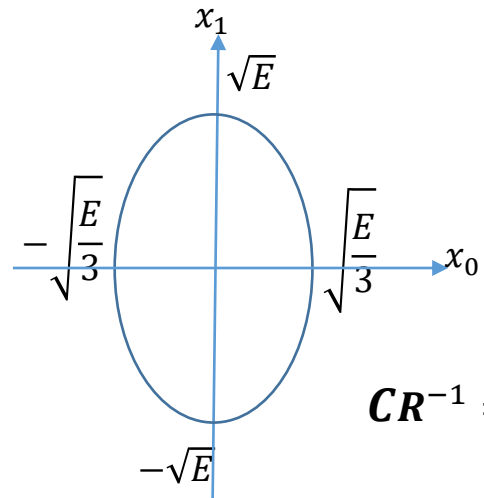
Ezzel: $E = 2(1 + \cos\varphi_m)x_0^2(n) + 2(1 - \cos\varphi_m)x_1^2(n)$

Mivel \mathbf{P} diagonál mátrix, ezért az azonos energiát képviselő állapotok mértani helye álló vagy fekvő **ellipszis**, aminek köszönhetően az abszolútérték csonkítás kisebb energiájú pozícióba visz.

Megjegyzés: Minden veszteségmentes átviteli függvénynek van ortogonális realizációja.

Ha $\mathbf{P} = \mathbf{R} * \mathbf{R}$, ahol \mathbf{R} a \mathbf{P} mátrix szimmetrikus négyzetgyöke, akkor az \mathbf{R} mátrixszal megvalósított hasonlósági transzformáció: $\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}$, $\mathbf{R}\mathbf{B}$, $\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}$, \mathbf{D} ortogonális rendszert eredményez.

A visszacsatolt hullámdigitális rezonátor esetében: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{-2\beta} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{-2\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \\ \sqrt{-\frac{\beta}{2}} \end{bmatrix}$



$$\mathbf{C}\mathbf{R}^{-1} = [\alpha \quad \beta] \frac{1}{2\sqrt{-\alpha\beta}} \begin{bmatrix} \sqrt{-2\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} & \sqrt{\frac{-\beta}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{-2\beta} \end{bmatrix} 0.5 \begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{-\alpha\beta}} \begin{bmatrix} \sqrt{-2\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\alpha} \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} \beta & \sqrt{-\alpha\beta} \\ \sqrt{-\alpha\beta} & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5\beta & 0.5\sqrt{-\alpha\beta} & \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \\ 0.5\sqrt{-\alpha\beta} & 0.5\alpha & \sqrt{-\frac{\beta}{2}} \\ \sqrt{\frac{\alpha}{2}} & \sqrt{-\frac{\beta}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5\beta & 0.5\sqrt{-\alpha\beta} & \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \\ 0.5\sqrt{-\alpha\beta} & 0.5\alpha & \sqrt{-\frac{\beta}{2}} \\ \sqrt{\frac{\alpha}{2}} & \sqrt{-\frac{\beta}{2}} & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

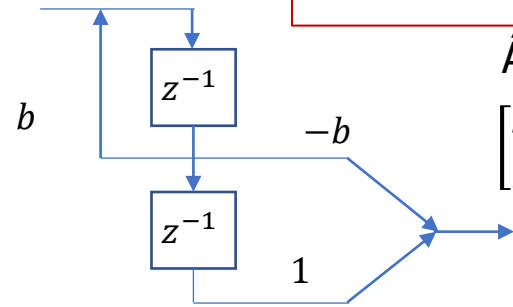
Példa „mindentáteresztő” hálózatok/számítások energiaviszonyaira:

Megjegyzés: Az elmélet kiterjeszhető veszteséges hálózatokra és számításokra nagyobb nehézségek nélkül. 😊

Vizsgáljuk a

$$H(z) = z^{-1} \frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}}$$

átviteli függvényű rendszer energiaviszonyait! A kinyerhető energia:
Zérus $1/b$ -ben, pólus b -ben.



Állapotváltozós leírás:

$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}$$

ahol $A = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$k = 0:$ $C^T C = \begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2 & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix}$

$AA = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, \quad A^k = \begin{bmatrix} b^k & 0 \\ b^{k-1} & 0 \end{bmatrix},$

$$CA^k = \begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^k & 0 \\ b^{k-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{k-1}(1-b^2) & 0 \end{bmatrix}, \quad [CA^k]^T CA^k = \begin{bmatrix} b^{k-1}(1-b^2) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^{k-1}(1-b^2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{2(k-1)}(1-b^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = C^T C + \sum_{k=1}^{\infty} [CA^k]^T CA^k = \begin{bmatrix} b^2 + (1-b^2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} b^{2(k-1)} & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mert } \sum_{k=1}^{\infty} b^{2(k-1)} = \frac{1}{1-b^2}, \quad \text{amivel}$$

$b^2 + (1-b^2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} b^{2(k-1)} = 1$. Ugyanezt megkapjuk az $A^T P A + C^T C = P$ egyenletből is, mert keresve P -t $P = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ alakban

$$\begin{bmatrix} b & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^2 & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}, \quad \text{elvégezve a mátrix szorzásokat } \begin{bmatrix} pb^2 + 2qb + r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^2 & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$$

$q = -b, r = 1, pb^2 - 2b^2 + 1 + b^2 = p$, ahonnan $p = 1$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix}$$

A tárolt/kinyerhető energia kifejezése: $E = \mathbf{x}^T(n) P \mathbf{x}(n) = x_0^2(n) - 2bx_0(n)x_1(n) + x_1^2(n)$

Méréselmélet 11. előadás, 2022. május 11. Ilyen energiaviszonyokat kaptunk a direkt formájú rezonátor visszacsatolásával!

A $H(z) = z^{-1} \frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}}$

átviteli függvény **strukturálisan passzív** realizációja:

$H(z) = z^{-1} \frac{1 - a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$

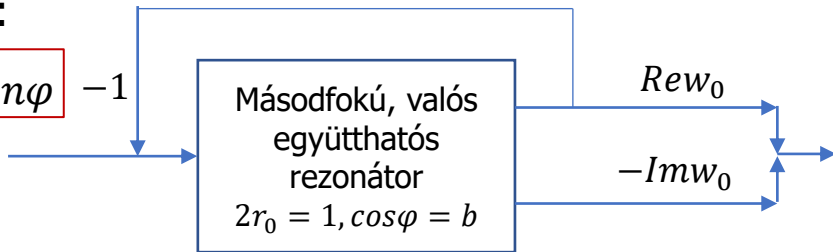
átviteli függvény.

Az ott meghatározott adatokkal:

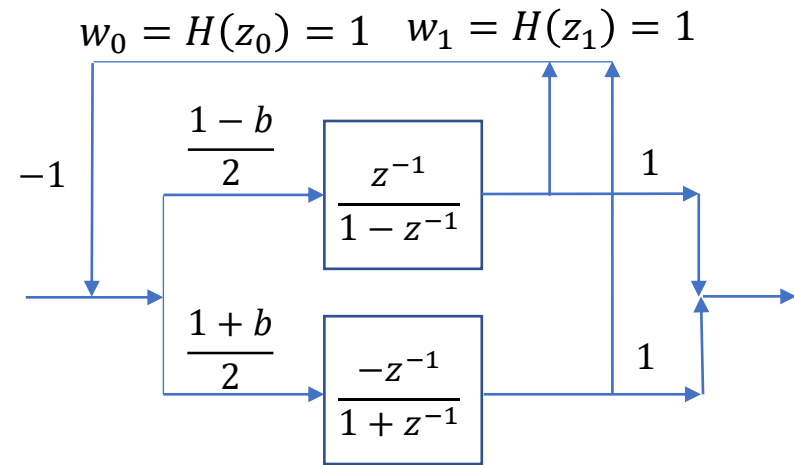
$z_{0,1} = b \pm j\sqrt{1 - b^2} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi$

$r_0 = r_1 = \frac{1}{2}$

$w_0 = H(z_0)$
 $w_1 = H(z_1)$



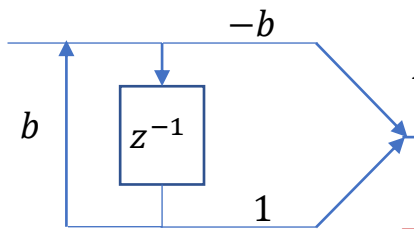
$z_{0,1} = \pm 1$ $r_0 = \frac{1 - b}{2}$ $r_1 = \frac{1 + b}{2}$



Ha nincs késleltetés, azaz:

akkor $x(n + 1) = bx(n) + u(n)$,

azaz $A = b$



$H(z) = \frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}}$

$y(n) = x(n) - bx(n + 1) = (1 - b^2)x(n) - bu(n)$

azaz $C = (1 - b^2)$

A kinyerhető energia: $E = x(n)(1 - b^2)^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (b^2)^k \right] x(n) = (1 - b^2)x^2(n)$, azaz $P = 1 - b^2$.

Ez kielégíti az $A^T P A + C^T C = P$ alakú egyenletet, mert $b(1 - b^2)b + (1 - b^2)^2 = 1 - b^2$, ahol osztva $(1 - b^2)$ -tel $b^2 + 1 - b^2 = 1$.

$R = \sqrt{1 - b^2}$ tényezővel hasonlósági transzformációt végezve:

$A' = b, C' = \sqrt{1 - b^2}$ ekkor $P = 1$, hiszen $A^T A + C^T C = I$ teljesül: $b^2 + 1 - b^2 = 1$

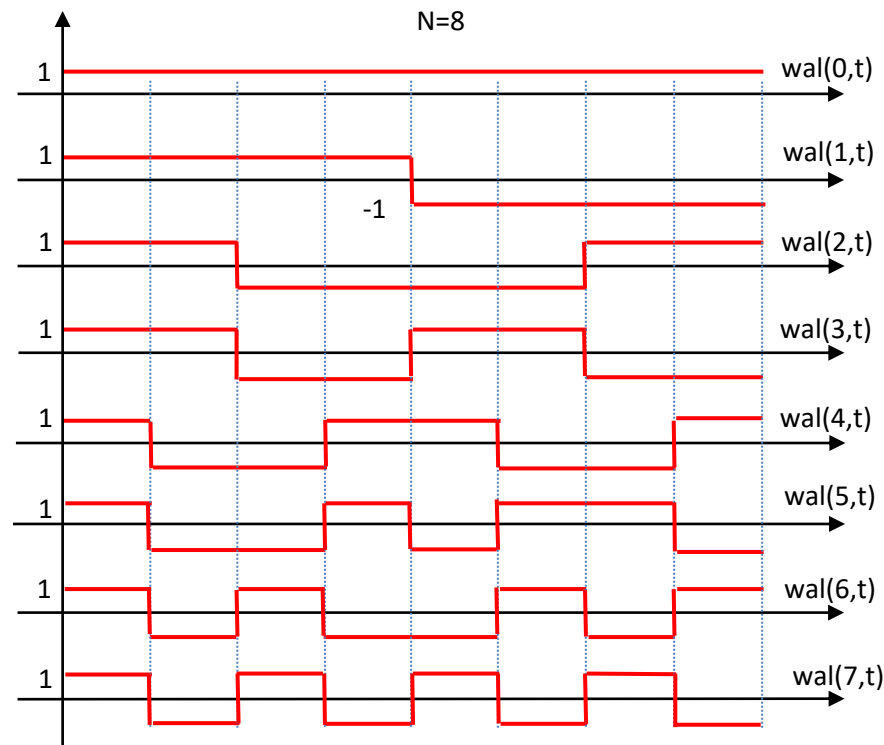
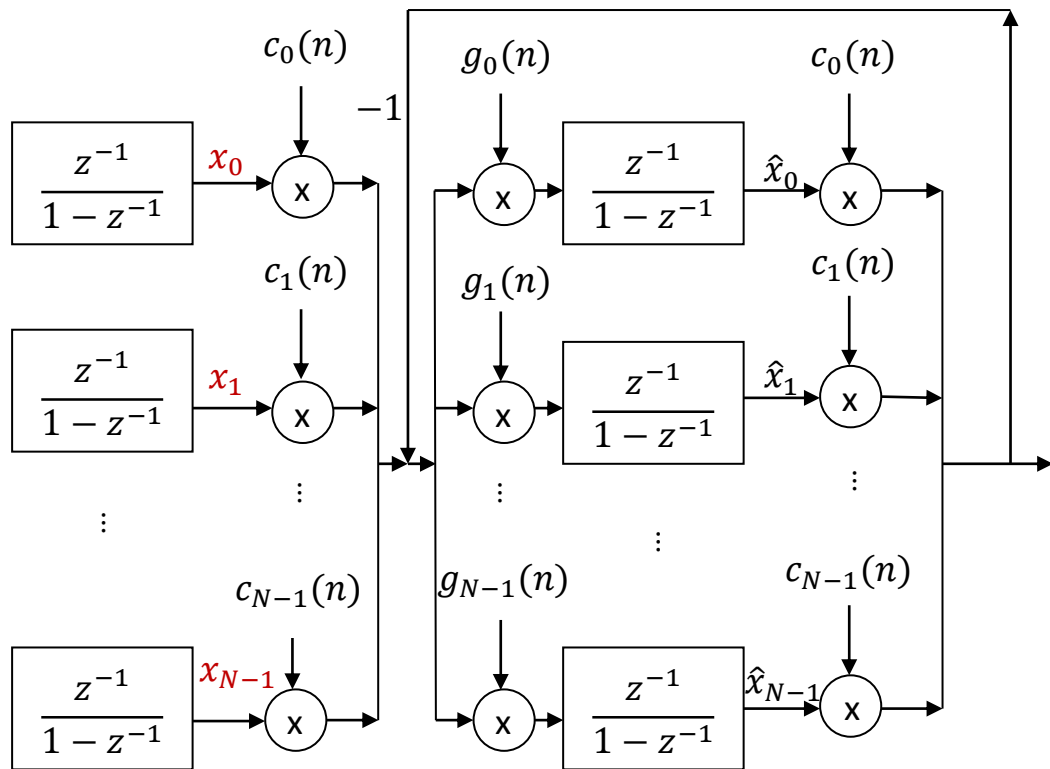
A strukturálisan passzív realizációhoz

$H(z) = \frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}} = -b + \frac{(1 - b^2)z^{-1}}{1 - bz^{-1}}$

$z_0 = +1$ $r_0 = 1 - b$ $w_0 = 1 + b$
 $z'_0 = -1$ $r'_0 = 1 + b$ $w'_0 = -1 + b$

A két eset: azt használjuk, amelyekre $r_0 < 1$.

Hatékonyan implementálható ortogonális transzformáció: Walsh transzformáció



~ DC komponens

~ szinusz alap

~ koszinusz alap

~ szinusz (2*fr.)

~ koszinusz (2*fr.)

$\frac{1}{N}$ kell a hurokban!

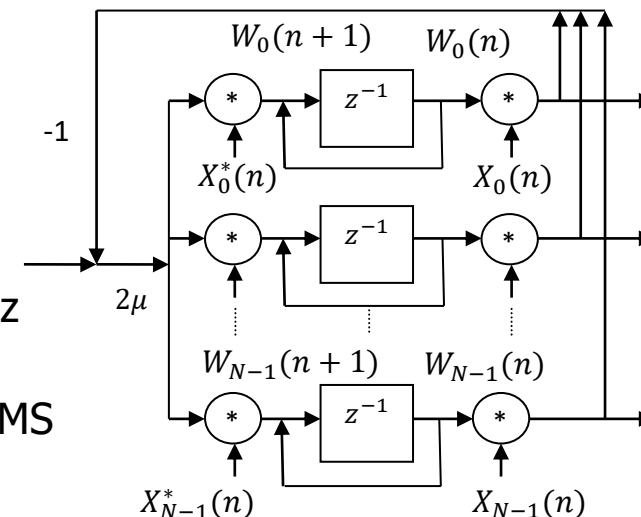
A rekurzív DFT és az LMS eljárás kapcsolata

Az LMS eljárás lerajzolható ugyanolyan formában, mint a rekurzív jelreprezentáció. Az LMS algoritmus összefüggése komplex regressziós vektor esetén:

$$W(n+1) = W(n) + 2\mu X^*(n)e(n),$$

ahol a bázisvektor az $X(n)$ vektornak, a reciprok bázis vektor pedig az $2\mu X^*(n)$ vektornak, azaz a komplex konjugált konstans szorosának felel meg.

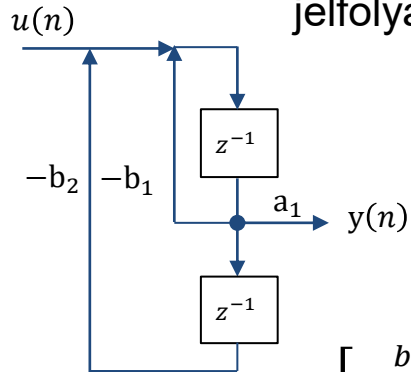
Ha $X(n)$ a harmonikus komplex exponenciálisokat tartalmazza, és $2\mu = 1/N$, akkor az LMS eljárás éppen a rekurzív DFT-t írja le.



Méréselmélet 2. zárthelyi 2020.05.19.

1. A $H(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$ átviteli függvénnyel jellemezhető rendszer állapotváltozóit kellene megbecsülnünk. Vélelmezzük, hogy a rendszer belső struktúrája a direkt számítási struktúrának felel meg. Bemenetén multiszinuszos gerjesztést alkalmazunk. A paramétereket ismertnek tételezzük fel: $a_1 = 0.5$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0.5$. Tervezzon olyan megfigyelőt (azaz számítsa ki a megfigyelő ismeretlen paramétereit), amely képes a vizsgált rendszer állapotváltozóinak a lehető legrövidebb időn belüli meghatározására (max. 4 pont)! (A megfigyelési zaj elhanyagolható!) Ellenőrizze, hogy teljesül-e a megfigyelő sajátértékeire vonatkozó feltétel (max. 2 pont)! Hogyan függenek a megfigyelő ismeretlen paramétere a b_2 értékétől (max. 1 pont)?

Megoldás: A direkt struktúra jelfolyamgráfja:



Az állapotváltozós leírás:
$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(n) = \mathbf{A}x(n) + \mathbf{B}u(n)$$

$$y(n) = [a_1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} = \mathbf{C}x(n)$$

A véges lépésben történő konvergencia feltétele, hogy $(\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})^2 = 0$ teljesüljön.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0.5 \quad 0] \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

Egyenértékű feltétel, hogy a megfigyelő összes sajátértéke nulla.

$$\text{Ebből } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -b_1 - a_1 g_0 & -b_2 \\ 1 - a_1 g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 - a_1 g_0 & -b_2 \\ 1 - a_1 g_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b_1 + a_1 g_0)^2 - b_2(1 - a_1 g_1) & b_2(b_1 + a_1 g_0) \\ -(b_1 + a_1 g_0)(1 - a_1 g_1) & -b_2(1 - a_1 g_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 0.5 g_0 & -0.5 \\ 1 - 0.5 g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 0.5 g_0 & -0.5 \\ 1 - 0.5 g_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - 0.5 g_0)^2 - 0.5 + 0.25 g_1 & -0.5 + 0.25 g_0 \\ (1 - 0.5 g_0)(1 - 0.5 g_1) & -0.5 + 0.25 g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. A megfigyelő összes sajátértéke nulla feltétel:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + b_1 + a_1 g_0 & b_2 \\ -1 + a_1 g_1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + b_1 + a_1 g_0) + b_2(1 - a_1 g_1) = \lambda^2 + \lambda(b_1 + a_1 g_0) + b_2(1 - a_1 g_1) = 0$$

$$\text{Ebből is } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A \mathbf{G} korrekciós tényezők nem függenek a b_2 paramétertől!

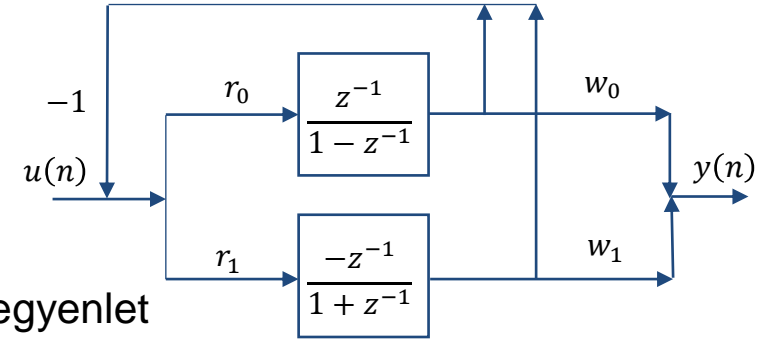
2. Valósítsa meg az 1. feladatban szereplő átviteli függvényt rezonátoros struktúrával, $z_0 = 1$ és $z_1 = -1$ pozíciójú rezonátorok feltételezésével! A megvalósítás a blokkvázlat felrajzolását és a struktúra paramétereinek levezetését jelenti (max. 4 pont). Teljesül-e a választott megoldásnál a strukturális passzivitás feltétele (max. 1 pont)?

Megoldás:

$$H(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{\frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} w_0 - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}} w_1}{1 + \frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{(1 + z^{-1})r_0 z^{-1} w_0 - (1 - z^{-1})r_1 z^{-1} w_1}{1 + (1 + z^{-1})r_0 z^{-1} - (1 - z^{-1})r_1 z^{-1}} = \frac{(r_0 w_0 - r_1 w_1)z^{-1} + (r_0 w_0 + r_1 w_1)z^{-2}}{1 + (r_0 - r_1)z^{-1} + (r_0 + r_1 - 1)z^{-2}}$$

$$r_0 - r_1 = b_1, r_0 + r_1 - 1 = b_2, \text{ ahonnan } r_0 = \frac{1 - b_1 + b_2}{2} = 0.25, \quad r_1 = \frac{1 + b_1 + b_2}{2} = 1.25,$$

$$w_0 = \frac{a_1}{1 + b_1 + b_2} = 1, w_1 = \frac{-a_1}{1 - b_1 + b_2} = -0.2,$$



A strukturális passzivitás feltétele nem teljesül, mert $r_0 + r_1 = 1 + b_2 > 1$. **Megjegyzés:**

A strukturális passzivitás teljesüléséhez az $1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = -(b_2 + b_1 z^{-1} + z^{-2})$ egyenlet

gyökei jelölik ki a rezonátor pólusokat: $z^{-2} + \frac{2b_1}{1+b_2} z^{-1} + 1 = z^{-2} + 2z^{-1} \cos\varphi_0 + 1 = 0, z_{0,1} = \cos\varphi_0 \pm j \sin\varphi_0$, ahol $\cos\varphi_0 = \frac{b_1}{1+b_2}$

A nevezőpolinomok egyeztetésével ($r_0 = r_1$)

$$1 + 2z^{-1} \cos\varphi_0 + z^{-2} + 2r_0(z^{-1} \cos\varphi_0 - z^{-2}) = 1 + 2(1 - r_0)z^{-1} \frac{b_1}{1 + b_2} + (1 - 2r_0)z^{-2} = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}, \text{ ahonnan } 1 - 2r_0 = b_2,$$

$$\text{vagyis } r_0 = \frac{1 - b_2}{2} = r_1, \quad r_0 + r_1 = 1 - b_2 < 1.$$

3. Mutassa be a skalár Kalman szűrés modelljét és zajparamétereit! Vezesse le a szűrő optimális $a(n)$ és $b(n)$ paramétereit meghatározó ortogonalitási egyenleteket (max. 4 pont), majd $b(n)$ kifejezését annak ismeretében, hogy $a(n) = a[1 - b(n)c]$ (max. 4 pont)!

Megoldás: $x(n) = ax(n-1) + w(n), y(n) = cx(n) + n(n)$

ahol $w(n)$ az ún. rendszerzaj, amelyre $E[w(n)] = 0, E[w(j)w(k)] = \sigma_w^2$, ha $j = k$, egyébként 0,

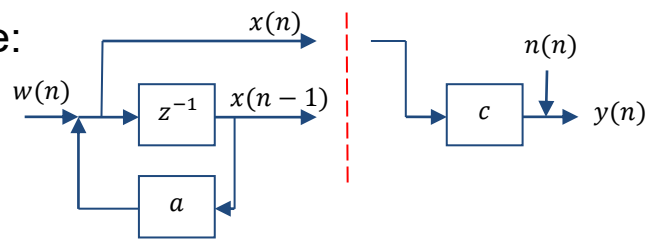
$$E[w(n)x(n-1)] = 0$$

$$E[n(n)\hat{x}(n-1)] = 0$$

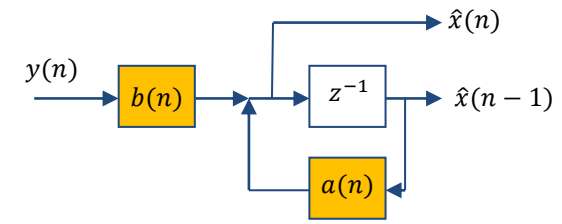
$$E[w(n)n(n)] = 0 \quad \forall n$$

$n(n)$ az ún. megfigyelési zaj, amelyre $E[n(n)] = 0, E[n(j)n(k)] = \sigma_n^2$, ha $j = k$, egyébként 0.

A megfigyelés lineáris modellje:



A rekurzív becslő:



$e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$ jelöléssel keressük $a(n)$ és $b(n)$ olyan értékét, amely minimalizálja a $E[e^2(n)] = E[(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n))^2]$ négyzetes hibát:

$$\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial a(n)} = -2E[e(n)\hat{x}(n-1)] = 0, \quad \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial b(n)} = -2E[e(n)y(n)] = 0$$

Mivel $a(n) = a[1 - b(n)c]$, ezért

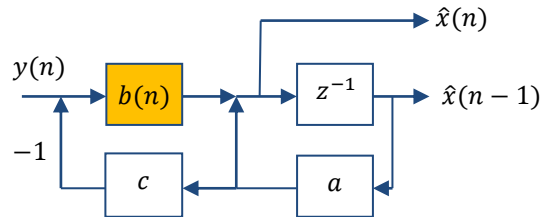
$b(n)$ meghatározása:

Kiindulva az $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$, $E\{e^2(n)\} = E\{[x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n)]^2\}$

összefüggésből, és $x(n) = ax(n-1) + w(n)$ valamint

$\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ca\hat{x}(n-1))$ behelyettesítésével

$$E\{e^2(n)\} = E\{[ae(n-1) + w(n) - b(n)(ace(n-1) + cw(n) + n(n))]\}^2 = E\{[a[1 - b(n)c]e(n-1) + [1 - b(n)c]w(n) - b(n)n(n)]^2\}$$



Mivel a négyzetre emelésnél a keresztszorzatok várható értékei nullák, mert a zajfolyamatok függetlenek egymástól, illetve az állapotváltozók korábbi értékeitől: $E\{e(n-1)w(n)\} = 0, E\{e(n-1)n(n)\} = 0, E\{w(n)n(n)\} = 0$, ezért a négyzetre emelést követően csak a négyzetes tagok maradnak meg:

$$E\{e^2(n)\} = a^2[1 - b(n)c]^2 E\{e^2(n-1)\} + [1 - b(n)c]^2 E\{w^2(n)\} + b^2(n)E\{n^2(n)\}. \text{ Bevezetve a}$$

$$E\{e^2(n)\} = p(n); E\{w^2(n)\} = \sigma_w^2; E\{n^2(n)\} = \sigma_n^2 \text{ jelöléseket, keressük } p(n) \text{ minimumát } b(n) \text{ függvényében:}$$

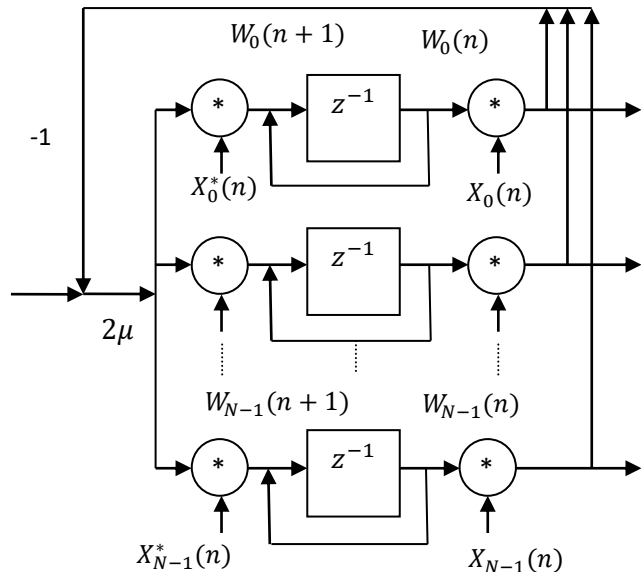
$$\frac{\partial p(n)}{\partial b(n)} = -2a^2[1 - b(n)c]cp(n-1) - 2[1 - b(n)c]c\sigma_w^2 + 2b(n)\sigma_n^2 = 0, \text{ ahonnan a keresett optimális súlytényező}$$

$$b(n) \Big|_{opt} = \frac{a^2 cp(n-1) + c\sigma_w^2}{a^2 c^2 p(n-1) + c^2 \sigma_w^2 + \sigma_n^2} = cp_1(n)[c^2 p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1}, \text{ ahol } p_1(n) = a^2 p(n-1) + \sigma_w^2.$$

4. Adja meg annak a jelnek a diszkrét időfüggvényét, amelyet az $\left(1, \frac{1-j}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1+j}{2}\right)$ értékű Fourier transzformált jellemez (max. 3 pont)! **Megoldás:**

$$\begin{aligned}
 & 1 * e^{j\frac{2\pi}{5}0n} + \frac{1-j}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}3n} + \frac{1+j}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}4n} = \\
 & = 1 * e^{j\frac{2\pi}{5}0n} + \frac{1-j}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1+j}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + \frac{1}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}2n} = \\
 & = 1 + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}1n} - \frac{j}{2} * e^{+j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{j}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + \frac{1}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}2n} = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)
 \end{aligned}$$

5. Blokkvázlat és az összefüggések megadásával mutassa be az LMS eljárás és a rekurzív diszkrét Fourier transzformáció kapcsolatát (max. 2 pont)! Mutassa be a μ konvergencia tényező megválasztásának kritériumát – az LMS eljárás alkalmazása esetén – a stabilitáseméleti megközelítésre alapozva (max. 4 pont)! Adjon felső határértéket μ -re, ha $\dim X(n) = N = 25$ és a regressziós vektor elemeinek maximuma $L = 10$ (max. 1 pont)! **Megoldás:**



Az LMS eljárás lerajzolható ugyanolyan formában, mint a rekurzív jelreprezentáció.

Az LMS algoritmus összefüggése komplex regressziós vektor esetén:

$$W(n+1) = W(n) + 2\mu e(n)X^*(n),$$

azaz a bázisvektor az $X(n)$ vektornak, a reciprok bázis vektor pedig az $2\mu X^*(n)$ vektornak, azaz a komplex konjugált konstansszorosának felel meg.

Ha $X(n)$ a harmonikus komplex exponenciálisokat tartalmazza, és $2\mu = 1/N$, akkor az LMS eljárás éppen a rekurzív DFT-t írja le.

A paraméterhiba kifejezése: $V(n+1) = [I - 2\mu X(n)X^T(n)]V(n)$.

Ez utóbbi egy autonóm rendszer, amely globálisan aszimptotikusan stabil esetben:

$$V(n) \Rightarrow 0, \text{ amivel } W(n) \Rightarrow W^*.$$

Ljapunov módszerével keresünk egy alkalmas energiafüggvényt. Esetünkben erre alkalmas: $G(n) = \mathbf{V}^T(n)\mathbf{V}(n)$.

Azt keressük, hogy ez miként csökkenthető: $\Delta G(n+1) = G(n+1) - G(n) \leq 0$, minden n -re. Ha $G(0)$ véges, akkor $\Delta G(n) \Rightarrow 0$.

$$\Delta G(n+1) = \mathbf{V}^T(n+1)\mathbf{V}(n+1) - \mathbf{V}^T(n)\mathbf{V}(n) = \mathbf{V}^T(n)[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]^T[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]\mathbf{V}(n) - \mathbf{V}^T(n)\mathbf{V}(n) =$$

$$\mathbf{V}^T(n)[-4\mu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n) + [4\mu^2\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)]\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]\mathbf{V}(n) = -4\mu e^2(n)(1 - \mu\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n))$$

ahol felhasználtuk, hogy $\mathbf{V}^T(n)\mathbf{X}(n) = e(n)$.

Mivel $\mu > 0$, ezért ha

$$0 < \mu < \frac{1}{\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)}$$

$\forall n$ -re, akkor $\Delta G \Rightarrow 0$ magával vonja $\mu e^2(n) \rightarrow 0$, illetve $\mathbf{V}^T(n)\mathbf{X}(n) \rightarrow 0$.

Megjegyzés: A $\mathbf{V}^T(n)\mathbf{X}(n)$ skalár szorzat lehet úgy is nulla, hogy a két vektor ortogonális, amikor is $\mathbf{V}(n) \neq 0$. Ez kerülendő.

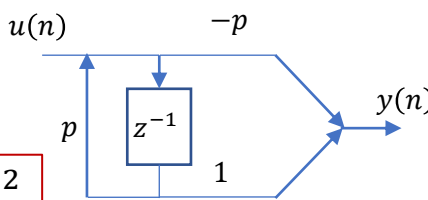
$$0 < \mu < \frac{1}{\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)} < \frac{1}{NL^2} = \frac{1}{2500} = 0.0004$$

6. Írja fel egy olyan mindentáteresztő hálózat átviteli függvényét, amelynek egyetlen pólusa a z sík $p = 0.5 + j0$ koordinátájú pontjában helyezkedik el, és az átvitelének abszolút értéke 1 (max. 1 pont)! Rajzolja fel a hálózat jelfolyamgráfját a direkt struktúrának, valamint transzponáltjának megfelelően! (max. 2 pont)! Adja meg mindkét hálózat állapotváltozós leírását! Mindkét hálózat esetében vezesse le, hogy nulla bemenet esetén - végtelen idő alatt - mennyi energia nyerhető ki belőlük (max. 3 pont)! Alkalmas transzformációval hozzon létre olyan beállítást, amely esetén a kivehető energia az állapotváltozó négyzetével egyezik (max. 1 pont)! Adjon meg strukturálisan passzív realizációt is (max. 2 pont)! Adja meg a kivehető energiát erre a realizációra is. Melyik elrendezésből vehető ki a legtöbb energia (max. 1 pont)?

Megoldás:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}}$$

$$A = p, C = 1 - p^2$$



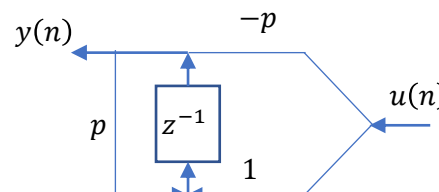
$$x(n+1) = px(n) + u(n)$$

$$y(n) = x(n) - px(n+1)$$

$$= (1 - p^2)x(n) - pu(n)$$

Az $A^T P A + C^T C = P$ összefüggéssel összhangban:

$$p P p + (1 - p^2)^2 = P \rightarrow P = 1 - p^2 = 0.75$$



$$x(n+1) = px(n) + (1 - p^2)u(n)$$

$$y(n) = x(n) - pu(n)$$

$$A_t = p, C_t = 1$$

$$p P_t p + 1 = P_t \rightarrow P_t = \frac{1}{1 - p^2} = \frac{4}{3} \cong 1.33$$

A kivehető energia:

$$0.75x^2$$

$$1.33x^2$$

Méréselmélet:
2. zárthelyi
2019.05.14.

2. Vezesse le a **csúszó ablakos átlagolás** rekurzív összefüggését, átviteli függvényét, és amplitúdókarakterisztikáját (*max. 3 pont*)! Számítsa ki az átvitel abszolút értékét az alapharmonikus frekvencia másfélszeresénél, ha az ablakon keresztül $N = 10$ minta látható (*max. 2 pont*)!

Megoldás: $\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n y(k) = \hat{x}(n) + \frac{1}{N} [y(n) - y(n-N)]$ $z\hat{X}(z) = \hat{X}(z) + \frac{1}{N}(1-z^{-N})Y(z)$,

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} 1 - z^{-N}}{N 1 - z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T} 1 - e^{-jN\omega T}}{N 1 - e^{-j\omega T}} = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T} e^{j\frac{N\omega T}{2}} - e^{-j\frac{N\omega T}{2}}}{N \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2}} = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T} \sin \frac{N\omega T}{2}}{N \sin \frac{\omega T}{2}}$$

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|$$

Az alapharmonikus másfélszeresénél

$$\omega T = 1.5 \frac{2\pi}{N} = \frac{3\pi}{10}, \text{ amivel}$$

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{20}} \right| \approx 0.22.$$

Kapcsolódó feladat:

Számítsa ki az átvitel abszolút értékét az alapharmonikus frekvencia másfélszeresénél, ha az ablakon keresztül $N = 100$ minta látható :

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} 1 + z^{-N}}{N 1 + z^{-1}}$$

Jellemezze az amplitúdó és a fáziskarakterisztikát!

3. Az $1 + \sin\omega t + \cos\omega t$ időfüggvényű jel minden alapharmonikus periódusából egyenletes mintavételezéssel $N = 4$ mintát veszünk. Határozza meg a jel diszkrét **Fourier** és diszkrét **Walsh transzformáltját** (*max. 4 pont*)!

Megoldás: A diszkrét időfüggvény a következő alakú: $1 + \sin\left(\frac{2\pi}{4}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{4}n\right)$, $n = 0,1,2,3$

A minták: $y^T = [2 \ 2 \ 0 \ 0]$. A diszkrét Fourier transzformált: A diszkrét Walsh transzformált:

$$F \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 - 0.5j \\ 0 \\ 0.5 + 0.5j \end{bmatrix},$$

$$W \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kapcsolódó feladat:

Fejezzük ki a két transzformáció kapcsolatát: $F = VW$!

Megoldás:

$$V = FW^{-1}$$

4. Vezesse le az $(1 - z^{-N}) \left[\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} + \frac{z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} \right]$ átviteli függvényű szűrő **impulzusválaszának** diszkrét időfüggvényét $z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m}$ esetére (max. 3 pont)! Adja meg a számértékeket is $N = 5, m = 1$ esetére (max. 2 pont)!

Megoldás: A szűrő átviteli függvénye a sorfejtést követően: $H(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}$, ahol $a_i = z_m^i + z_m^{-i} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}mi\right), i = 1, 2, \dots, N$, mert a sorfejtés együtthatói N -re periodikusak, ezért a N lépésű eltolás következtében N lépés után a tagok egymást kiejtik.

Ezzel az impulzusválasz: $y(0) = 0, y(n) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right), n = 1, 2, \dots, N$

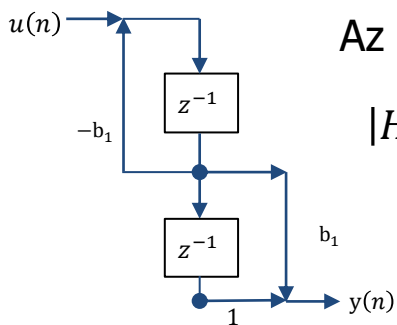
A numerikus értékek: $0, 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0.618, 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}2\right) = -1.618, 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}3\right) = -1.618, 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}4\right) = 0.618, 2$

Kapcsolódó feladat:

Vezesse le a $j(1 - z^{-2N}) \left[\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} - \frac{z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} \right]$ átviteli függvényű szűrő **impulzusválaszának** diszkrét időfüggvényét $z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m}$ esetére!

Megoldás: A szűrő átviteli függvénye a sorfejtést követően: $H(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}$, ahol $a_i = j(z_m^i - z_m^{-i}) = -2 \sin\left(\frac{2\pi}{N}mi\right), i = 1, 2, \dots, 2N$.

5. Rajzolja fel a $H(z) = z^{-1} \frac{z^{-1} + b_1}{1 + b_1 z^{-1}}$ átviteli függvényt megvalósító **direkt struktúra** blokkvázlatát (max. 2 pont)! Bizonyítsa be, hogy a $H(z)$ átviteli függvény **mindentáeresztő** tulajdonságú (max. 2 pont)! Valósítsa meg ezt az átviteli függvényt **rezonátor alapú** struktúrával is (max. 4 pont)! Rajzolja le ez utóbbi blokkvázlatát (max. 1 pont)! Rajzolja fel mindkét struktúra transzponáltjának blokkvázlatát is (max. 2 pont)! **Megoldás:**



Az átvitel abszolút értékének négyzete a komplex konjugálttal történő szorzás után:

$$|H(z)|^2 = z^{-1} \frac{z^{-1} + b_1}{1 + b_1 z^{-1}} z \frac{z + b_1}{1 + b_1 z} = \frac{1 + b_1(z + z^{-1}) + b_1^2}{1 + b_1(z + z^{-1}) + b_1^2} = 1$$

Rezonátor pozíció választás, rezonátor átviteli függvény, a megvalósítandó átvitel a rezonancia frekvenciákon:

$$z_0 = 1, H_0(z) = \frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}}, w_0 = H(1) = \frac{1 + b_1}{1 + b_1} = 1$$

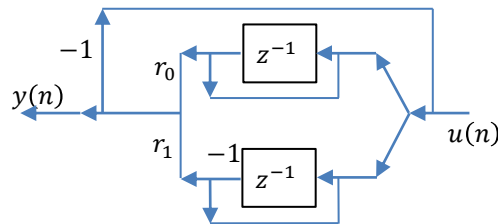
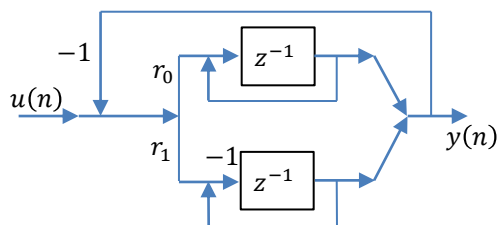
$$z_1 = -1, H_0(z) = \frac{-r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}}, w_1 = H(-1) = -1 \frac{-1 + b_1}{1 - b_1} = 1$$

A visszacsatolt rezonátoros struktúra átviteli függvénye:

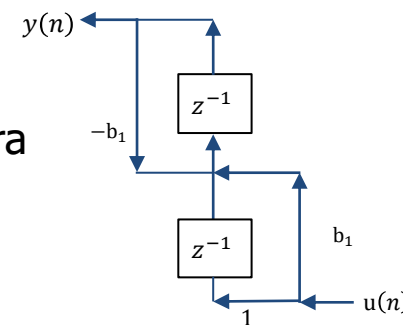
$$\frac{\frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}}}{1 + \frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{r_0 z^{-1} + r_0 z^{-2} - r_1 z^{-1} + r_1 z^{-2}}{1 - z^2 + r_0 z^{-1} + r_0 z^{-2} - r_1 z^{-1} + r_1 z^{-2}} = \frac{(r_0 - r_1)z^{-1} + (r_0 + r_1)z^{-2}}{1 + (r_0 - r_1)z^{-1} + (r_0 + r_1 - 1)z^{-2}} = \frac{z^{-2} + b_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

Az együtthatók egyeztetésével: A rezonátoros megvalósítás és transzponáltja:

$$r_0 + r_1 = 1, r_0 - r_1 = b_1, \\ r_0 = \frac{1 + b_1}{2}, r_1 = \frac{1 - b_1}{2}$$



A direkt struktúra transzponáltja:



6. Vezesse le annak feltételét, hogy a visszacsatolt rezonátoros struktúra eredő átvitele **ne haladja meg az egyet** (max. 2 pont)! Mikor nevezünk egy lineáris rendszert **ortogonálisnak** (max. 1 pont)? Bizonyítsa be, hogy a magára hagyott ortogonális rendszer **disszipatív** (max. 3 pont)! Vezesse le, hogy egy ortogonális rezonátor 100%-os negatív visszacsatolás és alkalmas paraméter beállítás esetén **ortogonális struktúrát** valósít meg (max. 4 pont)!

Megoldás:

A nyílthurkú átvitelt $a + jb$ -vel jelölve, a visszacsatolt struktúra átvitele:

$$\frac{a + jb}{1 + a + jb}$$

amivel a vizsgált feltétel:

$$\left| \frac{a + jb}{1 + a + jb} \right| \leq 1, a^2 + b^2 \leq (1 + a)^2 + b^2, 0 \leq 1 + 2a, a \geq -\frac{1}{2}$$

Részletesebben kifejtve, azzal a feltételezéssel, hogy az r_m súlytényezők mindegyike valós:

$$a = \operatorname{Re} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} r_m \left[\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} + \frac{z_m^{-1} z}{1 - z_m^{-1} z} \right] = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} r_m \left[\frac{z_m z^{-1} + z_m^{-1} z - 2}{2 - z_m z^{-1} - z_m^{-1} z} \right] = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} r_m \quad a = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} r_m \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} r_m \leq 1$$

A zh-ban ez a megoldás teljes értékű, a teljes bizonyítás a jegyzet szerinti, ahol az r_m súlytényezők valós voltát előre nem kötjük ki, hanem a vizsgált feltétel teljesülésének feltételeként adódik.

Egy lineáris rendszert ortogonálisnak nevezünk, ha az $\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$ alakú felírásban $T^T = T^{-1}$ tulajdonságú, azaz T ortogonális mátrix.

Ezt az egyenletet balról megszorozva a transzponáltjával:

$$[x^T(n+1) \quad y^T(n)] \begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = [x^T(n) \quad u^T(n)] T^T T \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix} = x^T(n+1)x(n+1) + y^T(n)y(n) = x^T(n)x(n) + u^T(n)u(n)$$

A magára hagyott rendszer ($u(n) = 0$) belső energiája mindaddig csökkenni fog, amíg $y(n) \neq 0$:

$$x^T(n+1)x(n+1) - x^T(n)x(n) = -y^T(n)y(n)$$

Kvantálási stratégiaként abszolút-érték csonkítást alkalmazva a magára hagyott rendszer felemészti belső energiáját.

Az ortogonális rezonátor állapot-, becsatolási és kicsatolási mátrixai:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -\sin\varphi_m \\ \sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2r_m \cos\varphi_m \\ 2r_m \sin\varphi_m \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

A 100%-os negatív visszacsatolás azt jelenti, hogy a kicsatolás és a becsatolás együttes hatása kivonódik az állapotátmenet mátrixból (korábbi jelöléssel: $A - GC$):

$$A - BC = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -\sin\varphi_m \\ \sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2r_m \cos\varphi_m & 0 \\ 2r_m \sin\varphi_m & 0 \end{bmatrix}$$

Mindentátereszthető tulajdonságot beállítva: $2r_m = 1$, ezáltal:

$$T = \begin{bmatrix} A - BC & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi_m & \cos\varphi_m \\ 0 & \cos\varphi_m & \sin\varphi_m \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

amivel:

$$T^T T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\varphi_m & \cos\varphi_m & 0 \\ \cos\varphi_m & \sin\varphi_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi_m & \cos\varphi_m \\ 0 & \cos\varphi_m & \sin\varphi_m \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I$$

Kapcsolódó feladat: Írja fel a transzponált ortogonális rezonátor rendszer-mátrixait!

Alkalmazzon 100%-os negatív visszacsatolást! Bizonyítsa be, hogy ez a rendszer is ortogonális!

7*. Bizonyítsa be, hogy az 5. feladatban szereplő rendszer belső energiáját a direkt struktúra esetén $P_D = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}$, $z_0 = 1$ és $z_1 = -1$ pozíciójú rezonátorokat alkalmazó rezonátor alapú struktúra esetén pedig $P_R = 2 \text{diag} \left\langle \frac{1}{1+b_1}, \frac{1}{1-b_1} \right\rangle$ mátrixok segítségével tudjuk megadni (max. 4 pont)! Milyen állítást tudunk megfogalmazni abszolút-érték csonkítás esetén ezekre a struktúrákra (max. 1 pont)?

Megoldás: Az 5. feladatban szereplő direkt struktúra állapot-, becsatolási és kicsatolási mátrixai:

$$A = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [b_1 \quad 1]. \quad \text{Igazolandó, hogy } A^T P_D A + C^T C = P_D. \quad \text{Behelyettesítve:}$$

$$\begin{bmatrix} -b_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix} [b_1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -b_1^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 5. feladatban szereplő rezonátoros struktúra állapot-, becsatolási és kicsatolási mátrixai:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - r_0 & -r_0 \\ r_1 & -1 + r_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} r_0 \\ -r_1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 1]. \quad \text{Igazolandó, hogy } A^T P_R A + C^T C = P_R. \quad \text{Behelyettesítve:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - r_0 & r_1 \\ -r_0 & -1 + r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - r_0 & -r_0 \\ r_1 & -1 + r_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix}, \quad \text{Kihhasználva, hogy } r_0 + r_1 = 1, \text{ az egyenletek átírhatók:}$$

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_1 \\ -r_0 & -r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & -r_0 \\ r_1 & -r_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix}$$

formába, amiből már belátható, hogy

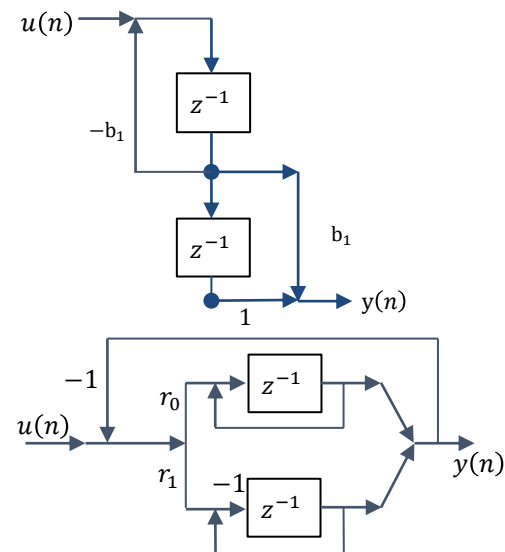
$$\begin{bmatrix} \frac{r_1}{r_0} & -1 \\ -1 & \frac{r_0}{r_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix}$$

Kapcsolódó feladat:

Megoldás:

$$A' = R A R^{-1} = \begin{bmatrix} r_1 & -\sqrt{r_0 r_1} \\ \sqrt{r_0 r_1} & -r_0 \end{bmatrix}, \quad C' = C R^{-1} = [\sqrt{r_0} \quad \sqrt{r_1}],$$

$$\begin{bmatrix} r_1 & \sqrt{r_0 r_1} \\ -\sqrt{r_0 r_1} & -r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & -\sqrt{r_0 r_1} \\ \sqrt{r_0 r_1} & -r_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{r_0} \\ \sqrt{r_1} \end{bmatrix} [\sqrt{r_0} \quad \sqrt{r_1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



mátrixszal megvalósított hasonlósági transzformáció ortogonális rendszerre vezet!

Néhány példa figyelemfelhívásként a jegyzet végéről:

Az LMS eljárás példáján keresztül mutassa be a stabilitáselméleti megközelítés lényegét, és határozza meg a bátorsági tényező célszerű, konvergenciát biztosító értéktartományát! (Ma megbeszéltük)

Egy autonóm diszkrét idejű rendszer állapotátmenet mátrixa: $A = \text{diag} < 0.9, -0.9 >$, megfigyelési mátrixa $C = [1, 1]$. Határozza meg a rendszerhez illesztett megfigyelő G erősítés mátrixának elemeit úgy, hogy a megfigyelő véges lépésben konvergáljon!

$$(A - GC)(A - GC) = 0 \quad \text{ahol} \quad G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

Adja meg annak a jelnek a diszkrét időfüggvényét, amelyet az $(1, 1 - j, 1, 1 + j)$ értékű Fourier transzformált jellemez!

$$1 * e^{j\frac{2\pi}{4}0n} + (1 - j) * e^{j\frac{2\pi}{4}1n} + 1 * e^{j\frac{2\pi}{4}2n} + (1 + j) * e^{j\frac{2\pi}{4}3n} = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{4}n\right) + 2\sin\left(\frac{2\pi}{4}n\right) + (-1)^n$$

Valósítsa meg a $H(z) = \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}$ átviteli függvényt rezonátor alapú struktúrával! Rajzolja le a szűrő blokkvázlatát! Határozza meg a szűrő átvitelét nulla frekvencián, és a mintavételi frekvencia felénél! Hová célszerű helyezni a rezonátor pólust?

$$f = 0 \rightarrow z = 1$$

$$f = \frac{f_m}{2} \rightarrow z = -1$$

$N=5$ esetére tervezzen véges impulzusválaszú szűrőt a frekvencia-mintavételi eljárás segítségével! A szűrő átvitele nulla frekvencián egységnyi, $0.2 * f_m$ és $0.4 * f_m$ frekvencián (f_m a mintavételi frekvencia) pedig nulla. Rajzolja fel a szűrőt magvalósító számítás blokkvázlatát, és vezesse le az amplitúdó karakterisztikáját megadó összefüggést! Mekkora a szűrő átvitelének abszolút értéke $0.1 * f_m$ frekvencián?

