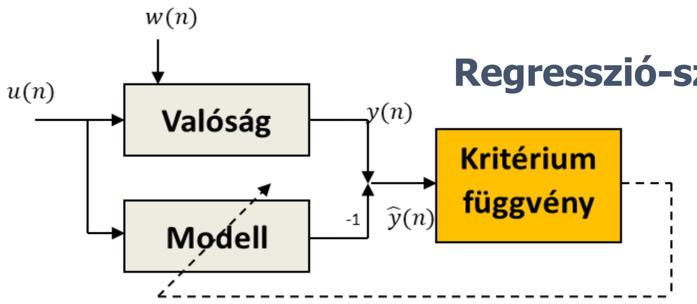
Méréselmélet

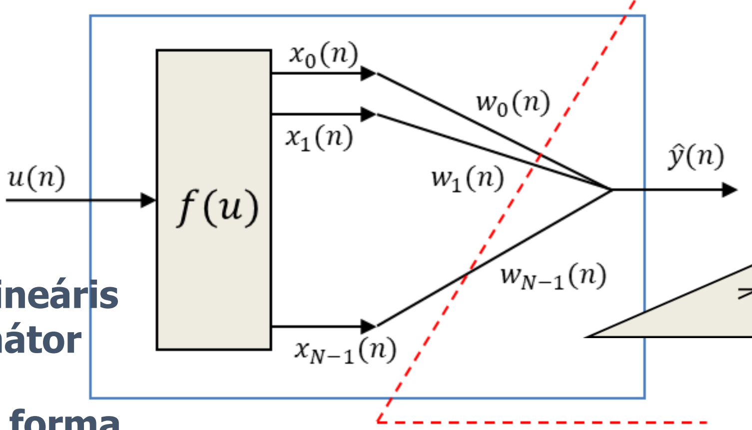
5. fejezet: Szűréselmélet alapjai

2021. március 24.

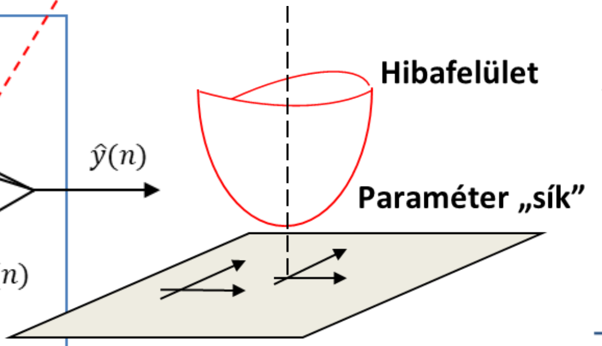
Modellillesztés: Összefoglalás

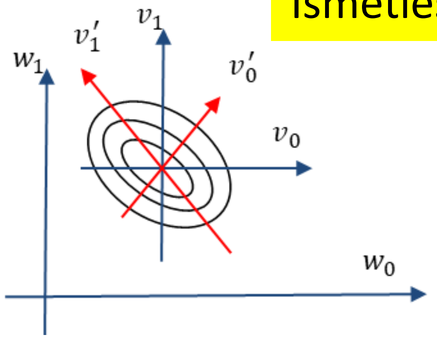


Regresszió-szerű forma



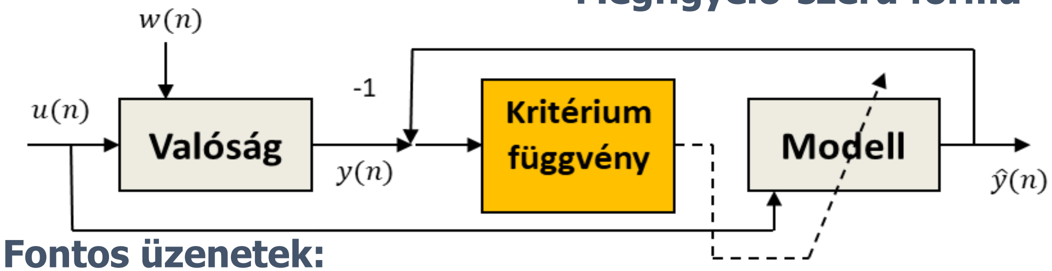
Adaptív lineáris kombinátor





Megfigyelő-szerű forma

Optimumkeresés



$$J(\boldsymbol{W}(n)) = J_{min} + (\boldsymbol{W}(n) - \boldsymbol{W}^*)^T \boldsymbol{R}(\boldsymbol{W}(n) - \boldsymbol{W}^*) = J_{min} + \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}(n)$$

Newton módszer:

$$\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) - \mu \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{\nabla}(n)$$

$$\boldsymbol{V}(n+1) = (1-2\mu)^{n+1}\boldsymbol{V}(0)$$

Legmeredekebb lejtő módszere:

$$\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) - \mu \boldsymbol{\nabla}(n)$$

$$\boldsymbol{V}'(n+1) = (I - 2\mu\boldsymbol{\Lambda})^{n+1}\boldsymbol{V}'(0)$$

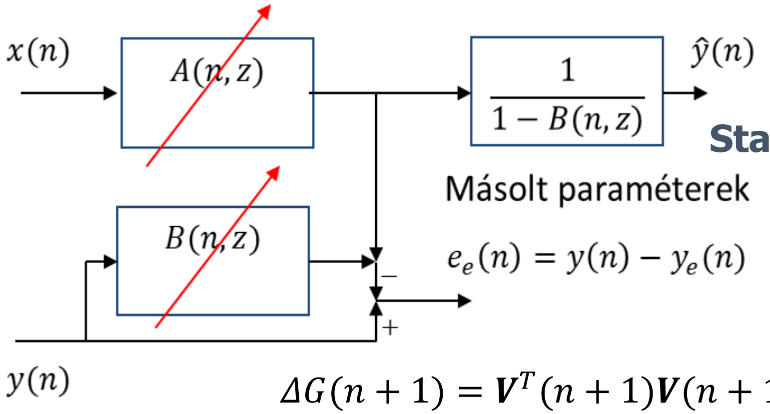
Legkisebb átlagos négyzetes (LMS) módszer:

$$\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) + 2\mu \boldsymbol{X}(n)e(n)$$

$$\boldsymbol{V}(n+1) = \left[\prod_{i=0}^{n}(\boldsymbol{I} - 2\mu\boldsymbol{X}(i)\boldsymbol{X}^T(i))\right]\boldsymbol{V}(0)$$

Fontos üzenetek:

1. A paramétereiben **lineáris** modelleket azért kedveljük, mert **négyzetes hibakritérium** esetén a szélsőérték-keresés lineáris egyenletrendszer megoldására vezet, mivel a négyzetes kifejezések paraméterek szerinti deriválása **lineáris** összefüggést eredményez.
2. A modellillesztés feladatát alapvetően kétféle módszerrel oldhatjuk meg:
   (a) „**batch**” vagy „**off-line**” jelleggel, amikor felvett regisztrátumot utólag dolgozunk fel;
   (b) **iteratív**, **rekurzív**, „**on-line**” jelleggel, amikor a felvétellel párhuzamos a feldolgozás.
3. A modellillesztés célját illetően is alapvetően két nagy csoportot különböztetünk meg:
   (a) **identifikáció:** a lehető legpontosabban szeretnénk megragadni a valóságot,
   (b) **adaptáció:** a lehető legjobban szeretnénk követni a valóságot, a valóság változásait.



Equation-Error (EE) forma

Másolt paraméterek

$$e_e(n) = y(n) - y_e(n)$$

Stabilitáselméleti megközelítés:

$$G(n) = \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n).$$

$$\Delta G(n+1) = \boldsymbol{V}^T(n+1)\boldsymbol{V}(n+1) - \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n) = = -4\mu e^2(n)(1 - \mu\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n)).$$

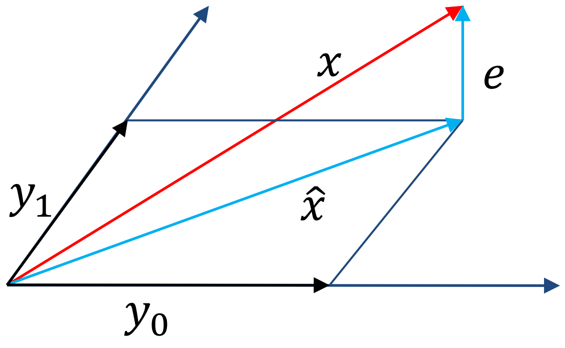
5. Szűréselmélet alapjai

(Jegyzet 55-67. oldalak)

5.1. Optimális nemrekurzív becslő (skalár Wiener Szűrő)

Keressük x legjobb becslőjét $$\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k \qquad (247)$$ ún. **lineáris batch processzorral**, ahol $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ jelölik a megfigyelési adatokat, a $\{a_k\}$, $k = 0,1,\dots,N-1$ pedig ismeretlen súlytényezők.

A legjobb becslés geometriai interpretációja (29. ábra):



Legjobbnak azt a becslést tekintjük, amelyik legkisebb hibával jár: ez az x vektor altérre történő merőleges vetítésével áll elő.

Megmutatjuk, hogy ez ekvivalens azzal a megoldással, amelyet a négyzetes hibakritérium minimalizálásával kaptunk:

$$e = x - \hat{x}, \qquad E\{e^2\} = E\{(x - \hat{x})^2\} = E\left\{\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k\right)^2\right\} \qquad (248)$$

Elvégezve a deriválást:

$$\frac{\partial E\{e^2\}}{\partial a_j} = -2E\left\{\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k\right) y_j\right\} = 0, E\{e y_j\} = 0, \forall j - \text{re}. \qquad (249)$$

Ez utóbbit ortogonalitási egyenletnek nevezzük, mert a vektorokkal történő geometriai interpretációban éppen azt fejezi ki, hogy az optimális beállítás esetén az e hibavektor merőleges valamennyi y_j vektorra.

A (249) összefüggés átrendezésével:

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \underbrace{E\{y_k y_j\}}_{R_{yy}(k,j)} = \underbrace{E\{x y_j\}}_{P_{xy}(j)}, j = 0,1,2,\ldots,N-1. \qquad (250)$$

ahol $R_{yy}(k,j)$ az $\boldsymbol{R}_{yy}$ autokorreláció mátrix (k,j) indexű eleme, $P_{xy}(j)$ a $\boldsymbol{P}_{xy}$ keresztkorreláció vektor j-edik eleme, ahol most (a korábbiakkal ellentétben) a mátrix, ill. vektor indexében külön jeleztük, hogy mely mennyiségek auto-, ill. keresztkorrelációjáról van szó.

Az optimális esetben megmaradó hiba:

$$E\{e^2\}\Big|_{min} = E\left\{e\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k\right)\right\}\Bigg|_{min} = E\{ex\} = E\{(x-\hat{x})x\} = E\{x^2\} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k E\{x y_k\} = E\{x^2\} - \sum_{k=0}^{N-1} a_k P_{xy}(k)$$

Mindez mátrix formában (ahol $\boldsymbol{W} = [a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_{N-1}]^T$):

$$\boldsymbol{R}_{yy}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{P}_{xy}, \boldsymbol{W} = \boldsymbol{R}_{yy}^{-1}\boldsymbol{P}_{xy}, \quad E\{e^2\}\Big|_{min} = E\{x^2\} - \boldsymbol{P}_{xy}^T \boldsymbol{R}_{yy}^{-1} \boldsymbol{P}_{xy} = E\{x^2\} - \boldsymbol{P}_{xy}^T \boldsymbol{W} \qquad (252)$$

1. Példa: Zajos megfigyeléseink vannak x-ről: $y_k = x + w_k$.

A zaj tulajdonságai: $E\{x w_j\} = 0 \ \forall j - re$, $E\{w_j w_k\} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \sigma_w^2 & j = k \end{cases}$. A jel tulajdonságai: $E\{x\} = 0$, $E\{x^2\} = \sigma_x^2$.

A korreláció mátrixok: $R_{yy}(k,j) = E\{y_k y_j\} = E\{(x + w_k)(x + w_j)\} = \sigma_x^2 + \sigma_w^2 \delta_{kj}$, $P_{xy}(j) = E\{x y_j\} = \sigma_x^2$. →(250)

$$\begin{array}{ccccccc}
(\sigma_x^2 + \sigma_w^2)a_0 + & \sigma_x^2 a_1 + \cdots & + & \sigma_x^2 a_{N-1} & = \sigma_x^2 \\
\sigma_x^2 a_0 + & (\sigma_x^2 + \sigma_w^2)a_1 + \cdots & + & \sigma_x^2 a_{N-1} & = \sigma_x^2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\sigma_x^2 a_0 + & \sigma_x^2 a_1 + \cdots & + & (\sigma_x^2 + \sigma_w^2)a_{N-1} & = \sigma_x^2
\end{array}$$

Összeadva a N egyenletet:

$$(\sigma_w^2 + N\sigma_x^2)\sum_{k=0}^{N-1} a_k = N\sigma_x^2, \qquad \sum_{k=0}^{N-1} a_k = \frac{N\sigma_x^2}{\sigma_w^2 + N\sigma_x^2},$$

amit soronként visszahelyettesítve: $a_0 = a_1 = \ldots = a_{N-1} = \dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2 + N\sigma_x^2}$

Ezzel: $$\hat{x} = \frac{1}{N + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2} \sum_{k=0}^{N-1} y_k = \frac{\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_w}\right)^2}{1 + N\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_w}\right)^2} \sum_{k=0}^{N-1} y_k$$

A négyzetes hiba várható értéke: $$E\{e^2\}\Big|_{min} = \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \frac{N}{N + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2} = \frac{\sigma_w^2}{N + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_x}\right)^2}$$

azaz az additív zaj hatása jelentősen csökkenthető.

Rekurzív becslő az optimális nemrekurzív becslőből

Bevezető példa: az egyszerű lineáris átlagolás rekurzív formában. $\hat{x}(n) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y(k)$ Az iterációs indexhez asszociálhatjuk a diszkrét időt ($n = 1,2,\ldots$).

$$\hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y(k) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n+1} y(n) = \frac{n}{n+1}\hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}\left(y(n) - \hat{x}(n)\right)$$

A rekurzív eljárás nagy előnye, hogy nem kell megvárni az összes adatot: folyamatosan számolható az egyre jobb minőségű becslő.

N helyett n-t írva ($\gamma = (\frac{\sigma_w}{\sigma_x})^2$): $$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) y(k), \quad a_k(n) = \frac{1}{n+\gamma}, \quad E\{e^2(n)\}\Big|_{min} = \frac{\sigma_w^2}{n+\gamma}$$

Mindezeket megismételve $n+1$-re:

$$\hat{x}(n+1) = \sum_{k=0}^{n} a_k(n+1) y(k), \quad a_k(n+1) = \frac{1}{n+1+\gamma}, \quad E\{e^2(n+1)\}\Big|_{min} = \frac{\sigma_w^2}{n+1+\gamma}$$

Követve a rekurzív átlagoló lépéseit:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1+\gamma}\sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n+1+\gamma} y(n) = \frac{n+\gamma}{n+1+\gamma}\hat{x}(n) + \frac{1}{n+1+\gamma} y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1+\gamma}\left(y(n) - \hat{x}(n)\right)$$

A négyzetes hiba alakulása: $$\frac{E\{e^2(n+1)\}|_{min}}{E\{e^2(n)\}|_{min}} = \frac{a_k(n+1)}{a_k(n)} = \frac{n+\gamma}{n+1+\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mathrm{n}+\gamma}} = \frac{1}{1 + \frac{E\{e^2(n)\}|_{min}}{\sigma_w^2}}$$

A rekurzív összefüggés együtthatóit átnevezve:

$$\hat{x}(n+1) = a(n+1)\hat{x}(n) + b(n+1)y(n) = \hat{x}(n) + \underbrace{b(n+1)(y(n) - \hat{x}(n))}_{\text{korrekciós tag}}$$

2. Példa: Legyen $\gamma = 2$, σ_w^2 adott.

$$\hat{x}(n+1) = \frac{n+2}{n+3}\hat{x}(n) + \frac{1}{n+3}y(n)$$
$$= \hat{x}(n) + \frac{1}{n+3}\big(y(n) - \hat{x}(n)\big)$$

5.2. Optimális rekurzív becslő (skalár Kalman szűrő és prediktor)

A modell, amit alkalmazunk a legegyszerűbb állapotváltozós modell, amit egy Gauss eloszlású fehér-zaj folyamat gerjeszt.

$$\boxed{x(n) = ax(n-1) + w(n) \qquad (264)}$$

$$E\{w(n)\} = 0, E\{w(n)w(j)\} = \begin{cases} 0 & n \neq j \\ \sigma_w^2 & n = j \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(n) = 0 \\ w(n) = 0 \end{array}\right\} \text{ha} \quad n < 0$$

A (264) egy ún. **elsőrendű autoregresszív folyamat**: első rendben függ az értéke az előző „időpillanatbeli” értéktől.

Négyzetes várható értéke kifejezhető a zajfolyamat négyzetes várható értékével: $E\{x(n)\} = 0,\ E\{x^2(n)\}$=?

$$E\{x^2(n)\} = R_{xx}(0) = \sigma_x^2 = E\{a^2x^2(n-1) + w^2(n) + 2ax(n-1)w(n)\} = a^2 R_{xx}(0) + R_{ww}(0) \rightarrow R_{xx}(0) = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2}$$

$$R_{xx}(0) = a^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2$$

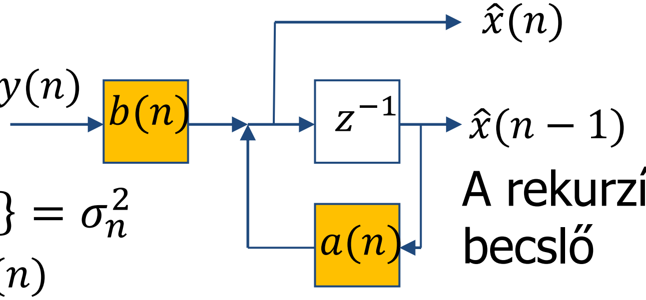
$$E\{x(n)w(n+1)\} = 0,$$

$$R_{xx}(1) = E\{x(n)x(n+1)\} = E\{x(n)(ax(n) + w(n+1))\} = aR_{xx}(0)$$

$$R_{xx}(2) = E\{x(n)x(n+2)\} = E\{x(n)(ax(n+1) + w(n+2))\} = a^2R_{xx}(0)$$

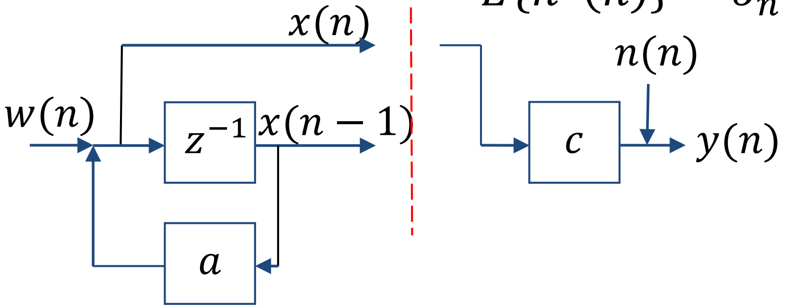
$$R_{xx}(j) = E\{x(n)x(n+j)\} = R_{xx}(j) = a^{|j|}R_{xx}(0)$$

mert $E\{x(n)w(n+j)\} = 0, \forall n - \text{re}, \text{és } \forall j > 0 - \text{ra}$

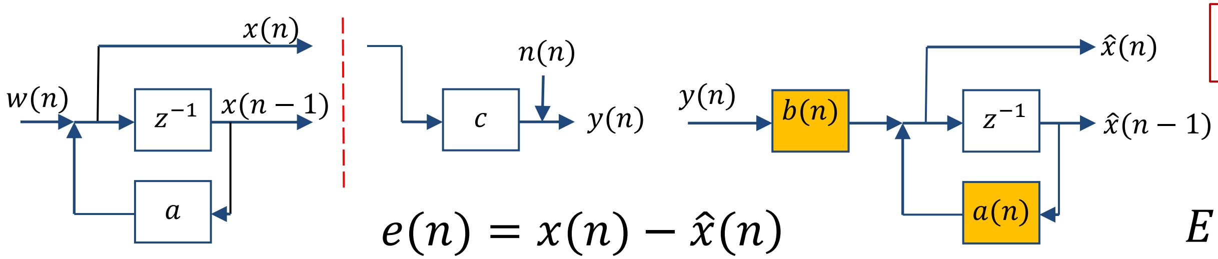


A rekurzív becslő

$E\{n^2(n)\} = \sigma_n^2$



A megfigyelés lineáris modellje



$e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$

$\boxed{\hat{x}(n) = a(n)\hat{x}(n-1) + b(n)y(n)}$ rekurzív szűrő

$\hat{x}(n+1) = \alpha(n)\hat{x}(n) + \beta(n)y(n)$ rekurzív prediktor

$$E\{e^2(n)\} = E\left\{\left(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n)\right)^2\right\} \qquad (271)$$

Keressük az optimális súlytényezőket: $\frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial a(n)} = -2E\{e(n)\hat{x}(n-1)\} = 0,$ $\frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial b(n)} = -2E\{e(n)y(n)\} = 0$

„ortogonalitás”! „ortogonalitás”!

$a(n)$ meghatározása:

$E\{[x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n)]\hat{x}(n-1)\} = 0$. Beleírva: $a(n)x(n-1) - a(n)x(n-1) = 0,$ $y(n) = cx(n) + n(n)$

$$E\{[a(n)(x(n-1) - \hat{x}(n-1)) - a(n)x(n-1)]\hat{x}(n-1) + [x(n) - b(n)cx(n) - b(n)n(n)]\hat{x}(n-1)\} = 0$$

$$a(n)E\{-e(n-1)\hat{x}(n-1) + x(n-1)\hat{x}(n-1)\} = E\{[[(1 - b(n)c)]x(n) - b(n)n(n)]\hat{x}(n-1)\}$$

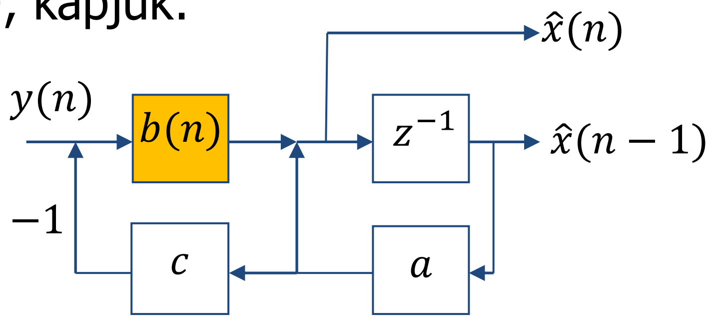
Itt $E\{e(n-1)\hat{x}(n-1)\} = 0$, mert $\hat{x}(n-1) = a(n-1)\hat{x}(n-2) + b(n-1)y(n-1)$ tagjai ortogonálisak $e(n-1)$-re.

Hasonlóképpen a megfigyelési zaj $n(n)$ mintája korrelálatlan $\hat{x}(n-1)$ értékével.

Behelyettesítve, hogy $x(n) = ax(n-1) + w(n-1)$, és $E\{w(n-1)\hat{x}(n-1)\} = 0$, kapjuk:

$$a(n)E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\} = a[(1 - b(n)c)]E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\} \rightarrow$$

$\boxed{a(n) = a[(1 - b(n)c)]}$ $\boxed{\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ca\hat{x}(n-1))}$



$b(n)$ meghatározása: (271) ← modell + becslő egyenletei

$$E\{e^2(n)\} = E\left\{\left[ae(n-1) + w(n) - b(n)\left(ace(n-1) + cw(n) + n(n)\right)\right]^2\right\}$$

$$E\{e^2(n)\} = E\{[a[1 - b(n)c]e(n-1) + [1 - b(n)c]w(n) - b(n)n(n)]^2\}$$

$E\{e(n-1)w(n)\} = 0$

$E\{e(n-1)n(n)\} = 0$

$E\{w(n)n(n)\} = 0$

A négyzetre emelést követően csak a négyzetes tagok maradnak meg: $E\{e^2(n)\} = p(n)$

$$E\{e^2(n)\} = a^2[1 - b(n)c]^2 E\{e^2(n-1)\} + [1 - b(n)c]^2 E\{w^2(n)\} + b^2(n) E\{n^2(n)\}$$

$E\{w^2(n)\} = \sigma_w^2$ $\quad E\{n^2(n)\} = \sigma_n^2$

$$\frac{\partial p(n)}{\partial b(n)} = -2a^2[1 - b(n)c]cp(n-1) - 2[1 - b(n)c]c\sigma_w^2 + 2b(n)\sigma_n^2 = 0$$

$$\boxed{b(n)\Big|_{opt} = \frac{a^2cp(n-1) + c\sigma_w^2}{a^2c^2p(n-1) + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2}}$$

$$b(n)\Big|_{opt} = cp_1(n)[c^2p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1}$$

ahol $\quad p_1(n) = a^2p(n-1) + \sigma_w^2$

Összefoglalva: A rendszer- és a megfigyelési modell:

$x(n) = ax(n-1) + w(n)$ $\qquad y(n) = cx(n) + n(n)$

Az optimális rekurzív szűrő:

$\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ac\hat{x}(n-1))$ $\quad \hat{y}(n) = ac\hat{x}(n-1)$, ahol az $E\{e^2(n)\} = p(n)$ négyzetes hiba minimumát a következő iteratív számítással beállított $b(n)$ súlyozással kapjuk:

$p_1(n) = a^2p(n-1) + \sigma_w^2$ $\quad b(n) = cp_1(n)[c^2p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1}$ $\quad p(n) = [1 - b(n)c]p_1(n)$

Optimális rekurzív becslő (skalár Kalman prediktor): A rendszer- és a megfigyelési modell:

$x(n+1) = ax(n) + w(n)$ $\qquad y(n) = cx(n) + n(n)$

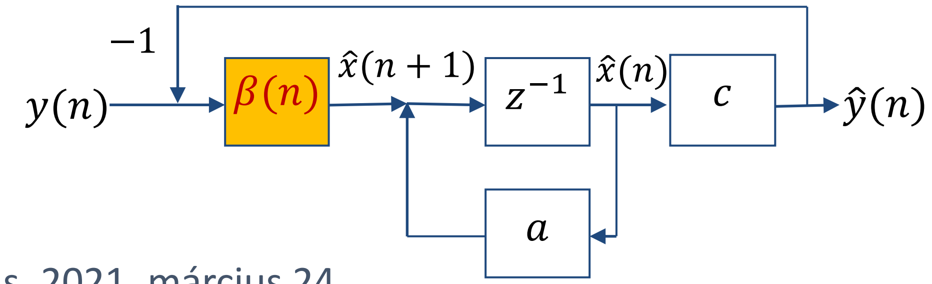
Az optimális rekurzív prediktor:

$\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n))$ $\qquad \hat{y}(n) = c\hat{x}(n)$

$\beta(n) = acp(n)[c^2p(n) + \sigma_n^2]^{-1}$, $\; p(n+1) = a(a - \beta(n)c)p(n) + \sigma_w^2$

az $E\{e^2(n+1)\} = p(n+1)$ négyzetes hiba minimumát a következő iteratív számítással beállított $\beta(n)$ súlyozással kapjuk:

Egylépéses Kalman prediktor

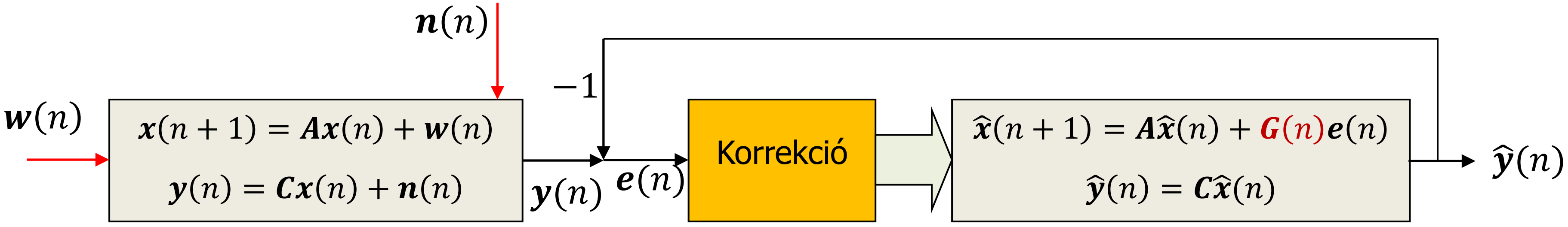


5.3. Optimális rekurzív becslő (vektor Kalman prediktor és szűrő)

Az alábbiakban az optimális rekurzív becslő vektoros változatát mutatjuk be. A skalár esettel ellentétben a Kalman prediktor összefüggéseivel kezdünk:

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{w}(n)$$
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{n}(n),$$

$\boldsymbol{w}(n)$ az ún. rendszer-zaj,
$\boldsymbol{n}(n)$ az ún. megfigyelési-zaj.



$$\boldsymbol{e}(n) = \boldsymbol{y}(n) - \hat{\boldsymbol{y}}(n)$$

Mind a rendszer-, mind a megfigyelési-zaj vektor egymástól és a rendszer állapotától független nulla várható értékű fehér Gauss folyamat.

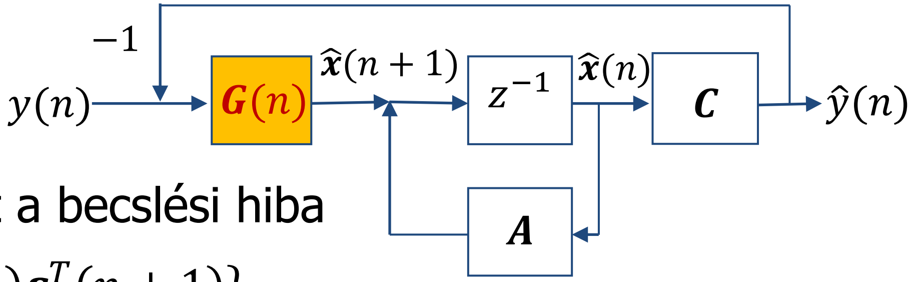
$$\boldsymbol{Q}(n) = E\{\boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{w}^T(n)\}$$
$$\boldsymbol{R}(n) = E\{\boldsymbol{n}(n)\boldsymbol{n}^T(n)\}$$

A mérési eljárás, amit a kiegészített modellhez rendelünk egy megfigyelő:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{e}(n) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{G}(n)\big(\boldsymbol{y}(n) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(n)\big)$$

Neve: Kalman prediktor

A skalár esetben $\boldsymbol{G}(n)$ szerepét $\beta(n)$ töltötte be.



Keressük azt a $\boldsymbol{G}(n)$ mátrixot (az ún. prediktor erősítést), amely mellett a becslési hiba

$$\boldsymbol{P}(n+1) = E\{[\boldsymbol{x}(n+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(n+1)][\boldsymbol{x}(n+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(n+1)]^T\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)\}$$

kovariancia mátrixának nyoma minimális.

$$\boxed{tr\boldsymbol{P}(n+1) = E[\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)]}$$

$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{n}^T(n)\} = 0$$
$$E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{w}^T(n)\} = 0,$$
$$E\{\boldsymbol{w}(n)\boldsymbol{n}^T(n)\} = 0$$

$$\frac{\partial tr\boldsymbol{P}(n+1)}{\partial \boldsymbol{G}(n)} = \frac{\partial tr[(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C})\boldsymbol{P}(n)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C})^T + \boldsymbol{Q}(n) + \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{R}(n)\boldsymbol{G}^T(n)]}{\partial \boldsymbol{G}(n)} = \boldsymbol{0}.$$

$$\frac{\partial tr\boldsymbol{P}(n+1)}{\partial \boldsymbol{G}(n)} = -2[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T + 2\boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{R}(n) = 0.$$

$$\boxed{\boldsymbol{G}(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}(n)]^{-1}}$$

$\boldsymbol{F}(n) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C}$ jelöléssel:

A deriválásnál a következő szabályokat alkalmaztuk:
$$\frac{\partial tr[\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}^T]}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{W}^T + \boldsymbol{X}\boldsymbol{W};\quad \frac{\partial tr[\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}]}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{W}^T;\quad \frac{\partial tr[\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}^T]}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{W},$$

ahol a $\boldsymbol{W}$ mátrix az $\boldsymbol{X}$ mátrixtól független.

$$\boldsymbol{P}(n+1) = E\{[\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n) + \boldsymbol{w}(n) - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{n}(n)][\boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n) + \boldsymbol{w}(n) - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{n}(n)]^T\}$$

$$\boldsymbol{P}(n+1) = \boldsymbol{F}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{F}^T(n) + \boldsymbol{Q}(n) + \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{R}(n)\boldsymbol{G}^T(n)$$

Létezik számítástechnikailag kedvezőbb forma:

Visszaírva $\boldsymbol{F}(n) = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C}$ kifejezését, és első tagját kifejtve:

$$\boldsymbol{P}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{G}^T(n) - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{A}^T + \underbrace{\boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{G}^T(n) + \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{R}(n)\boldsymbol{G}^T(n)} + \boldsymbol{Q}(n)$$

Marad az első, harmadik és hatodik tag, amiből:

$$\boldsymbol{G}(n)[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}(n)]\boldsymbol{G}^T(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{G}^T(n)$$

$$\uparrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{P}(n+1) = [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{G}(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}(n)]^{-1}}$$

Összefoglalva: $\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{w}(n)$, $\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{n}(n)$.

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{G}(n)[\boldsymbol{y}(n) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(n)] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{e}(n)$$

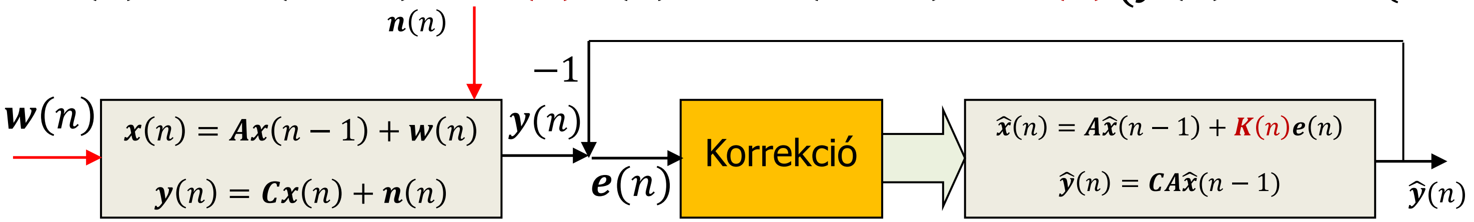
$$\boldsymbol{G}(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}(n)]^{-1}$$

$$\boldsymbol{P}(n+1) = [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)$$

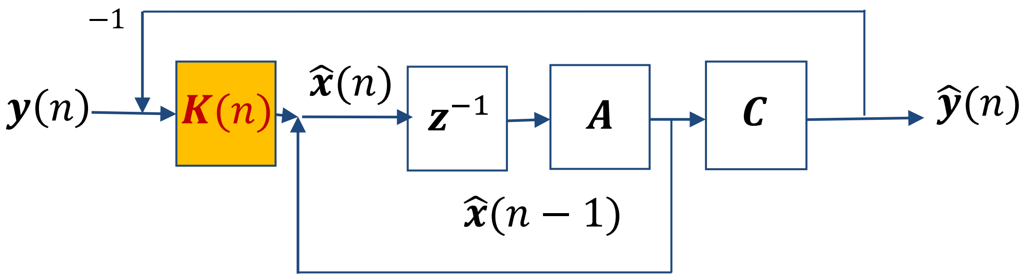
Optimális rekurzív becslő (vektor Kalman szűrő) $\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n-1) + \boldsymbol{w}(n)$, $\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{n}(n)$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1) + \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{e}(n) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1) + \boldsymbol{K}(n)\big(\boldsymbol{y}(n) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1)\big)$$

$\boldsymbol{K}(n)$ az ún. Kalman erősítés.

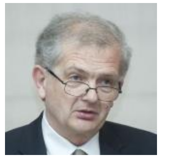


$$\boldsymbol{e}(n) = \boldsymbol{y}(n) - \hat{\boldsymbol{y}}(n)$$



$$\boldsymbol{P}(n) = E\{[\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)][\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)]^T\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)\}$$

$tr\boldsymbol{P}(n) = E[\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n)]$ minimumát keressük $\boldsymbol{K}(n)$ függvényében.



$$\hat{\boldsymbol{x}}(n) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1) + \boldsymbol{K}(n)[\boldsymbol{y}(n) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1)] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1) + \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{e}(n)$$

$$\boldsymbol{K}(n) = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)]\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)]\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}(n)]^{-1}$$

$$\boldsymbol{P}(n) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{C}][\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)]$$

Bevezetve a $\boldsymbol{P}_1(n) = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)]$ jelölést megkapjuk a Kalman szűrő szokásos formájú kifejezéseit:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1) + \boldsymbol{K}(n)[\boldsymbol{y}(n) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1)] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1) + \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{e}(n)$$

$$\boldsymbol{P}_1(n) = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)]$$

$$\boldsymbol{K}(n) = \boldsymbol{P}_1(n)\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_1(n)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}(n)]^{-1}$$

$$\boldsymbol{P}(n) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}_1(n)$$

Amennyiben az alkalmazott rendszermodellek rendszerzajt becsatoló mátrixa nem az egységmátrix, hanem egy alkalmas $\boldsymbol{B}$ mátrix, akkor a fenti összefüggésekben $\boldsymbol{Q}(n)$ helyére $\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}(n)\boldsymbol{B}^T$ írandó.

Determinisztikus gerjesztés hatása az összefüggések lineáris voltából fakadóan a szuperpozíció elvének alkalmazásával érvényesíthető.

Összefoglalás + üzenet:

A Kalman szűrő és prediktor állapotegyenlettel jellemzett rendszer állapotváltozójának rekurzív becslője.
Az optimális szűréshez kapcsolódó mondanivaló kifejtésére mindkét struktúra alkalmas.
A kettő közötti különbség lényege az, hogy a Kalman szűrő a megfigyelt értéket a megfigyelés időpontjához rendelhető állapotváltozó érték becslésére használja, míg a Kalman prediktor annak következő időpontbeli értékét becsli/jósolja.
Az eljárások eredményességét ez a különbség nem befolyásolja.
A prediktor esetében "látványosabb" a mérés modelljének beépülése a megfigyelőbe.

Köszönöm a figyelmet!