Méréselmélet

1. fejezet: Bevezetés
2. fejezet: A döntéselmélet alapjai

2021. február 10.

1. Bevezetés 1.1. A Méréselmélet c. tárgy célkitűzése

A **Méréselmélet** c. tárgy arra vállalkozik, hogy rendszerezett formában áttekintse azokat a megfontolásokat és módszereket, amelyek alapvetők ***mérési adatok*** felhasználása és feldolgozása során. (alternatív elnevezés: **Mérés- és adattudomány**)

A mérési adatok a bennünket körülvevő valóság ***megfigyeléséből*** származnak, annak jobb ***megismerését és befolyásolását*** teszik lehetővé.

megfigyelés ➡ ***mérési adat*** ➡ ***megismerés*** ➕ ***befolyásolás***

A jobb („pontosabb”) megismerésre és befolyásolásra irányuló törekvés valójában egy permanens folyamat, amely az előzetes, és a méréssel megszerzett ismeretek egyre finomabb ötvözése révén éri el célját.

- **Nyers adat:** A szenzorok kimenete az ún. nyers adat. (A nyers adatokat legfeljebb átlagolni szoktuk zajcsökkentési célból.)
- **Mért adat:** A nyers adatokat kalibráljuk, és szabványos mértékegységet rendelünk hozzájuk. Ez a folyamat a jelkondicionálás, melynek eredménye a mért adat.
- **Egyeztetett adat:** A mért adatokat további vizsgálatnak vetjük alá: hihetőség-vizsgálat, kiugró adatok kiszűrése, stb.
  Szintaktikus egyeztetés: a mért érték kontextusának vizsgálata nélkül.
  Szemantikus egyeztetés: a mért érték kontextusának vizsgálatával.

Kicsi bizonytalanság, nagy pontosság | Nagy bizonytalanság, nagy pontosság

Kicsi bizonytalanság, kis pontosság | Nagy bizonytalanság, kis pontosság

Mérési bizonytalanság: A mért adat minőségjellemzője.
A mért érték körüli tartomány, amelyről feltételezzük, hogy abban a valódi érték valamekkora valószínűséggel fellelhető.
Számszerűsítése: a becsült szórással.

A típus: szórás a mérésből. **B típus:** szórás az a priori ismeretből.

Pontosság ?
(Accuracy)
Bizonytalanság ?
(Precision)

Pontosság (Accuracy): A mért értékek mennyire vannak közel a helyes (elméleti) értékhez?
Bizonytalanság (Precision): A mért értékek mennyire vannak közel egymáshoz?

Torzítás (distortion): „**Félrehordás**”

Asszociáció: Órák szinkronizálása: (a) Az órák **pontossága** érdekében toronyórához/atomórához (ún. **külső szinkronizáció**)
(b) Az órák **kis bizonytalansága** érdekében egymáshoz (ún. **belső szinkronizáció**)

1.2. Mit tanultunk Méréstechnikából?

Ezen témakörök ismeretét a Méréselmélet tárgy előtanulmányi követelményének tekintjük.

Mérés és modellezés
modellillesztés

Mérési hibák (modellezési, átviteli és műszer-hiba)
hibaterjedés (a teljes differenciál alkalmazása)
mérőeszköz struktúrák (soros, párhuzamos, visszacsatolt)
jelátalakítók hibái (nullpont, terhelési, hőmérsékleti, kalibrációs, stb. hibák)
a műszerek pontossága (analóg, digitális; alkatrész és frekvenciafüggés)

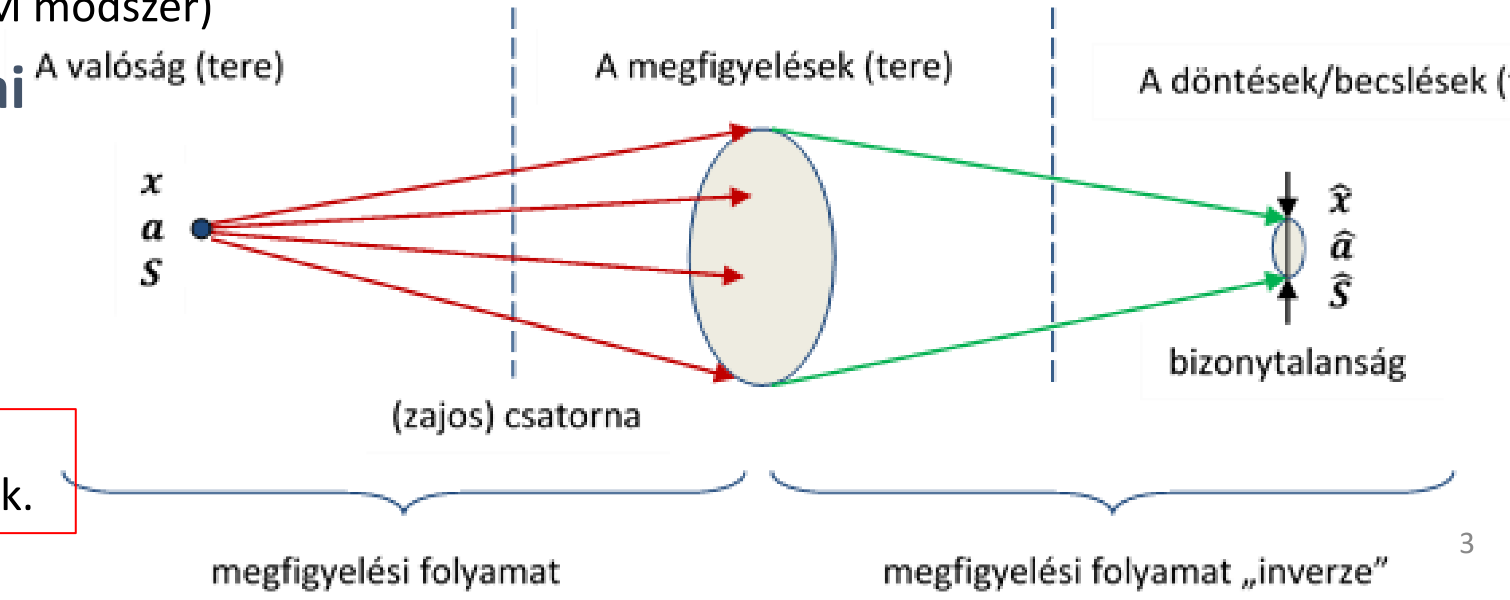
Elemi mérési módszerek (differencia, közvetlen és közvetett összehasonlítás, helyettesítő, felcserélési vagy Gauss módszer)
Mérési sorozat kiértékelése (a helyes érték legvalószínűbb értéke/becslője, a becslés bizonytalansága; az átlag szórása; stb.)
A mérési bizonytalanság kifejezése (a GUM módszer)

1.3. A mérési eljárás sajátosságai

A mérési eljárás a megismerési folyamat része, amelynek során a rendelkezésünkre álló ismereteinket pontosítjuk, ill. bővítjük.

A mérés során a **valóság** jelenségeit szeretnénk **megragadni**.

Olyan jellemzőkre építünk, amelyek valamilyen értelemben **stabilitást** mutatnak.



Fontos szerepet kapnak:

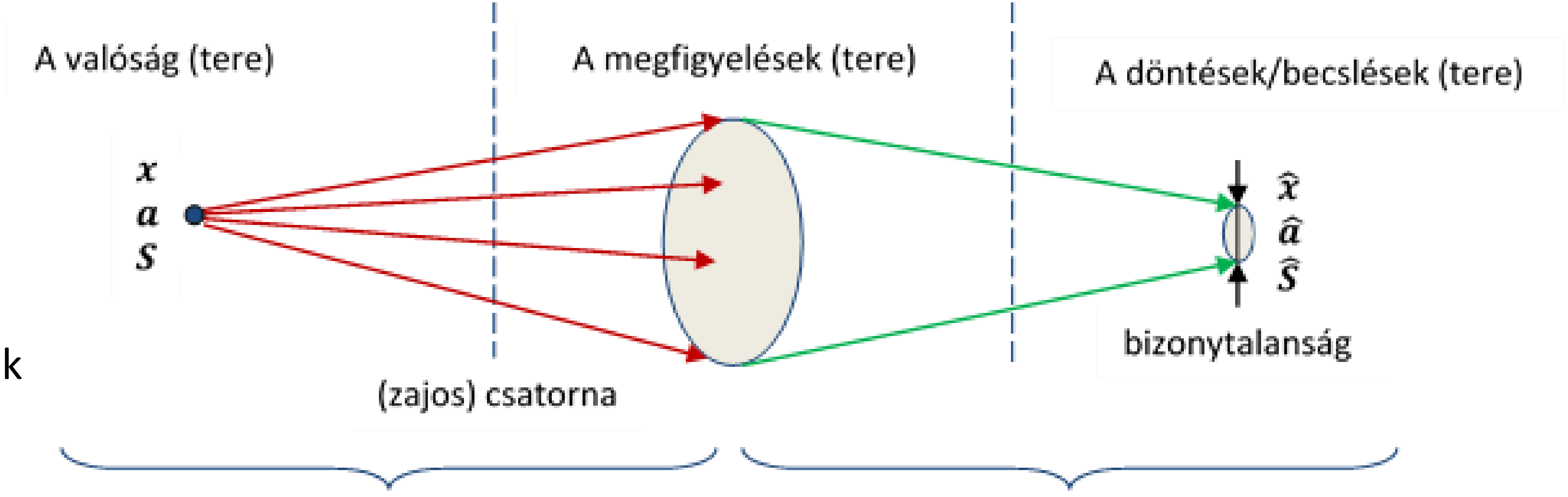
- az ***állapotváltozók*** ($\boldsymbol{x}$), amelyek változásai a kölcsönhatások révén fellépő energia-folyamatokhoz köthetők (feszültség, nyomás, hőmérséklet, sebesség, stb.)
- a ***paraméterek*** ($\boldsymbol{a}$), amelyek a kölcsönhatások intenzitásviszonyait ragadják meg, és
- a ***struktúrák*** ($\boldsymbol{S}$), amelyek a rendszer-komponensek kapcsolatait írják le.

A valóság „tere” egy olyan absztrakció, amelyben a vizsgált jellemzők konkrét értékei a tér egy pontjának felelnek meg.

A mérés előtt a pont koordinátáit **nem ismerjük**.

A mérések során egy-egy ilyen pont koordinátáinak meghatározására (megmérésére) törekszünk, ami – ismert módon – **csak közelítőleg** lehetséges (a mérés hibával terhelt).

További nehézség, hogy a **mérendő mennyiséghez** sok esetben nem férünk közvetlenül hozzá, ezért többnyire csak valamilyen leképzéséből tudunk kiindulni. Ezt a leképzést nevezzük **megfigyelés**nek.



megfigyelési folyamat | megfigyelési folyamat „inverze”

Környezet, amit modellezünk | A/D átalakító | Számítógép, amit programozunk

Modell | **Inverz modell**

Megfigyelés determinisztikus csatorna esetén:

A megfigyelt “valóságot” autonóm rendszerként képzeljük el, és diszkrét modellel írjuk le.

A „valóságot” és a megfigyelést leíró állapot, ill. megfigyelési egyenletek:

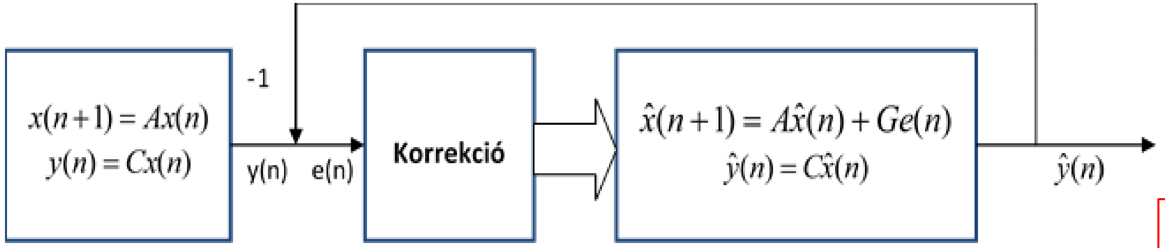
$$x(n+1) = Ax(n), \quad dim[x(n)] = N, \; dim[A] = N * N$$

$$y(n) = Cx(n) \quad dim[y(n)] = M, M \leq N, dim[C] = M * N$$

Tudunk egy ilyen modellt invertálni? **Általában nem!**

Mikor tudunk? Ha C^{-1} létezik!

Ha **nem létezik** C^{-1}, akkor mást kell csinálni! A megoldás egy **szimulátor!** Ehhez a modellnek **be kell épülnie** a számítógépbe!



Ennek az eszköznek a neve: **megfigyelő**, amely a „valóság" **másolata** igyekszik lenni azáltal, hogy egy korrekciós/tanuló/adaptáló mechanizmus eredményeképpen **követi** azt.

Célunk az $x(n)$ állapotvektor becslése.

Ezt vezéreljük a **megfigyelt értékekkel**! A követés bekövetkeztével a mérés „eredménye" $\hat{x}(n)$ a megfigyelőből olvasható ki.
A megfigyelőben megvalósuló „**másolat**" állapot, ill. megfigyelési egyenletei:

$$\boxed{\hat{x}(n+1) = A\hat{x}(n) + Ge(n)}$$

G: **korrekciós mátrix**; $dim[G] = N * M$, $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$

$$\boxed{\hat{y}(n) = C\hat{x}(n)}$$

A G mátrixot úgy tervezzük meg, hogy $\boxed{\hat{x}(n) \rightarrow x(n).}$

A minimalizálandó állapothiba az állapotegyenletek különbségeként írható fel:

$$\underbrace{x(n+1) - \hat{x}(n+1)}_{\varepsilon(n+1)} = Ax(n) - A\hat{x}(n) - Ge(n) = \underbrace{(A - GC)}_{F}\underbrace{(x(n) - \hat{x}(n))}_{\varepsilon(n)}.$$

$$\boxed{\varepsilon(n+1) = F\varepsilon(n)}$$

F az ún. **hibarendszer** állapotátmenet mátrixa.

A G mátrix tervezése: $\boxed{\varepsilon(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,}$ aminek érdekében $\varepsilon(n+1) < \varepsilon(n)$, lehetőleg $\forall\ n$-re.

F csökkenti $\varepsilon(n)$ hosszát minden lépésben: „**kontraktív**". Az $\varepsilon(n)$ hibavektorral kapcsolatos egyenlőtlenség a vektor hosszára (normájára) értelmezendő, skalár esetben pedig a hiba abszolút értékére. **Elvárás:** a hibarendszer a belső energiáját **disszipálja.**

Esetek: 1. $F = A - GC = 0.$ Ebben az esetben $G = AC^{-1}$. Ez akkor lehetséges, ha C négyzetes, azaz a megfigyelés éppen annyi komponensű, mint maga az állapotvektor! Az egyenlet explicit formában megoldható! A konvergencia egyetlen lépéses!

2. $F^N = (A - GC)^N = 0.$ Ebben az esetben a hibarendszer N lépésben konvergál:

$$\boxed{x(N) - \hat{x}(N) = (A - GC)^N(x(0) - \hat{x}(0)) = 0}$$

Az $F^N = 0$ tulajdonságú mátrixok, az ún. **nemderogatórius nilpotens** mátrixok, amelyek sajátja, hogy **valamennyi sajátértékük nulla**.

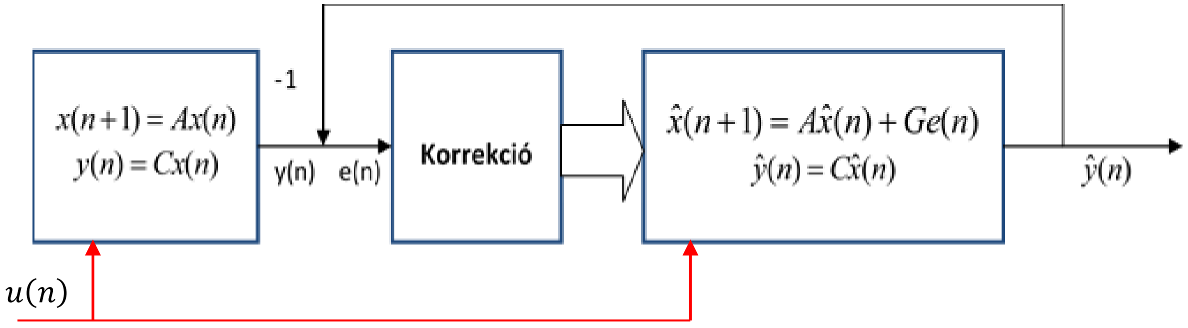
Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek **véges impulzusválaszúak** (ún. ***FIR*** rendszerek), hiszen a kezdeti hiba **véges lépésben** eltűnik.

3. Ha $F^N = (A - GC)^N \neq 0,$ akkor a stabilra tervezett hibarendszer állapotvektorának hossza **exponenciális jelleggel** csökken. Egy ilyen hibarendszer akkor lesz **stabil**, ha összes **sajátértéke** az egységsugarú körön **belül** helyezkedik el.
Az ilyen tulajdonságú állapotátmenet mátrixszal jellemezhető rendszerek **végtelen impulzusválaszúak** (ún. ***IIR*** rendszerek), mert a kezdeti hiba csak **végtelen lépésben** tűnik el.

Megjegyzések:

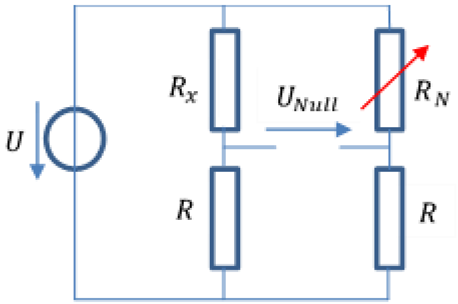
1. A megfigyelő elrendezés mindkét modellje „gerjeszthető” egy közös gerjesztéssel.

Mivel a modellek lineárisak, a **szuperpozíció** értelmében a megfigyelő konvergenciája változatlanul megvalósul.



2. Az ábra szerinti megfigyelőt **Luenberger megfigyelő**nek nevezzük. Luenberger szerint **majdnem minden rendszer** megfigyelő. A megfigyelő tulajdonság feltétele, hogy a megfigyelő legyen „gyorsabb”, mint a megfigyelt rendszer, különben nem képes követni a változásokat.

3. Egy ellenállás- vagy impedancia-mérő híd ismeretlen elemet tartalmazó hídága a valóság **fizikai modellje**, a kiegyenlítő elemet tartalmazó ága pedig a megfigyelőben felépülő, **beállítható/hangolható modell**.



A hídágak osztópontján megjelenő feszültségek különbsége vezérli a hangolást, és a végén a két feszültség megegyezik, a beállítható elemről leolvasott érték segítségével meghatározható az ismeretlen.

Ez az áramkör, a hangolást végző operátor részvételével megvalósítja a megfigyelőt.

Példa:

Adott $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Hogyan állítsuk be G-t? Milyen konvergenciát akarunk?

Itt van lehetőségünk egylépéses konvergenciára, ehhez az $A = GC$ lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\boxed{G = AC^{-1} = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

Példa: Adott $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$; $C = [1 \quad 1]$. Hogyan állítsuk be G-t? $\boxed{G = \begin{bmatrix}g_0\\ g_1\end{bmatrix} = ?}$ Itt nincs garancia az egylépéses konvergenciára! $N = 2$.

$GC = \begin{bmatrix}g_0\\ g_1\end{bmatrix}[1 \quad 1] = \begin{bmatrix}g_0 & g_0\\ g_1 & g_1\end{bmatrix}$, $[A - GC] = \begin{bmatrix}1 - g_0 & -g_0\\ -g_1 & -1 - 1g_1\end{bmatrix}$, $[A - GC]^2 = 0$ alapján:

$$\begin{bmatrix}1 - g_0 & -g_0\\ -g_1 & -1 - g_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 - g_0 & -g_0\\ -g_1 & -1 - g_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 - 2g_0 + g_0^2 + g_0 g_1 & -g_0 + g_0^2 + g_0 + g_0 g_1\\ -g_1 + g_1^2 + g_1 + g_0 g_1 & 1 + 2g_1 + g_1^2 + g_0 g_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

A mellékátló kifejezéseit a főátló kifejezéseibe behelyettesítve kapjuk: $\boxed{1 - 2g_0 = 0,}$ $\boxed{1 + 2g_1 = 0,}$ amiből: $g_0 = 0.5$, $g_1 = -0.5$.

Ellenőrzésképpen: $\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

Példa: Határozzuk meg $[A - GC]$ sajátértékeit erre az esetre: $det[\lambda I - A + GC] = 0$ $\quad det\begin{bmatrix}\lambda - 0.5 & 0.5\\ -0.5 & \lambda + 0.5\end{bmatrix} =$

$= (\lambda - 0.5)(\lambda + 0.5) + 0.25 = \lambda^2 - 0.25 + 0.25 = 0.$ $\boxed{\text{Mindkét sajátérték nulla.}}$

Megjegyzések:

1. Ez a tulajdonság **általánosan igaz** véges lépésben konvergálni képes rendszerek esetében.
2. Az ilyen rendszerek átviteli függvénye olyan (elfajuló) racionális törtfüggvény, amelynek **valamennyi pólusa az origóban** van:

$H(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N} = \dfrac{a_N + a_{N-1} z + a_{N-2} z^2 + \ldots + a_1 z^{N-1}}{z^N}$ Ezek az ún. **véges impulzusválaszú** (*FIR*) szűrők.

Időtartománybeli megfelelője: $y(n) = a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \ldots + a_N x(n-N)$, ahol a valós idejű **kiszámíthatóság** miatt csak $x(n)$ korábbi mintái szerepelhetnek!

Példa: A sajátértékekre vonatkozó feltétel felhasználható a g_0 és a g_1 értékek meghatározására:

$$det[\lambda I - A + GC] = 0,\ det\begin{bmatrix}\lambda - 1 + g_0 & g_0\\ g_1 & \lambda + 1 + g_1\end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda(g_0 + g_1) + g_0 - g_1 - 1 = \lambda^2 = 0.$$

Ebből: $g_0 + g_1 = 0$, ill. $g_0 - g_1 = 1$, amiből: $g_0 = 0.5$ és $g_1 = -0.5$. $\boxed{\text{Ugyanarra az eredményre jutottunk!}}$

Megfigyelés zajos csatorna esetén: Mivel a zajt véletlennek tételezzük fel, ezért a megfigyelt értékünk valószínűségi változó!

Ennek következtében a megfigyelő állapotváltozója, és ennek következtében a hibarendszer állapotváltozója is az lesz!
Ebben az esetben nem lehet $\varepsilon(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ az elvárásunk! Helyette a hibarendszer állapotváltozói által hordozott átlagos „teljesítmény/energia” szintet igyekszünk minimalizálni, amikor a G mátrix legjobb beállítását keressük.

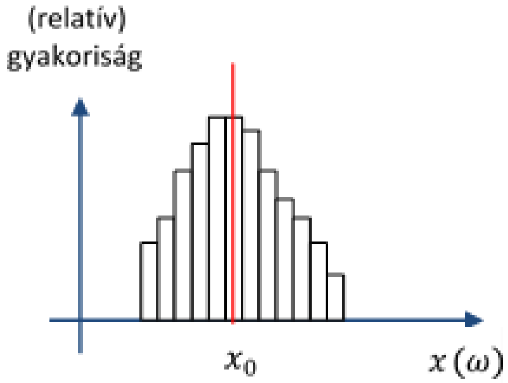
$$E\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\varepsilon_k^2(n)\right\}=E[\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n)]=trace\,E[\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)]=traceP(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}min$$

$\boxed{\varepsilon(n+1)=F\varepsilon(n)}$ helyett $\boxed{E[\varepsilon(n+1)\varepsilon^T(n+1)]=FE[\varepsilon(n)\varepsilon^T(n)]F^T=FP(n)F^T}$ hibarendszer jellemzést használunk.

1.4. A zajos csatorna modellezése

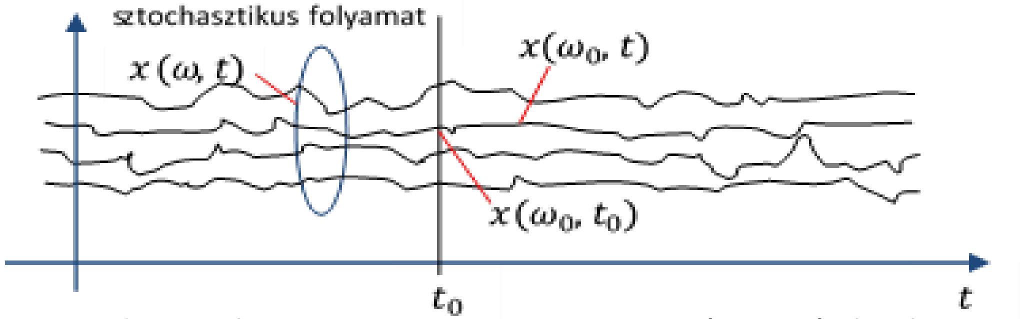
Véletlen események leírására valószínűségi változókat, ill. sztochasztikus folyamatokat használunk.
Az $x(\omega)$ valószínűségi változó egy olyan függvény, amely a valószínűségi eseménytér ω eseményeihez valós számokat rendel.

A véletlen jelenségekből származó mintákból hisztogramot készítve megkapjuk a valószínűség sűrűségfüggvény statisztikai jellemzését.



Ha a hisztogram felbontását minden határon túl finomítjuk, és végtelen számú kísérletet végzünk, akkor megkapjuk az $f(x)$ ún. valószínűség sűrűségfüggvényt.

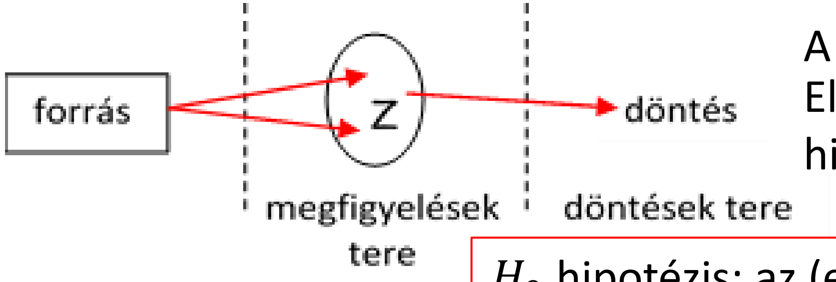
Az $x(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat egy olyan függvény, amely a valószínűségi eseménytér ω eseményeihez valós időfüggvényeket rendel.



Ezen függvények adott időpontbeli (pl. t_0) értékei egy valószínűségi változót reprezentálnak.

2. A döntéselmélet alapjai

Példa: detektálás radarral. Bináris vagy kéthipotézises döntés: eldöntendő a jelenlét vagy a jelen nem lét kérdése.



A csatorna zajos, ugyanarról a jelenségről rendre eltérő értékű megfigyeléseket kapunk. El kell döntenünk, hogy – egy vagy több megfigyelésre alapozva – a két lehetséges hipotézisből melyiket fogadjuk el:

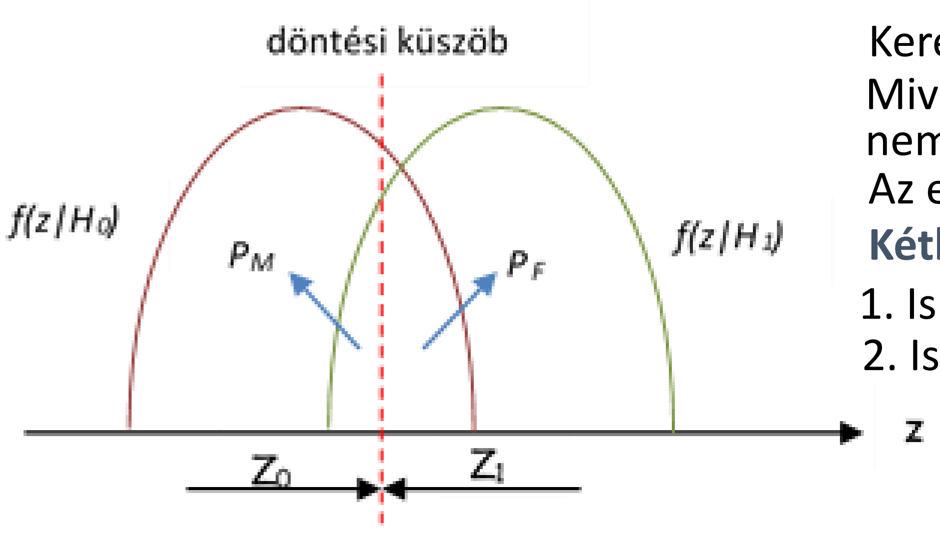
H_0 hipotézis: az (ellenséges) objektum nincs jelen.

H_1 hipotézis: az (ellenséges) objektum jelen van.

Lehetséges hibák: Elfogadjuk H_0-t, holott H_1 igaz. Ennek valószínűsége P_M (miss probability). Tévesztés valószínűsége

Elfogadjuk H_1-t, holott H_0 igaz. Ennek valószínűsége P_F (false alarm probability). Téves riasztás valószínűsége

A döntéshez előzetesen felvesszük a megfigyelések hisztogramját, és abból közelítőleg előállítjuk az $f(z|H_0)$ és $f(z|H_1)$ **feltételes sűrűségfüggvényeket**. Ezeket **csatorna- karakterisztikáknak** is nevezzük.



Keressük a döntési küszöböt valamilyen **optimum kritérium** szerint.

Mivel a sűrűségfüggvények átlapolódnak, ezért a döntési küszöb meghatározása nem triviális.

Az ehhez alkalmazható konkrét stratégia a rendelkezésre álló **információ** függvénye.

Kéthipotézises Bayes döntés: Alkalmazási feltételek:

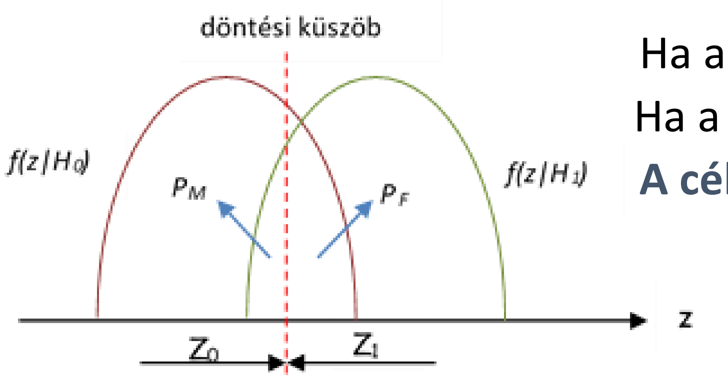
1. Ismerjük az ún. a priori valószínűségeket: $H_0 \rightarrow P_0$ és $H_1 \rightarrow P_1$.
2. Ismerjük a csatornakarakterisztikákat: $f(z|H_0)$ és $f(z|H_1)$.

Definiáljuk a költségeket:

C_{ij} annak a költsége, hogy az i-edik hipotézist fogadtuk el, holott a j-edik igaz.

Értelmezzük a bekövetkezési valószínűségeket:

$P(H_i|H_j)$, ahol az i index a feltételezett hipotézis, a j index pedig a bekövetkezett kimenetel azonosítója. (i és j most 0 vagy 1.)



Ha a küszöb alatti (Z_0) tartományba esik a mért érték, akkor H_0-t fogadjuk el.
Ha a küszöb feletti (Z_1) tartományba esik a mért érték, akkor H_1-t fogadjuk el.
A cél: a küszöb olyan beállítása, amely az átlagos **kockázatot** (risk)/**költséget** (cost) minimalizálja:

$$R = \underbrace{C_{00}P_0P(H_0|H_0)}_{\substack{\text{Annak költsége, hogy} \\ H_0 \text{ következett be,} \\ \text{és azt is fogadtuk el.}}} + \underbrace{C_{10}P_0P(H_1|H_0)}_{\substack{\text{Annak költsége, hogy} \\ H_0 \text{ következett be,} \\ \text{és } H_1\text{-t fogadtuk el.}}} + \underbrace{C_{01}P_1P(H_0|H_1)}_{\substack{\text{Annak költsége, hogy} \\ H_1 \text{ következett be,} \\ \text{és } H_0\text{-t fogadtuk el.}}} + \underbrace{C_{11}P_1P(H_1|H_1)}_{\substack{\text{Annak költsége, hogy} \\ H_1 \text{ következett be,} \\ \text{és azt is fogadtuk el.}}}$$

A kifejezés minimumát a döntési küszöb értékének alkalmas megválasztásával érjük el.

A bekövetkezési valószínűségek számítása:

$$P(H_i | H_j) = \int_{Z_i} f(z | H_j) dz,$$

$$R = C_{00}P_0 \int_{Z_0} f(z|H_0)dz + C_{10}P_0 \int_{Z_1} f(z|H_0)dz + C_{01}P_1 \int_{Z_0} f(z|H_1)dz + C_{11}P_1 \int_{Z_1} f(z|H_1)dz.$$

Mivel $\int_{Z_1} f(z|H_0)dz = 1 - \int_{Z_0} f(z|H_0),$ és $\int_{Z_1} f(z|H_1)dz = 1 - \int_{Z_0} f(z|H_1)dz.$

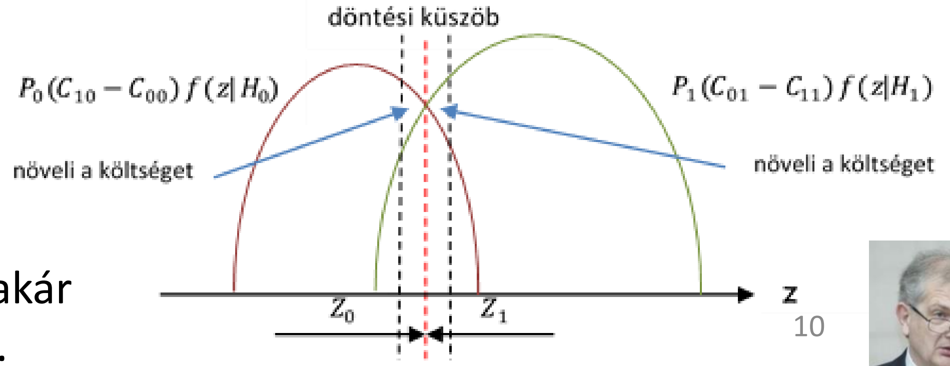
$$R = C_{10}P_0 + C_{11}P_1 + \underbrace{P_0(C_{00} - C_{10}) \int_{Z_0} f(z|H_0)dz}_{<0} + \underbrace{P_1(C_{01} - C_{11}) \int_{Z_0} f(z|H_1)dz}_{>0}.$$

Tegyük fel, hogy $C_{10} > C_{00}$, és $C_{01} > C_{11}$

Tekintsük a döntési küszöb helyét az összefüggésbeli egyváltozós integrál függvény független változójának!
Az átlagos kockázat minimuma a z változó azon értékénél (a keresett döntési küszöbértéknél) van, amelyre

$$\boxed{P_0(C_{10} - C_{00})f(z|H_0) = P_1(C_{01} - C_{11})f(z|H_1).}$$

A kiadódó döntési küszöbértéktől akár jobbra, akár balra eltérve az átlagos kockázat növekedni fog.



$$\boxed{P_0(C_{10}-C_{00})f(z|H_0)=P_1(C_{01}-C_{11})f(z|H_1)} \Rightarrow \frac{f(z|H_1)}{f(z|H_0)}=\frac{P_0(C_{10}-C_{00})}{P_1(C_{01}-C_{11})}=\eta=\Lambda(z)$$

valószerűség

ún. „likelihood” arány függvény

Ha az aktuálisan megfigyelt értéket behelyettesítjük a „likelihood” arány függvénybe, és ha $\Lambda(z)>\eta$, akkor a döntés H_1,

ha $\Lambda(z)<\eta$, akkor a döntés H_0.

$$\boxed{\Lambda(z)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}\eta}$$

Ez az ún. Bayes döntési szabály vagy likelihood arány teszt.

Megjegyzések:

1. Ha a költségeket úgy választjuk meg, hogy $\eta=\frac{P_0}{P_1}$ legyen, akkor a szabály $P_1 f(z|H_1)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}P_0 f(z|H_0)$ alakban írható.

utólagos

Ez megegyezik a $P(H_1|z)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}P(H_0|z)$ feltétellel, vagyis ilyenkor a döntést az *a posteriori* valószínűségek alapján hozhatjuk meg.

$P(H_0|z)$ annak a valószínűsége, hogy z-t mérve H_0, $P(H_1|z)$ pedig annak a valószínűsége, hogy z-t mérve H_1 következett be.

Ezt a speciális esetet maximum a posteriori (MAP) döntésnek nevezzük.

valószerűség

2. Szokás a $\lambda(z)=ln\,\Lambda\,(z)\underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}}ln\,\eta=\gamma$, ún. log-likelihood arányt is használni.