Méréselmélet

7. fejezet: Modellalapú jelfeldolgozás (folyt.)

Összefoglalás

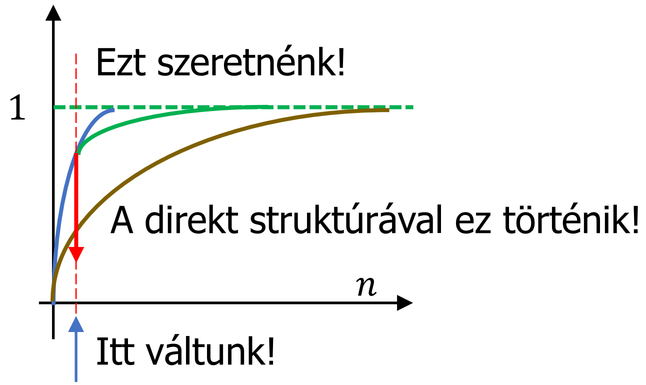
2021. május 12.

Paramétereiket/struktúrájukat változtató, ún. variáns rendszerek: adaptív/hangolható/átkapcsolható…

Átkapcsolások tranziens jelenségeinek struktúrafüggése

Kis sávszélességű merőcsatornával mérünk a kellő zajelnyomás érdekében. Kis sávszélesség esetében a beállás lassú.

Gyorsítsuk a beállást úgy, hogy a bekapcsolást követően egy ideig nagyobb sávszélességet biztosítunk, majd keskenyebbre váltunk!

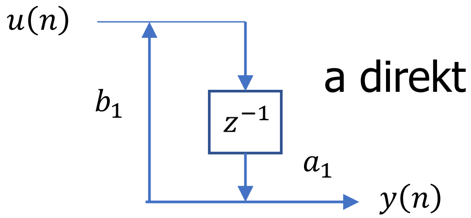


Az egyszerűség kedvéért a jelenségeket elsőfokú aluláteresztő szűrőkkel demonstráljuk.

A megvalósítandó átviteli függvény: $H(z) = \dfrac{a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$

amelynek átvitele a 0 frekvencián 1, tehát $z = 1$ helyettesítéssel $H(0) = \dfrac{a_1}{1 - b_1} = 1$,

ahonnan $a_1 = 1 - b_1$. A nagyobb sávszélesség esetén legyen $b_1 = 0.5$, a kisebb sávszélesség esetén pedig $b_1' = 0.8$. A váltás eredménye!

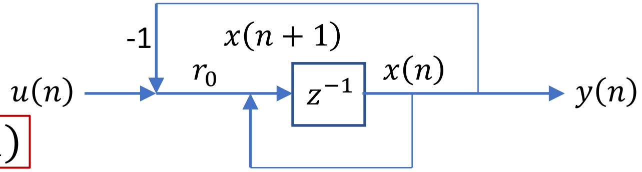


a direkt struktúra

Ezzel $a_1 = 0.5$, ill. $a_1' = 0.2$ jár.

A rezonátoros struktúra esetén célszerűen $z_0 = 1$ választással:

$$H(z) = \frac{\dfrac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} w_0}{1 + \dfrac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}}} = \frac{r_0 z^{-1}}{1 - (1 - r_0) z^{-1}} w_0 = \frac{a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$$



Innen $w_0 = 1$, $r_0 = 1 - b_1$, ill. $r_0 = a_1 = 0.5$, és $r_0' = a_1' = 0.2$. $\boxed{y(n) = a_1 u(n-1) + b_1 y(n-1)}$

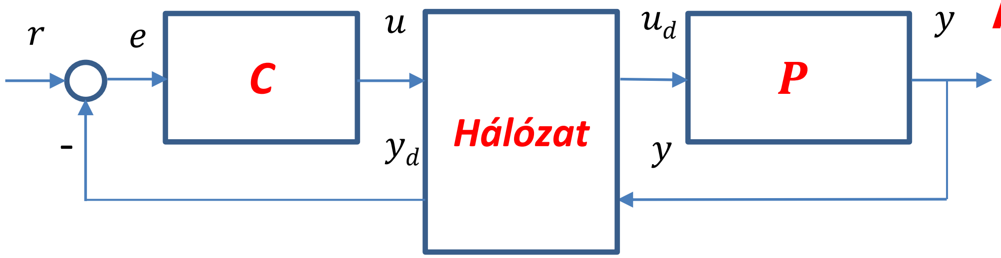
válasz	direkt struktúra	rezonátoros struktúra
$y(0)$	0	0
$y(1)$	a_1	r_0
$y(2)$	$a_1(1 + b_1)$	$r_0 + (1 - r_0) r_0$
$y(3)$	$a_1(1 + b_1 + b_1^2)$	$r_0 + (1 - r_0) r_0 + (1 - r_0)^2 r_0$
$y(4)$	$a_1(1 + b_1 + b_1^2 + b_1^3)$	$r_0 + (1 - r_0) r_0 + (1 - r_0)^2 r_0 + (1 - r_0)^3 r_0$
$y(n)$	$a_1(1 + b_1 + \cdots + b_1^{n-1}) = a_1 \dfrac{1 - b_1^n}{1 - b_1}$	$r_0(1 + (1 - r_0) + \cdots + (1 - r_0)^{n-1}) = 1 - (1 - r_0)^n$

válasz	gyors	lassú
$y(0)$	0	0
$y(1)$	0.5	0.2
$y(2)$	0.75	0.36
$y(3)$	0.875	0.488
$y(4)$	0.9375	0.5904
$y(n)$	$\to 1$	$\to 1$

válasz	direkt	rezon.
$y(0)$	0	0
$y(1)$	0.5	0.5
$y'(2)$	0.3	0.75
$y'(3)$	0.44	0.8
$y'(4)$	0.552	0.84
$y(n)$	→1	→1

Megjegyzés: Ebben a példában a transzponált direkt struktúra is jól viselkedik!

Passzivitás az irányítástechnikában: szabályozás hálózaton keresztül

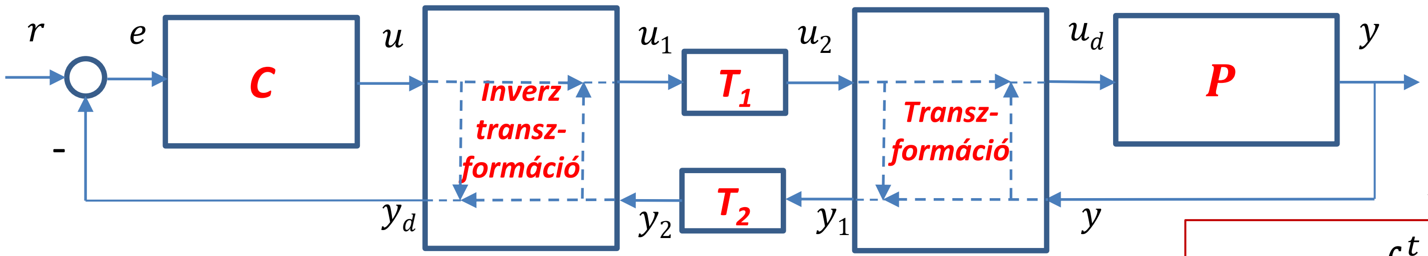


P passzív rendszer: $t = 0$-ban energiamentes

A ***P*** szakasz passzivitásának feltétele, hogy ne termeljen energiát:

$$\boxed{\int_0^t P_{in}(\tau)d\tau = \int_0^t u_d(\tau)y(\tau)d\tau \geq 0} \qquad \boxed{\forall t > 0}$$

A hálózat késleltetése a szabályzó tervezés hagyományos módszereinek alkalmazását nem teszi lehetővé.
Ún. passziváló transzformációt vezetünk be annak érdekében, hogy a szabályzó által látott szakasz passzív maradjon.



$$u_2(t) = u_1(t - T_1)$$

$$y_2(t) = y_1(t - T_2)$$

A hálózatban tárolt energia:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} u(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_d(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_2(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{V_N(t) = \int_0^t [\underbrace{(u_1^T(\tau)u_1(\tau) + y_1^T(\tau)y_1(\tau)}_{\text{A hálózatba bevitt energia}} - \underbrace{u_2^T(\tau)u_2(\tau) - y_2^T(\tau)y_2(\tau)]}_{\text{A hálózatból kivett energia}}d\tau}$$

$$V_N(t) = \int_{t-T_1}^t u_1^T(\tau)u_1(\tau)d\tau + \int_{t-T_2}^t y_1^T(\tau)y_1(\tau)d\tau \geq 0 \quad \forall\text{t-re.}$$

Mivel a hálózatban tárolt energia nemnegatív, a kontroller oldalán a bevitt és kivett energia különbözete ≥ mint a hálózatból továbbküldött, ill. befogadott energiák különbsége:

$$\boxed{\underbrace{\int_0^t [(u_1^T(\tau)u_1(\tau) - y_2^T(\tau)y_2(\tau)]d\tau}_{\text{A } P \text{ szakasz transzformált + a hálózat belső energiája}} \geq \underbrace{\int_0^t [u_2^T(\tau)u_2(\tau) - y_1^T(\tau)y_1(\tau)]d\tau}_{\text{A } P \text{ szakasz transzformált belső energiája}}}$$

$$\int_0^t (u_d^T(\tau)y(\tau)\,d\tau = \int_0^t [u_2^T(\tau)u_2(\tau) - y_1^T(\tau)y_1(\tau)]d\tau$$

$$\int_0^t u^T(\tau)y_d(\tau)\,d\tau = \int_0^t [u_1^T(\tau)u_1(\tau) - y_2^T(\tau)y_2(\tau)]d\tau$$

Keresett az a transzformáció, amely a P folyamat belső energiáját a megadott formába transzformálja:

$$\begin{bmatrix} u_d(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} \\ t_{10} & t_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \qquad \int_0^t (u_d^T(\tau) y(\tau)\, d\tau = \int_0^t [u_2^T(\tau) u_2(\tau) - y_1^T(\tau) y_1(\tau)] d\tau$$

Egy lehetséges megoldás: $\boxed{\begin{bmatrix} u_d(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}}$

Keresett az a transzformáció, amely a P folyamat transzformált + a hálózat belső energiáját a megadott formába transzformálja:

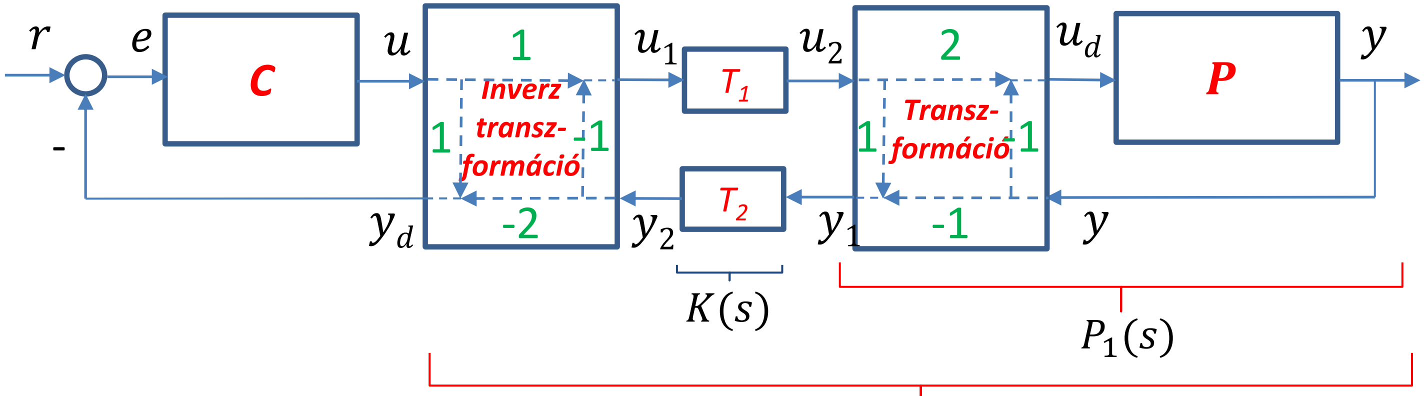
$$\begin{bmatrix} u(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{00} & t_{01} \\ t_{10} & t_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \qquad \int_0^t u^T(\tau) y_d(\tau)\, d\tau = \int_0^t [u_1^T(\tau) u_1(\tau) - y_2^T(\tau) y_2(\tau)] d\tau$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} u(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}}$$

A hozzátartozó Implementáció: $\boxed{\begin{bmatrix} u_d(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}$ $\boxed{\begin{bmatrix} u_1(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}}$

Megjegyzés: $\begin{bmatrix} u_d(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_2(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$



$0 < |a| \le 1$ $\qquad \begin{bmatrix} u_d(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/a & -1/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ y_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 1 & -2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

$P(s)$ helyett: $\qquad P_2(s) = \dfrac{1 - K(s) + P(s)(1 + K(s))}{1 + K(s) + P(s)(1 - K(s))} \qquad P_1(s) = 1 - 2\dfrac{P(s)}{1 + P(s)}$

De: $P_2(s)$ passzív tetszőleges késleltetésre, ha P az.

Vissza a transzformációkhoz: Ortogonális transzformáció adatredukciós céllal

Főkomponens analízis/Karhunen-Loéve transzformáció:

Célunk az utóbbi dimenziójának csökkentése átlagos négyzetes kritérium szerint optimálisan.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{T}^T = [\boldsymbol{\phi}_0 \quad \boldsymbol{\phi}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_{N-1}],\ \boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{\phi}_j = \delta_{ij}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i\boldsymbol{\phi}_i\,, \qquad \hat{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=0}^{M-1} x_i\boldsymbol{\phi}_i + \sum_{i=M}^{N-1} b_i\boldsymbol{\phi}_i$$

$$\Delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=M}^{N-1}(x_i - b_i)\boldsymbol{\phi}_i$$

Az eddigi jelöléseket alkalmazzuk. A reprezentálandó jel mintáit az $\boldsymbol{y}$ a reprezentáló értékeket pedig az $\boldsymbol{x}$ vektorba rendezzük.

Ehhez egy ortogonális bázis-reciprok bázis rendszert keresünk a jelhez:

Az $\boldsymbol{y}$ reprezentációja a teljes, ill. a redukált rendszerben:

Látható, hogy $M < N$ számú együtthatóval akarjuk reprezentálni a jelet, a maradék $N - M$ bázisvektor súlytényezőjét pedig hibaminimalizálással határozzuk meg. A közelítés hibája:

Az átlagos négyzetes hiba:

$$\varepsilon = E\{|\Delta\boldsymbol{y}|^2\} = E\{(\Delta\boldsymbol{y})^T\Delta\boldsymbol{y}\} = \sum_{i=M}^{N-1} E\{(x_i - b_i)^2\}.$$

Első lépésben keressük a minimális hibát okozó b_i tényezőket! Deriválás után: $\boxed{b_i = E\{x_i\},\ i = M, M+1, \dots, N-1.}$

Mivel $x_i = \boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{y}$, ezért $b_i = \boldsymbol{\phi}_i^T E\{\boldsymbol{y}\} = \boldsymbol{\phi}_i^T\overline{\boldsymbol{y}}$, amit behelyettesítve a hiba összefüggésébe:

$$\varepsilon = \sum_{i=M}^{N-1} \boldsymbol{\phi}_i^T\, E\{(\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}})^T\}\boldsymbol{\phi}_i = \sum_{i=M}^{N-1} \boldsymbol{\phi}_i^T\, \boldsymbol{C}_{yy}\boldsymbol{\phi}_i,$$

ahol $\boldsymbol{C}_{yy}$ a reprezentálandó jel kovariancia mátrixa.

Második lépésként keressük azt a $\boldsymbol{\phi}_i$, $i = 0,1,\dots,N-1$ bázisrendszert, amelyre $\boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{\phi}_i = 1$, és a hibát minimalizálja. Ehhez a feltételes szélsőérték kereséshez a Lagrange multiplikátoros módszert alkalmazzuk:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \sum_{i=M}^{N-1}\beta_i\,[\boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{\phi}_i - 1] = \sum_{i=M}^{N-1}\left[\boldsymbol{\phi}_i^T\,\boldsymbol{C}_{yy}\boldsymbol{\phi}_i - \beta_i[\boldsymbol{\phi}_i^T\boldsymbol{\phi}_i - 1]\right],$$

β_i, $i = M, M+1, \dots, N-1$, a Lagrange multiplikátor.

Deriválunk $\boldsymbol{\phi}_i$szerint: $\dfrac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\boldsymbol{\phi}_i} = 2\boldsymbol{C}_{yy}\boldsymbol{\phi}_i - 2\beta_i\boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{0}$ ahonnan: $\boxed{\boldsymbol{C}_{yy}\boldsymbol{\phi}_i = \beta_i\boldsymbol{\phi}_i,}$

azaz a Lagrange multiplikátorok az $\boldsymbol{y}$ vektor $\boldsymbol{C}_{yy}$ kovariancia mátrixának alkalmas sajátértékei.

Ezt visszahelyettesítve $\boxed{\varepsilon_{min} = \sum_{i=M}^{N-1}\beta_i\,,}$

azaz az átlagos négyzetes értelemben legkisebb közelítési hiba eléréséhez bázis-vektorokként az $\boldsymbol{y}$ kovariancia mátrixának sajátvektorai közül azt a M ún. főkomponenst kell kiválasztani, amelyhez az M legnagyobb sajátérték tartozik.

$$\boldsymbol{C}_{xx} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{C}_{yy}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{C}_{yy}\boldsymbol{T}^T = diag < \beta_0 \quad \beta_1 \quad \dots \quad \beta_{N-1} >$$

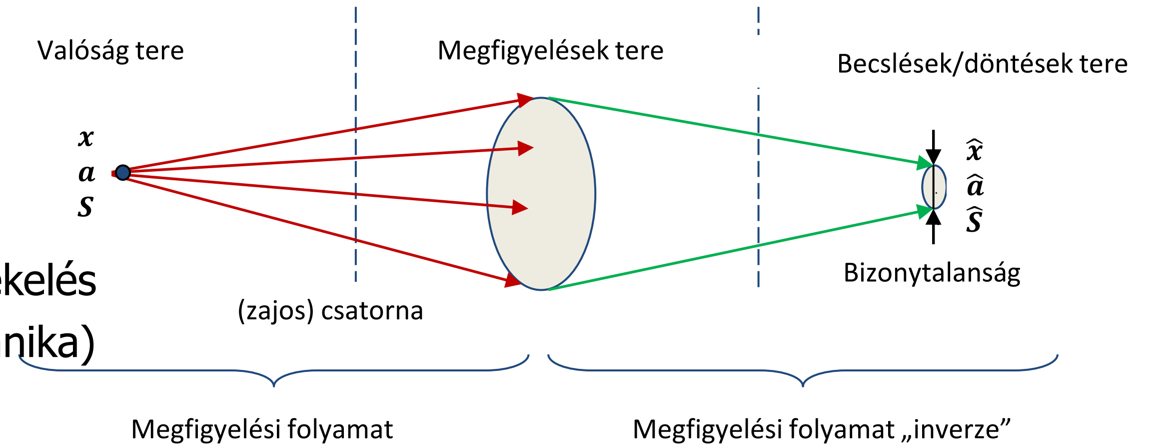
Méréselmélet mindössze 5 oldalon!

Összefoglalás és üzenetek:

Megfigyelő elmélet alapú tárgyalás

Lehetőleg rekurzív/valós idejű kiértékelés

Hatékony megvalósítás (műszertechnika)

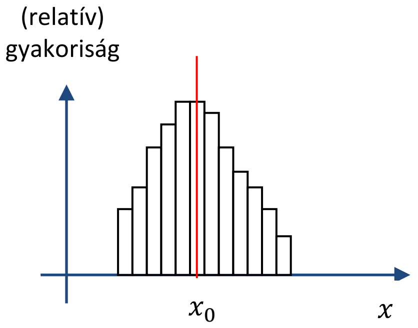


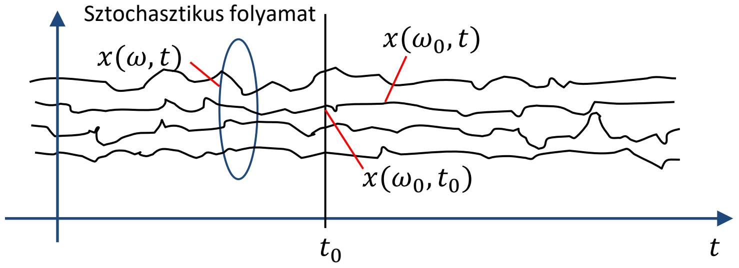
1. Bevezetés

A mérés minőségét egyrészt annak pontosságával (accuracy) jellemezzük, azaz milyen közel van a mért érték a helyes (elméleti) értékhez, másrészt a mért értékek „együttfutásával” (precision), azaz avval, hogy milyen közel vannak egymáshoz a mért értékek.

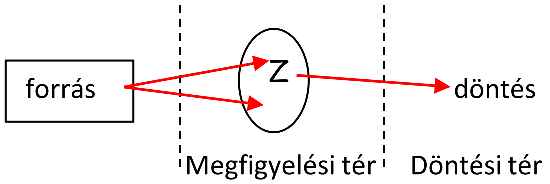
$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$$

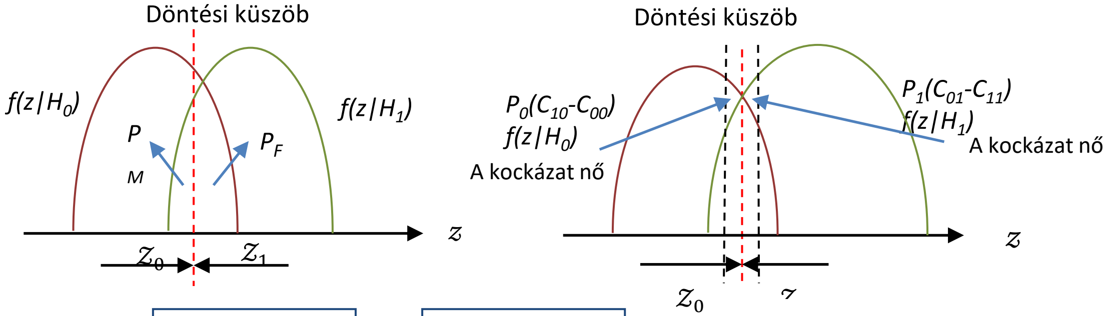
Véletlen folyamatok

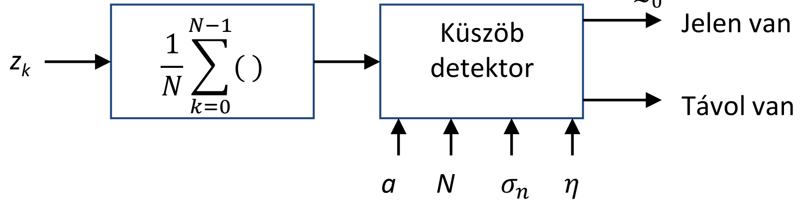




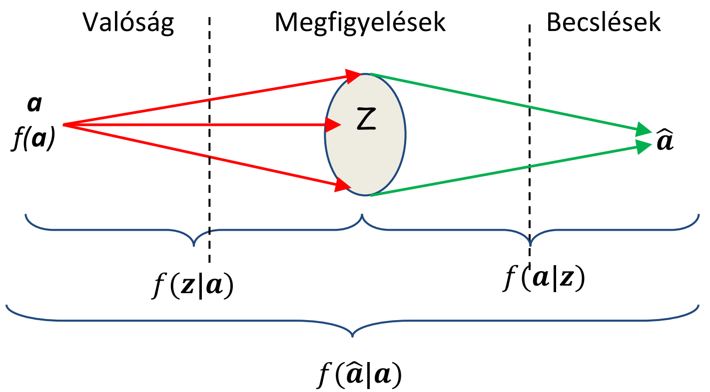
2. Döntéselmélet alapjai



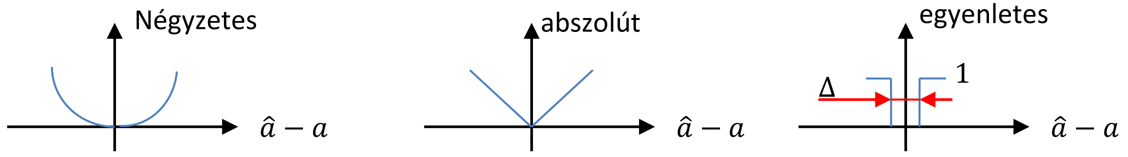




3. Becsléselmélet alapjai



3.1. Bayes becslések:



3.1.1. Minimális átlagos négyzetes hibájú becslő: $\hat{a}_{MS}=\int_{-\infty}^{\infty} af(a|z)da,$

3.1.2. Minimális átlagos abszolút hibájú becslő: $\hat{a}_{ABS}=f(a|z)$ mediánja.

3.1.3. Maximum a posteriori (MAP) becslés: $\hat{a}_{MAP}=f(a|z)$ maximumhelye

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{MS}=\boldsymbol{\mu}_{a|z}=\underbrace{\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{a}}}_{\text{apriori ismeret}}+\underbrace{[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{nn}}^{-1}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{nn}}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{a}})}_{\text{korrekció } z-U\mu_a \text{függvényében}}$$

$$cov\{a,a|\boldsymbol{z}\}=\boldsymbol{\Sigma}_{aa|z}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{nn}}^{-1}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1}]^{-1}$$

3.2. Maximum Likelihood (ML) becslő: $\left.\frac{\partial f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right|_{a=\hat{a}_{ML}}=0$, vagy $\left.\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right|_{a=\hat{a}_{ML}}=0$, $\hat{\boldsymbol{a}}_{GM}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{nn}}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{nn}}^{-1}\boldsymbol{z},$

3.3. Becslők determinisztikus paraméterek esetén:

$mse(\hat{a})=E\{[\hat{a}-E[\hat{a}]+E[\hat{a}]-a]^2\}=E\{[\hat{a}-E[\hat{a}]+b(a)]^2\}=var(\hat{a})+b^2(a)$. Minimális varianciájú torzítatlan becslő (MVU becslő)

$$var(\hat{a})\geq CRLB(a)$$

$$var(\hat{a})\geq\left[-E\left(\frac{\partial^2 \ln f(z;a)}{\partial a^2}\right)\right]^{-1},$$

$$\frac{\partial \ln f(z;a)}{\partial a}=I(a)(g(z)-a),$$

$$var(\hat{a})\geq\frac{\sigma_w^2}{\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\partial s_n(a)}{\partial a}\right]^2}$$

Lineáris modell + Gauss eloszlású fehér zaj:

$$\hat{\boldsymbol{a}}=g(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z},\qquad \boldsymbol{C}_{\hat{\boldsymbol{a}}}=\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{a})=\sigma^2(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U})^{-1}$$

Legjobb lineáris torzítatlan becslő (BLUE):

$$\hat{\boldsymbol{a}}=(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z},\qquad \boldsymbol{C}_{\hat{\boldsymbol{a}}}=(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U})^{-1}$$

Legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslők: $J(\boldsymbol{a})=\sum_{k=0}^{N-1}(z_k-s_k(\boldsymbol{a}))^2.$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{LS}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z}$$

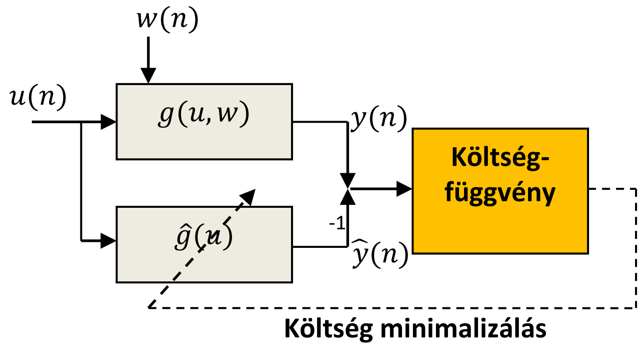
$$J(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{a}}_{LS})=\boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}}_{LS})$$

Maximum Likelihood (ML) becslő:

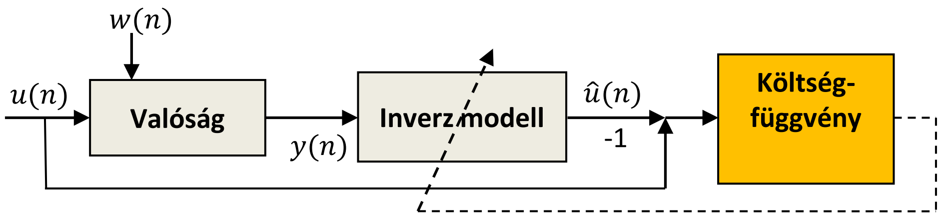
A csatornakarakterika maximumhelye …

4. Modellillesztés

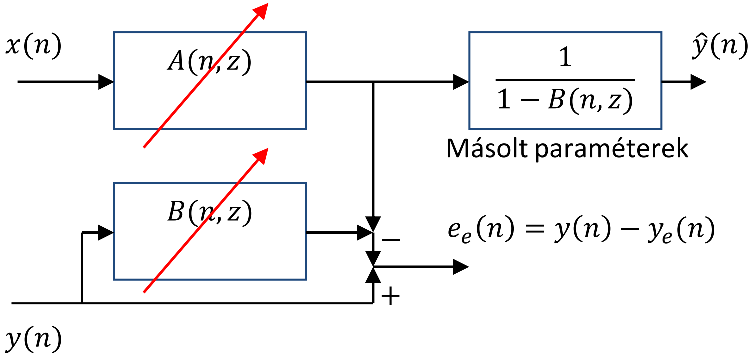
4.1. Regresszió-számítás:



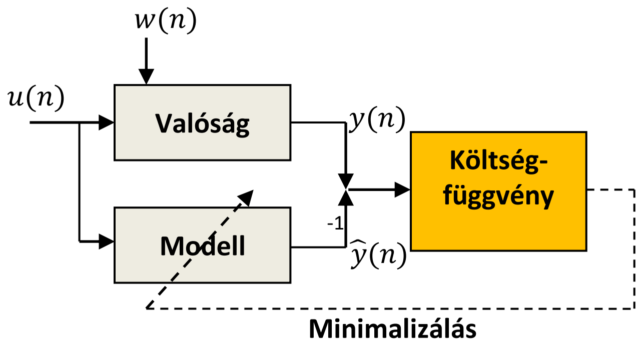
Inverz modellezés:

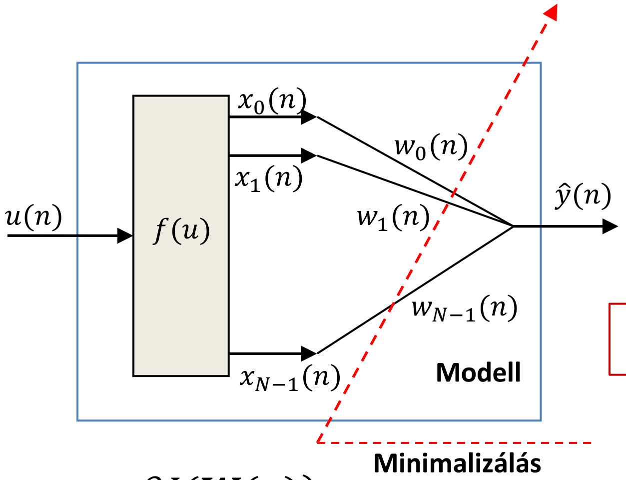


Visszavezetés FIR problémára (Equation-Error Formulation):



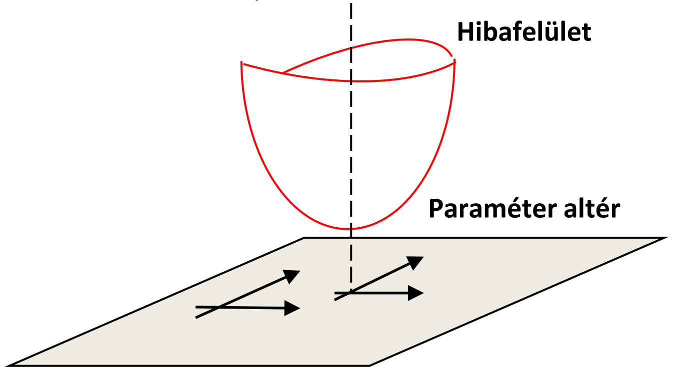
A regressziós séma általánosítása:

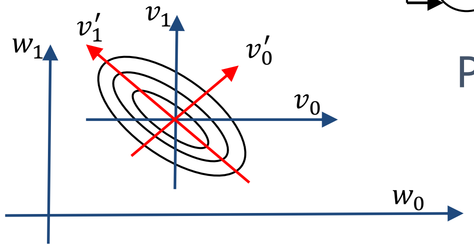




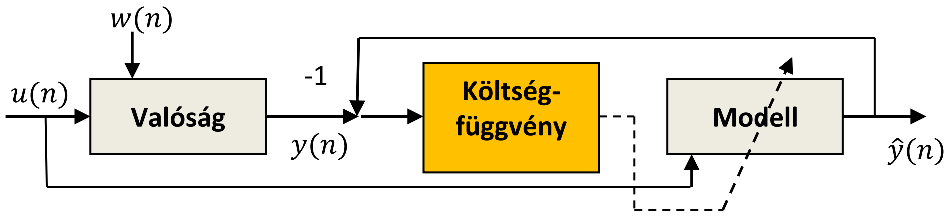
$$\boxed{\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{P}}$$

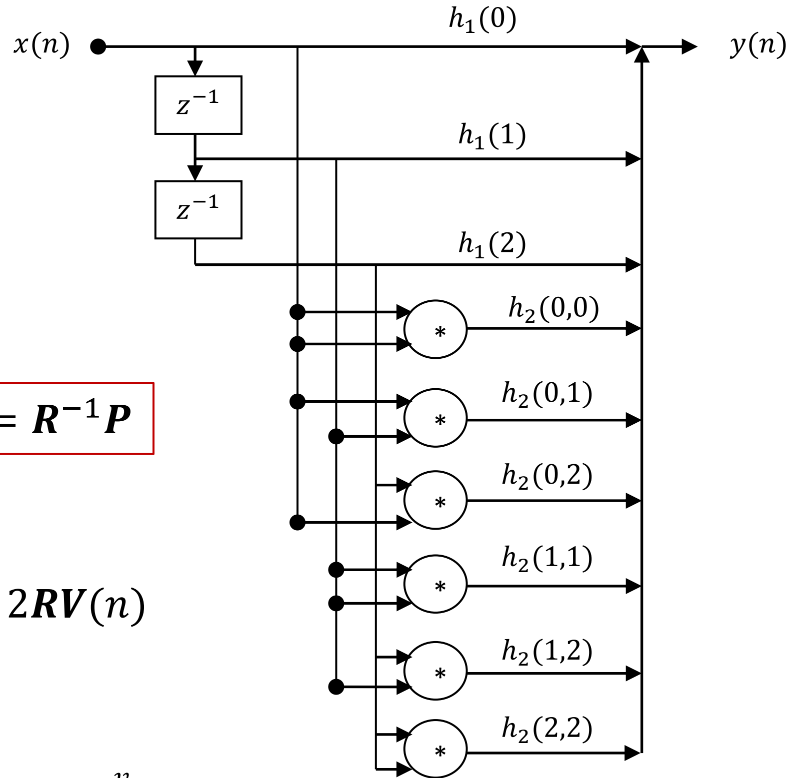
$$\nabla(n) = \frac{\partial J(\boldsymbol{W}(n))}{\partial \boldsymbol{W}(n)} = 2\boldsymbol{R}[\boldsymbol{W}(n) - \boldsymbol{W}^*] = 2\boldsymbol{R}\boldsymbol{V}(n)$$





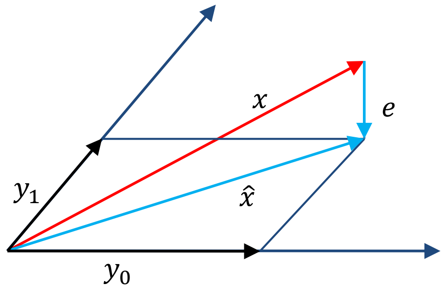
Megfigyelő séma:

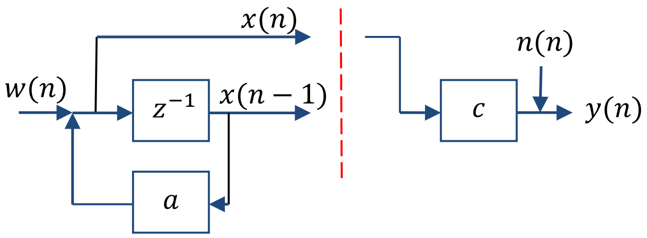


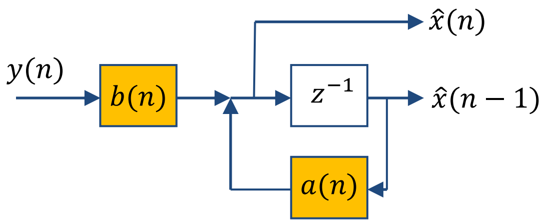


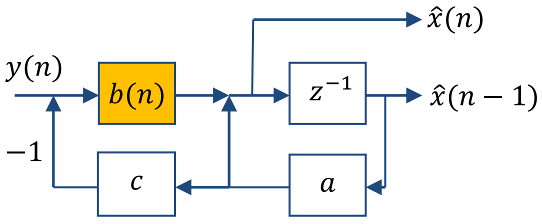
Polinomiális szűrő

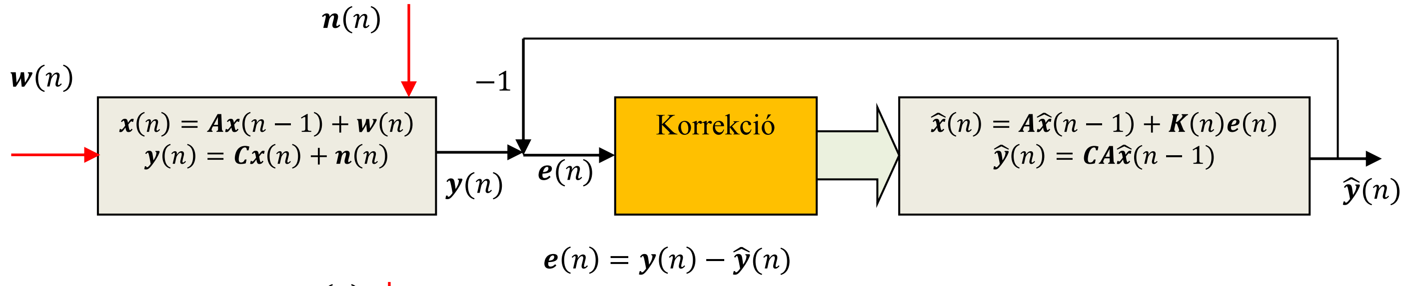
5. Szűréselmélet alapjai

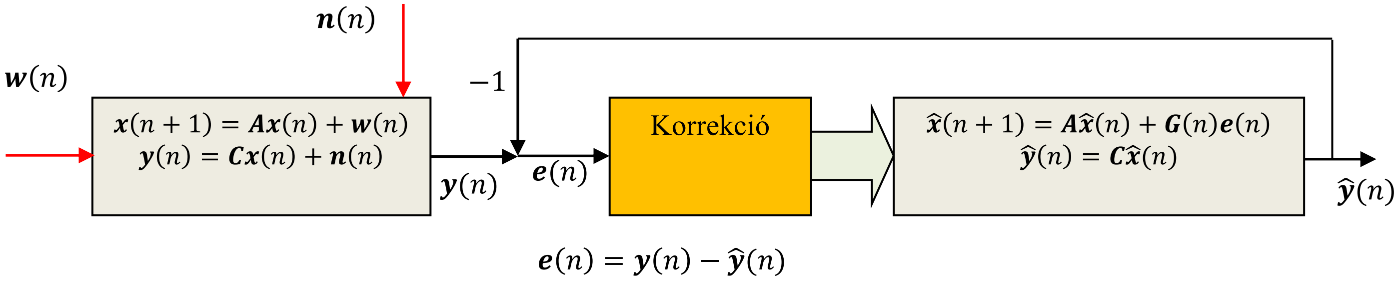












$$\boldsymbol{P}(n) = E\{[\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)][\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)]^T\} = E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n)\}$$

$$\boxed{\begin{gathered}
\hat{\boldsymbol{x}}(n) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1) + \boldsymbol{K}(n)[\boldsymbol{y}(n) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1)] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1) + \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{e}(n)\\
\boldsymbol{P}_1(n) = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)]\\
\boldsymbol{K}(n) = \boldsymbol{P}_1(n)\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_1(n)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}(n)]^{-1}\\
\boldsymbol{P}(n) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}_1(n)
\end{gathered}}$$

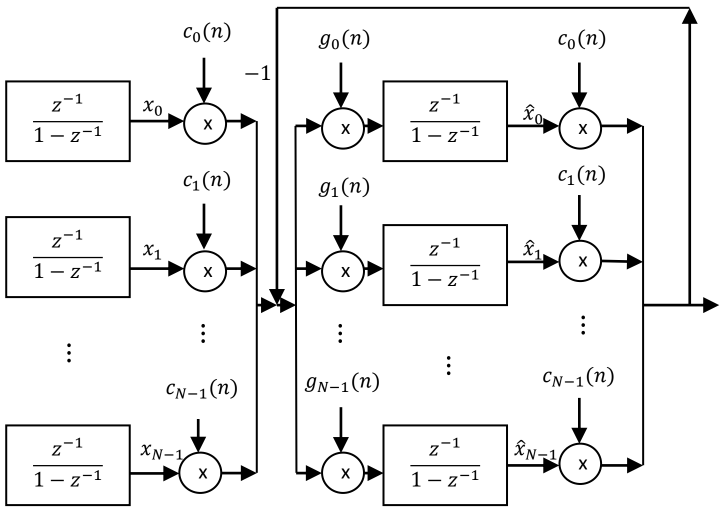
$$\boldsymbol{P}(n+1) = E\{[\boldsymbol{x}(n+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(n+1)][\boldsymbol{x}(n+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(n+1)]^T\} = \\ = E\{\boldsymbol{\varepsilon}(n+1)\boldsymbol{\varepsilon}^T(n+1)\}$$

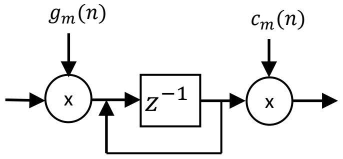
$$\boxed{\begin{gathered}
\hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{G}(n)[\boldsymbol{y}(n) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(n)] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{e}(n)\\
\boldsymbol{G}(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}(n)]^{-1}\\
\boldsymbol{P}(n+1) = [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)
\end{gathered}}$$

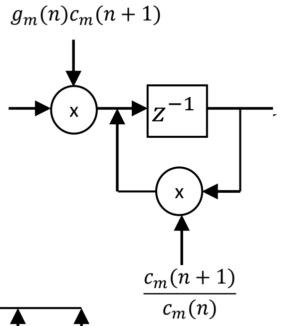
6. LS becslők rekurzív számítása

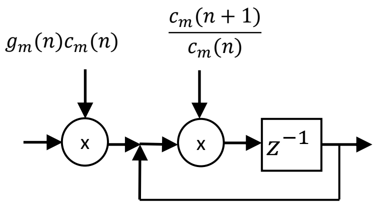
$$\boxed{\begin{gathered}
\hat{\boldsymbol{a}}(n+1) = \hat{\boldsymbol{a}}(n) + \boldsymbol{G}(n)[z(n) - \boldsymbol{u}(n)\hat{\boldsymbol{a}}(n)]\\
\boldsymbol{G}(n) = \frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}{1 + \boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}\\
\boldsymbol{P}(n+1) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{u}(n)]\boldsymbol{P}(n)
\end{gathered}}$$

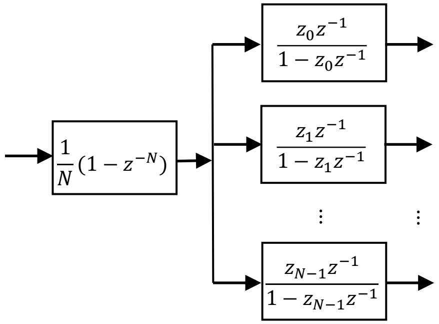
7. Modellalapú jelfeldolgozás

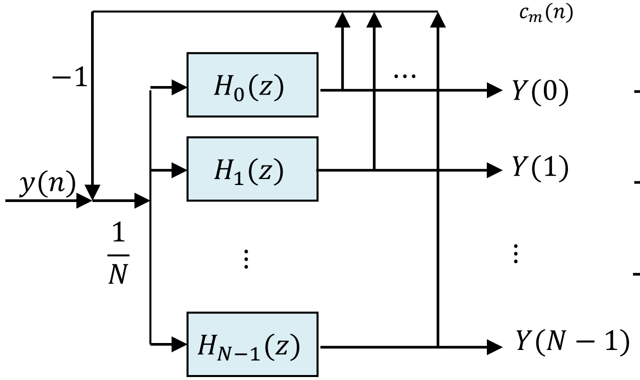


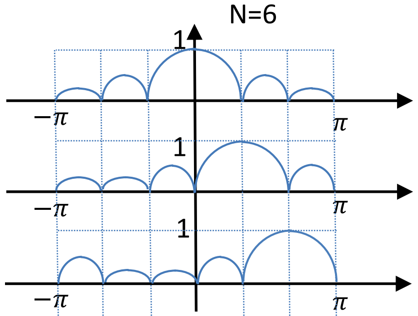












$$\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{x}(n); \quad y(n) = \boldsymbol{c}^T(n)\boldsymbol{x}(n),$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{g}(n)\boldsymbol{c}^T(n)[\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)]$$

$$\boldsymbol{x}(n+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(n)\boldsymbol{c}^T(n)\right)[\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)],$$

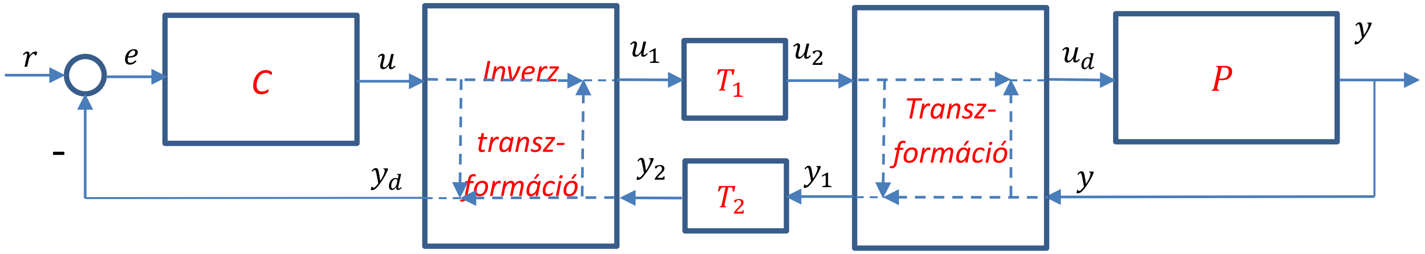
$$\boldsymbol{x}(n+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \prod_{k=0}^{n} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T(k))[\boldsymbol{x}(0) - \hat{\boldsymbol{x}}(0)]$$

$$\prod_{k=0}^{N-1} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T(k)) = 0\,.$$

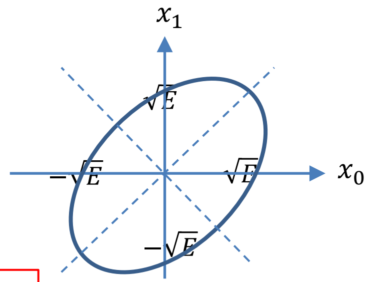
$$[\boldsymbol{x}^T(n+1) \quad y(n)] \begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{x}^T(n) \quad u(n)]\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T} \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix},$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) + y^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) + u^2(n).$$

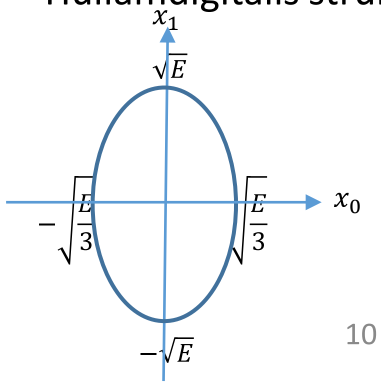
$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) = -y^2(n),$$



Direkt struktúra:



Hullámdigitális struktúra:



Köszönöm a figyelmet!