Méréselmélet

7. fejezet: Modellalapú jelfeldolgozás (folyt.)

2021. május 5.

Emlékeztető

Fontos tanulság a 10. előadásról: 1) Vannak jó és kevésbé jó struktúrák/kiszámítási módok

2) „Műszertechnika” szerepe

Az ún. ortogonális struktúrák általában:

Az ortogonális struktúrákat úgy definiáljuk, hogy az $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$ formájú rendszerleírásban, a $\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I}$, azaz $\boldsymbol{T}^T = \boldsymbol{T}^{-1}$, azaz $\boldsymbol{T}$ ortogonális mátrix.

Itt $\boldsymbol{x}(n)$ a rendszer állapotvektorát, $y(n)$ és $u(n)$ a skalár kimenet és a skalár bemenet diszkrét időfüggvényét jelöli.

Képezzük a fenti összefüggés mindkét oldalának önmagával vett skalár-szorzatát!

$$[\boldsymbol{x}^T(n+1) \quad y(n)] \begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = [\boldsymbol{x}^T(n) \quad u(n)]\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T} \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$$

Kifejtve: $\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) + y^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) + u^2(n).$

Ha feltételezzük, hogy a bemenet nulla, azaz $u(n) = 0$, akkor $\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) = -y^2(n)$ alakban írható.

Eszerint, ha van nem nulla kimenőjel, akkor az állapotváltozók által hordozott belső energiának csökkennie kell!

Ezt a tulajdonságot kiegészítve az **abszolút-érték csonkítás** stratégiájával garantálható, hogy a paraméterektől egyébként függetlenül a magára hagyott rendszer belső energiáját disszipálni fogja, és így ún. **határciklus oszcillációk** nem alakulnak ki.

Ez a feltétel teljesíthető a rezonátoros struktúra esetére!

$\boldsymbol{A} = diag\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1}\rangle$, $\quad \boldsymbol{G}' = [z_0\sqrt{r_0} \quad z_1\sqrt{r_1} \quad \cdots \quad z_{N-1}\sqrt{r_{N-1}}]$ $\quad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^T$ $\quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{C} = [\sqrt{r_0} \quad \sqrt{r_1} \quad \cdots \quad \sqrt{r_{N-1}}]$ jelölésekkel, ahol a felső vessző most transzponálást, a „T” pedig a transzponált konjugáltat jelöl:

$$\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C})^T & \boldsymbol{C}^T \\ \boldsymbol{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C})^T(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} = \underbrace{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{I}} - \underbrace{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}} - \underbrace{\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}} + \underbrace{\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{C}^T\underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T}\boldsymbol{C}} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I},$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C})^T\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{G} - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G} = \underbrace{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{C}^T - \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}\underbrace{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{C}^T = \boldsymbol{C}^T - \boldsymbol{C}^T\underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T}$$

$$\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^T = \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T}$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1} \qquad \boxed{\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1}$$

A feltétel akkor teljesül, ha: $\boxed{\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1}$
Ennek részletei hamarosan!

Most csak annyit, hogy az RDFT esetén: $\boxed{r_m = \frac{1}{N}, \forall m\text{-re.}}$

Az r_m értékek csatornánként megoszthatók a bemenet és a kimenet között (lásd később)!

Emlékeztető

Megjegyzés: Ha az állapotváltozók által hordozott energiát súlyozzuk a $\boldsymbol{Q} = diag\langle r_0^{-1}, r_1^{-1}, \dots, r_{N-1}^{-1}\rangle$ mátrixszal, akko

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) = -y^2(n) \text{ helyett } \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{r_k} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{r_k} x_k^2(n) = -y^2(n) \text{ adódik. } \boxed{r_m > 0, \forall\, m\text{-re.}}$$

Ilyen energiaviszonyokat akkor kapunk, ha: $\boldsymbol{A} = diag\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1}\rangle$, $\boldsymbol{C} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]$, $\boldsymbol{G}' = [z_0 r_0 \quad z_1 r_1 \quad \cdots \quad z_{N-1} r_{N-1}]$,
Ezzel viszont az eredeti formában bevezetett rezonátoros struktúrához jutunk!

A korlátosság feltétele rezonátor alapú megfigyelőknél:

Kedvezők azok a számítási eljárások, amelyek passzívnak tekinthetők.
Ezek tipikusan - a struktúrájukból adódóan - a paramétereik értékétől függetlenül korlátosak, nem növelik a jelszintet egy bizonyos érték fölé. A rezonátoros struktúra esetében a visszacsatolt rendszer összegzett kimenetére vonatkozó átviteli függvény

$$\boxed{H_P(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{a+jb}{1+a+jb}}$$

alakú, ahol $a = a(\omega)$ és $b = b(\omega)$ valós értékek, a hurokerősítés valós és képzetes részei.

$$a^2 + b^2 \le (1+a)^2 + b^2, \quad 0 \le 1 + 2a, \quad \boxed{a \ge -0.5}$$

Annak feltétele, hogy például $|H_P(z)| \le 1$ legyen : $a \ge -0.5$.

Mivel

$$a = Re \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)\Bigg|_{z=e^{j\omega T}}$$

ill.

$$2a = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{g_k z^{-1}}{1 - z_k z^{-1}} + \frac{g_k^* z}{1 - z_k^* z}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{g_k z^{-1} - g_k z_k^{-1} + g_k^* z - g_k^* z_n}{2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{-Re\left[\frac{g_k}{z_k}\right]\left(2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z\right) + jIm\left[\frac{g_k}{z_k}\right]\left(z_k z^{-1} - z_k^{-1} z\right)}{2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z} \ge -1,$$

az $a \ge -0.5$ feltétel z értékétől függetlenül teljesül, ha

$$\boxed{Im\left[\frac{g_k}{z_k}\right] = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1}$$

Ekkor

$$\boxed{Re \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{g_k}{z_k}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} r_k \le 1}$$

Megjegyzések: 1. A rekurzív DFT esetén $r_k = \frac{1}{N}$ $\forall k$-ra.

2. Az exponenciálisan átlagoló DFT esetén $r_k = \frac{\alpha}{N}$ $\forall k$-ra, $0 < \alpha \le 1$.
3. Stabil szűrők esetén mindig létezik olyan rezonátor-pólus készlet, amelyre $\sum_{k=0}^{N-1} r_k \le 1$ teljesül.
4. Stabil szűrők esetén az r_m, $m = 0, 1, \dots, N-1$, pozitív szám.
5. A tulajdonságot **strukturális passzivitásnak** nevezzük, a paraméterektől független, egyedül $\sum_{k=0}^{N-1} r_k \le 1$ teljesítendő!

A fenti tulajdonságokat megőrző tervezés menete:

(1) A megvalósítandó pólusok ismeretében a rezonátor-pólus pozíciók meghatározása úgy, hogy minden r_m érték valós legyen. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$H_P(z)=\frac{\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)}{1+\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)}=1-\frac{\prod_{k=0}^{N-1}(1-z_kz^{-1})}{D(z)},\quad \sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)=\frac{D(z)}{\prod_{k=0}^{N-1}(1-z_kz^{-1})}-1$$

ahol $D(z)$ a megvalósítandó nevező polinom, továbbá

$$2a=\left[\frac{D(z)}{\prod_{k=0}^{N-1}(1-z_kz^{-1})}+\frac{D^*(z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N-1}(1-z_k{}^{-1}z)}-2\right]\geq -1,\text{ahol } a=Re\left.\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)\right|_{z=e^{j\omega T}}\geq -0.5$$

amiből – mivel a rezonátor pólus pozícióknak megfelelő frekvenciákon az egyenlőség érvényesül – a rezonátor pólus pozíciók meghatározhatók:

$$\boxed{\prod_{k=0}^{N-1}(1-z_kz^{-1})=\left[1\pm\frac{z^{-(N-M)}D^+(z)}{D(z)}\right]D(z).}$$

$\pm$: $\prod_{k=0}^{N-1}z_k=\pm 1$

Két készlet van!

Itt $D^+(z)$ egy olyan M-edfokú $(M\leq N)$ polinom, amelynek gyökei a $D(z)$ polinom gyökeinek egységsugarú körre vonatkozó tükörképei, azaz $D^+(z)/D(z)$ egy mindentáteresztő típusú hálózatfüggvény.

(2) Az r_m értékek kiszámítása:

$$\boxed{r_m=\frac{\prod_{k=0}^{M-1}(1-p_kz_m^{-1})}{\prod_{k=0,k\neq m}^{N-1}(1-z_kz_m^{-1})}}$$

(3) A rezonátor-pólus pozíciók által kijelölt frekvenciákon az átviteli függvény „mintavételezése”, és ezzel a súlyozó együtthatók meghatározása.

A $H_P(z)$ átviteli függvény megvalósításához annak szabad paramétereivel azonos számú paramétert állítunk be: a konjugált komplex átviteli függvény pólusok $\{p_k\}$ összesen M független adatot, továbbá a rezonátor pólus pozíciók $\{z_k\}$ és az $\{r_m\}$ értékek összesen N független adatot rögzítenek.

Példa:

$$\mathrm{H}(z)=z^{-1}\frac{1-a_1z^{-1}}{1-b_1z^{-1}},\quad H_0(z)=r_0\frac{z_0z^{-1}}{1-z_0z^{-1}},\quad H_1(z)=r_1\frac{z_1z^{-1}}{1-z_1z^{-1}}$$

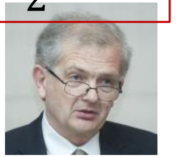
$$N=2, M=1\qquad D(z)=1-b_1z^{-1},\quad D^+(z)=-b_1+z^{-1},$$

$$\boxed{\prod_{k=0}^{1}(1-z_kz^{-1})=\left[1\pm\frac{z^{-1}(-b_1+z^{-1})}{1-b_1z^{-1}}\right](1-b_1z^{-1})}$$

Két eset:

$$\frac{z^{-1}(-b_1+z^{-1})}{1-b_1z^{-1}}=-1\rightarrow z^2-2b_1z+1=0,\ \boxed{z_{0,1}=b_1\pm j\sqrt{1-b_1^2}}\ \boxed{r_0=r_1==\frac{1}{2}}$$

$$\frac{z^{-1}(-b_1+z^{-1})}{1-b_1z^{-1}}=1\rightarrow z^2=1,\ \boxed{z_{0,1}=\pm 1}\ \boxed{r_0=\frac{1-b_1}{2}}\ \boxed{r_1=\frac{1+b_1}{2}}$$



Emlékeztető

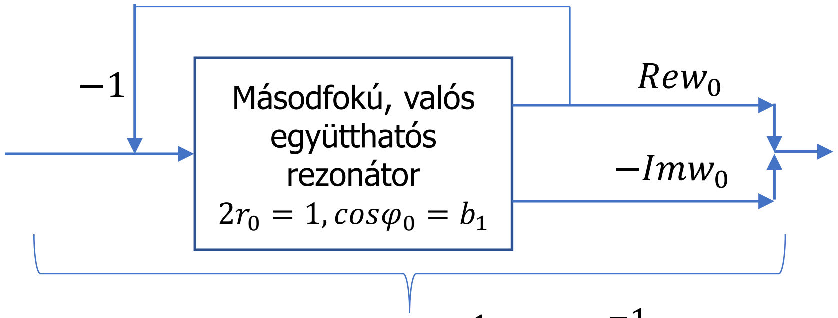
A tervezés eredménye:

1. eset: $\boxed{z_{0,1} = b_1 \pm j\sqrt{1-b_1^2} = cos\varphi_0 \pm jsin\varphi_0}$

$\boxed{z_0 z_1 = 1}$ $\boxed{r_0 = r_1 = \frac{1}{2}}$ $\boxed{r_0 + r_1 = 1}$

$$\boxed{H(z) = w_0 T_0(z) + w_1 T_1(z)}$$

$$w_0 = H(z_0) = a_1 + j\frac{a_1 b_1 - 1}{sin\varphi_0} \qquad w_1 = H(z_1) = w_0^*$$

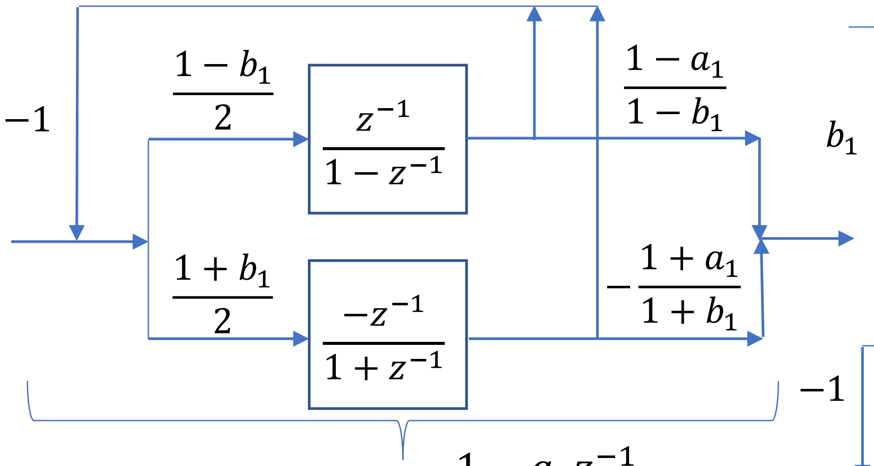


$$\mathrm{H}(z) = z^{-1}\frac{1-a_1 z^{-1}}{1-b_1 z^{-1}},$$

2. eset: $\boxed{z_{0,1} = \pm 1}$ $\boxed{z_0 z_1 = -1}$ $\boxed{r_0 = \frac{1-b_1}{2}}$ $\boxed{r_1 = \frac{1+b_1}{2}}$

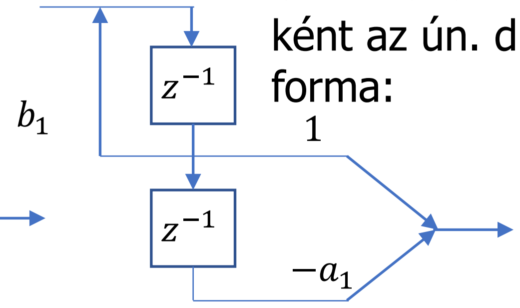
$\boxed{r_0 + r_1 = 1}$ $\boxed{H(z) = w_0 T_0(z) + w_1 T_1(z)}$

$$w_0 = H(z_0) = \frac{1-a_1}{1-b_1} \qquad w_1 = H(z_1) = -\frac{1+a_1}{1+b_1}$$

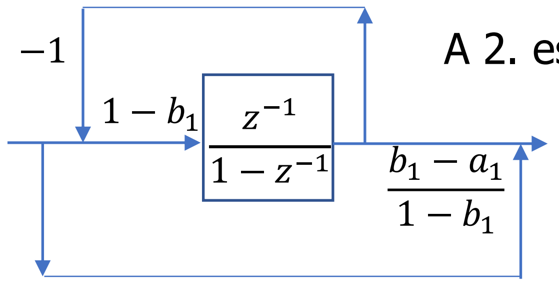


$$\mathrm{H}(z) = z^{-1}\frac{1-a_1 z^{-1}}{1-b_1 z^{-1}},$$

Összehasonlításként az ún. direkt forma:



A 2. eset:



Ha nincs egységnyi késleltetés, azaz: $\mathrm{H}(z) = \frac{1-a_1 z^{-1}}{1-b_1 z^{-1}}$

Ekkor csak a második részt tervezzük:
$N = 1, M = 1$ $D(z) = 1 - b_1 z^{-1}$, $D^+(z) = -b_1 + z^{-1}$,

Akkor ezt fel kell bontanunk az alábbi módon:

$$\boxed{(1 - z_0 z^{-1}) = \left[1 \pm \frac{-b_1 + z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}\right](1 - b_1 z^{-1})}$$

Két eset:
$z_0 = -1, \quad r_0 = 1 + b_1, \quad w_0 = -\frac{b_1 - a_1}{1 + b_1}$
$z_0 = 1, \quad r_0 = 1 - b_1, \quad w_0 = \frac{b_1 - a_1}{1 - b_1}$

$$\mathrm{H}(z) = 1 + \frac{(b_1 - a_1)z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$$

Melyiket használjuk? Ha $b_1 < 0$, akkor az elsőt: $r_0 < 1$ felüláteresztő jellegű hatás
Ha $b_1 > 0$, akkor a másodikat: $r_0 < 1$ aluláteresztő jellegű hatás

Jelfeldolgozó algoritmusok „energiaviszonyai”

A visszacsatolást is tartalmazó jelfeldolgozó algoritmusok kapcsán stabilitási problémák merülhetnek fel.
Ezek a másodlagos nemlineáris hatások (túlcsordulások és a kvantálások) következtében okozhatnak működésbeli problémákat.
Jól kezelhetőek azok a módszerek, amelyeket ún. **veszteségmentes** rendszerekre dolgoztak ki.

Ezek azzal jellemezhetők, hogy az általuk abszorbeált teljesítmény (egyetlen időlépés alatt felvett energia) – skalár bemenet és kimenet feltételezésével – $\boxed{u^2(n) - y^2(n).}$ Ha a bemenet nulla, az állapotvektor a kimeneten

$\boxed{y(n+k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(n),\ k = 0,1,\ldots}$ jel-szekvenciát produkál, amely $\boxed{\boldsymbol{x}^T(n)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^{T^k}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\right]\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n)}$ energiát képvisel.

Itt $\boldsymbol{P}$ egy, a struktúrától függő pozitív definit mátrix.
(Ortogonális rendszerek esetén $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$.) Veszteségmentes rendszerek esetében a rendszer energia növekménye:

$$\boxed{\boldsymbol{x}^T(n+1)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n+1) - \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n) = u^2(n) - y^2(n).}$$

Behelyettesítve az állapot- és a megfigyelési egyenleteket:

$$[\boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{A}^T + u^T(n)\boldsymbol{B}^T]\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}u(n)] - \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n) = u^T(n)u(n) - [\boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{C}^T + u^T\boldsymbol{D}^T][\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}u(n)].$$ Ahonnan:

$$\boxed{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0},}$$ a veszteségmentes rendszerek mátrixainak kapcsolata.

$\boxed{\text{Ebből a } \boldsymbol{P} \text{ mátrix meghatározható!}}$

Példa: A direkt rezonátort csatoljuk úgy vissza, hogy az mindentáteresztő (azaz veszteségmentes) rendszert valósítson meg. Ehhez $r_m = 0.5$ érték tartozik, és a visszacsatolt rendszer átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - z^{-1}cos\varphi_m} = z^{-1}\frac{cos\varphi_m - z^{-1}}{1 - z^{-1}cos\varphi_m}.$$

A hozzátartozó időtartománybeli állapotváltozós leírás $\beta = cos\varphi_m$ jelöléssel:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(n), \qquad y(n) = [\beta \quad -1]\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}}$$

A $\boldsymbol{P}$ mátrixot $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ formában keresve helyettesítsünk be:

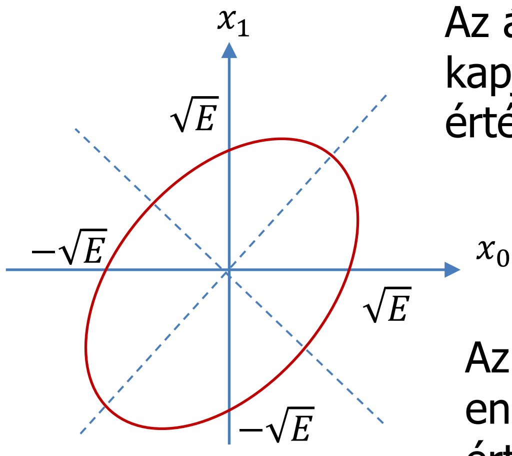
$$\begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ -1 \end{bmatrix}[\beta \quad -1] = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$$

A kijelölt műveletek elvégzése után $q = -\beta, r = 1, p = 1$ értékeket kapunk, vagyis

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}}$$

A tárolt energia kifejezése: $E = \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n) = \boxed{x_0^2(n) - 2\beta x_0(n)x_1(n) + x_1^2(n)}$

Ez az összefüggés $x_0(n)$ és $x_1(n)$ függvényében egy **ellipszist** ír le, melyet $\beta = 0.5$ feltételezésével a következő ábra illusztrál:



Az ábra koordináta-tengely metszékeinek értékét úgy kapjuk, hogy a fenti összefüggésbe $x_1 = 0$, ill. $x_0 = 0$ értéket helyettesítünk.

Az ellipszis tengelyeivel történő metszéspontok $x_0 = x_1$, ill. $x_0 = -x_1$ behelyettesítéssel származtathatók, koordinátájuk: $\pm\sqrt{E}$, ill. $\pm\sqrt{E/3}$.

Az ábra alapján belátható, hogy - adott energiaállapot mellett - az állapotváltozók aktuális értékeit abszolút-érték csonkítással kvantálva a rendszer magasabb energiájú pontba juthat.

Példa: Az ortogonális rezonátort csatoljuk úgy vissza, hogy az mindentáteresztő (azaz veszteségmentes) rendszert valósítson meg.

Ehhez $r_m = 0.5$ érték tartozik, és a visszacsatolt rendszer átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - z^{-1}cos\varphi_m} = z^{-1}\frac{cos\varphi_m - z^{-1}}{1 - z^{-1}cos\varphi_m}$$

A hozzátartozó időtartománybeli állapotváltozós leírás $\alpha = sin\varphi_m$, $\beta = cos\varphi_m$ jelöléssel:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} u(n), \qquad y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}}$$

A $\boldsymbol{P}$ mátrixot $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ formában keressük. ($\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}$)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$$

A kijelölt műveletek elvégzése után: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 p - 2\alpha\beta q + \beta^2 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$, ahonnan $p = 1$, $q = 0$ és $r = 1$, tehát

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Ezzel $E = x_0^2(n) + x_1^2(n)$ vagyis az azonos energiájú állapotok mértani helye **kör**.
Ekkor minden esetben az abszolút-érték csonkítás kisebb energiájú pozícióba visz.

Példa: A hullámdigitális rezonátort csatoljuk úgy vissza, hogy az mindentáteresztő (azaz veszteségmentes) rendszert valósítson meg.
Ehhez $r_m = 0.5$ érték tartozik, és a visszacsatolt rendszer átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{z^{-1}cos\varphi_m - z^{-2}}{1 - z^{-1}cos\varphi_m} = z^{-1}\frac{cos\varphi_m - z^{-1}}{1 - z^{-1}cos\varphi_m}$$

A hozzátartozó időtartománybeli állapotváltozós leírás $\alpha = cos\varphi_m + 1,\ \ \beta = cos\varphi_m - 1$ jelöléssel:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = 0.5\begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(n), \qquad y(n) = [\alpha \quad \beta]\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}}$$

A $\boldsymbol{P}$ mátrixot $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ formában keressük. $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P})$

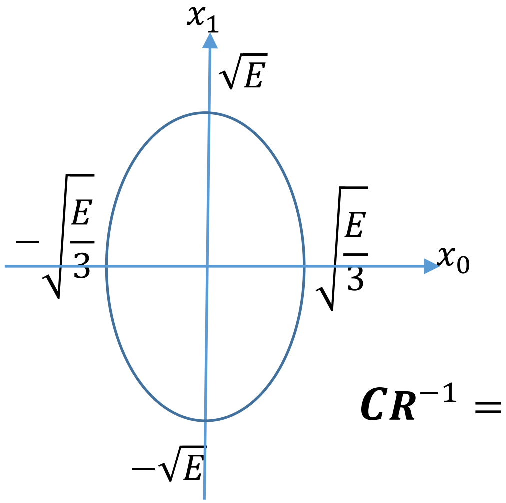
$$0.25\begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} \qquad 0.25(p\beta^2 + 2q\alpha\beta + r\alpha^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q+\alpha^2 & Q+\alpha\beta \\ Q+\alpha\beta & Q+\beta^2 \end{bmatrix}$$

ahol $Q = 0.25(p\beta^2 + 2q\alpha\beta + r\alpha^2)$. Ebbe behelyettesítve p, q, r értékét: $Q = 0.25\big((Q+\alpha^2)\beta^2 + 2(Q+\alpha\beta)\alpha\beta + (Q+\beta^2)\alpha^2\big)$,

ahonnan $Q = sin^2\varphi_m = -\alpha\beta, p = 2\alpha = 2(1+cos\varphi_m), q = 0, r = -2\beta = 2(1-cos\varphi_m),$ amivel $\boxed{\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2(1+cos\varphi_m) & 0 \\ 0 & 2(1-cos\varphi_m) \end{bmatrix}}$

Ezzel: $\boxed{E = 2(1+cos\varphi_m)x_0^2(n) + 2(1-cos\varphi_m)x_1^2(n)}$

Mivel $\boldsymbol{P}$ diagonál mátrix, ezért az azonos energiát képviselő állapotok mértani helye álló vagy fekvő **ellipszis**, aminek köszönhetően az abszolútérték csonkítás kisebb energiájú pozícióba visz.



Megjegyzés: Minden veszteségmentes átviteli függvénynek van ortogonális realizációja.

Ha $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R} * \boldsymbol{R}$, ahol $\boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{P}$ mátrix szimmetrikus négyzetgyöke, akkor az $\boldsymbol{R}$ mátrixszal megvalósított hasonlósági transzformáció: $\boldsymbol{RAR}^{-1}, \boldsymbol{RB}, \boldsymbol{CR}^{-1}, \boldsymbol{D}$ ortogonális rendszert eredményez.

A visszacsatolt hullámdigitális rezonátor esetében: $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{-2\beta} \end{bmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{RB} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{-2\beta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \\ \sqrt{-\frac{\beta}{2}} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{CR}^{-1} = [\alpha \quad \beta]\frac{1}{2\sqrt{-\alpha\beta}}\begin{bmatrix} \sqrt{-2\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} & \sqrt{\frac{-\beta}{2}} \end{bmatrix}$$

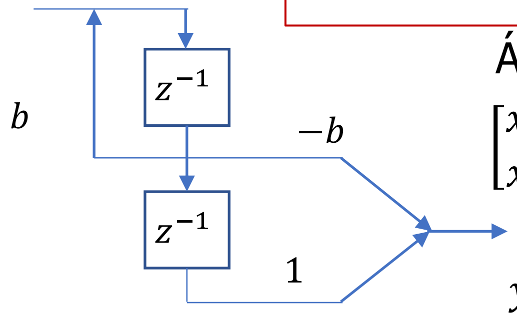
$$\boldsymbol{RAR}^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2\alpha} & 0 \\ 0 & \sqrt{-2\beta} \end{bmatrix} 0.5\begin{bmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{-\alpha\beta}}\begin{bmatrix} \sqrt{-2\beta} & 0 \\ 0 & \sqrt{2\alpha} \end{bmatrix} = 0.5\begin{bmatrix} \beta & \sqrt{-\alpha\beta} \\ \sqrt{-\alpha\beta} & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \beta & \sqrt{-\alpha\beta} & \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \\ \sqrt{-\alpha\beta} & \alpha & \sqrt{-\frac{\beta}{2}} \\ \sqrt{\frac{\alpha}{2}} & \sqrt{-\frac{\beta}{2}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta & \sqrt{-\alpha\beta} & \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \\ \sqrt{-\alpha\beta} & \alpha & \sqrt{-\frac{\beta}{2}} \\ \sqrt{\frac{\alpha}{2}} & \sqrt{-\frac{\beta}{2}} & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}}$$

Példa „mindentáteresztő” hálózatok/számítások energiaviszonyaira:

Megjegyzés: Az elmélet kiterjeszthető veszteséges hálózatokra és számításokra nagyobb nehézségek nélkül. ☺

Vizsgáljuk a $\boxed{H(z) = z^{-1}\dfrac{z^{-1}-b}{1-bz^{-1}}}$ átviteli függvényű rendszer energiaviszonyait! Zérus $1/b$-ben, pólus b-ben.



Állapotváltozós leírás:

$$\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}$$

A kinyerhető energia:

$$E = \boldsymbol{x}^T(n)\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\boldsymbol{A}^T)^k\,\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\right]\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n)$$

ahol $A = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix}$

$k = 0$: $\quad \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -b \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2 & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} b^k & 0 \\ b^{k-1} & 0 \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} -b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^k & 0 \\ b^{k-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{k-1}(1-b^2) & 0 \end{bmatrix}$, $\quad [\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k]^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} b^{k-1}(1-b^2) \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^{k-1}(1-b^2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{2(k-1)}(1-b^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} + \sum_{k=1}^{\infty}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k]^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} b^2 + (1-b^2)^2\sum_{k=1}^{\infty} b^{2(k-1)} & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix}}$$

mert $\sum_{k=1}^{\infty} b^{2(k-1)} = \dfrac{1}{1-b^2}$, amivel

$b^2 + (1-b^2)^2\sum_{k=1}^{\infty} b^{2(k-1)} = 1.$ Ugyanezt megkapjuk az $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}$ egyenletből is, mert keresve $\boldsymbol{P}$-t $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$ alakban

$\begin{bmatrix} b & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^2 & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$, elvégezve a mátrix szorzásokat $\begin{bmatrix} pb^2 + 2qb + r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^2 & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$

$q = -b$, $r = 1$, $pb^2 - 2b^2 + 1 + b^2 = p$, ahonnan $p = 1$.

$\boxed{\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{bmatrix}}$ A tárolt/kinyerhető energia kifejezése: $E = \boldsymbol{x}^T(n)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(n) = \boxed{x_0^2(n) - 2bx_0(n)x_1(n) + x_1^2(n)}$

Ilyen energiaviszonyokat kaptunk a direkt formájú rezonátor visszacsatolásával!

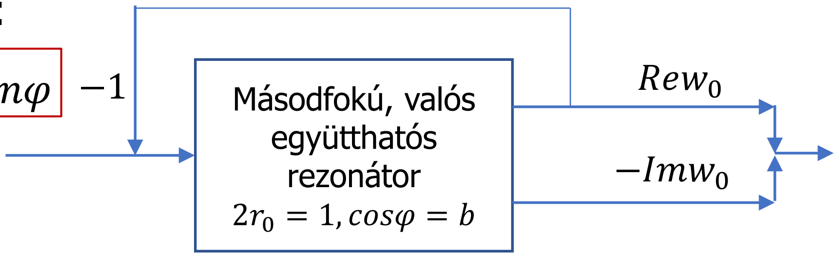
A $\boxed{H(z) = z^{-1}\frac{z^{-1}-b}{1-bz^{-1}}}$ átviteli függvény strukturálisan passzív realizációja:

A 10. előadáson szerepelt a $H(z) = z^{-1}\frac{1-a_1 z^{-1}}{1-b_1 z^{-1}}$ átviteli függvény.

Az ott meghatározott adatokkal:

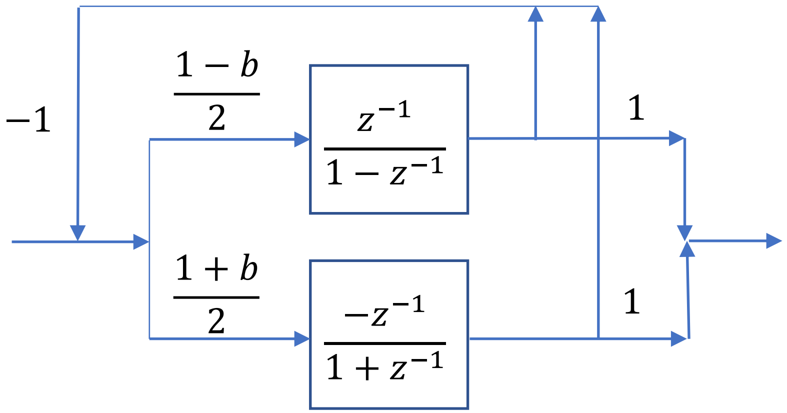
$\boxed{z_{0,1} = b \pm j\sqrt{1-b^2} = cos\varphi \pm jsin\varphi}$

$\boxed{r_0 = r_1 = \frac{1}{2}}$ $w_0 = H(z_0)$ $w_1 = H(z_1)$

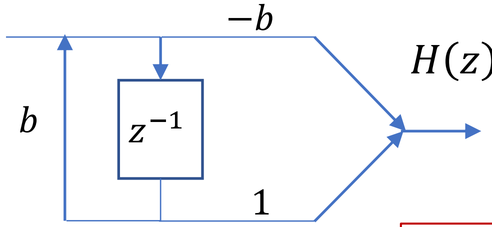


$\boxed{z_{0,1} = \pm 1}$ $\boxed{r_0 = \frac{1-b}{2}}$ $\boxed{r_1 = \frac{1+b}{2}}$

$w_0 = H(z_0) = 1$ $w_1 = H(z_1) = 1$



Ha nincs késleltetés, azaz: akkor $x(n+1) = bx(n) + u(n)$,



$H(z) = \frac{z^{-1}-b}{1-bz^{-1}}$ azaz $\boldsymbol{A} = b$

$y(n) = x(n) - bx(n+1) = (1-b^2)x(n) - bu(n)$

azaz $\boldsymbol{C} = (1-b^2)$

A kinyerhető energia: $\boxed{E = x(n)(1-b^2)^2\left[\sum_{k=0}^{\infty}(b^2)^k\right]x(n) = (1-b^2)x^2(n),}$ azaz $\boldsymbol{P} = 1-b^2$.

Ez kielégíti az $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}$ alakú egyenletet, mert $b(1-b^2)b + (1-b^2)^2 = 1-b^2$, ahol osztva $(1-b^2)$-tel $b^2 + 1 - b^2 = 1$.

$\boxed{\boldsymbol{R} = \sqrt{1-b^2}}$ tényezővel hasonlósági transzformációt végezve: $\boxed{\boldsymbol{A}' = b, \boldsymbol{C}' = \sqrt{1-b^2}}$ ekkor $\boldsymbol{P} = 1$, hiszen $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$ teljesül: $b^2 + 1 - b^2 = 1$

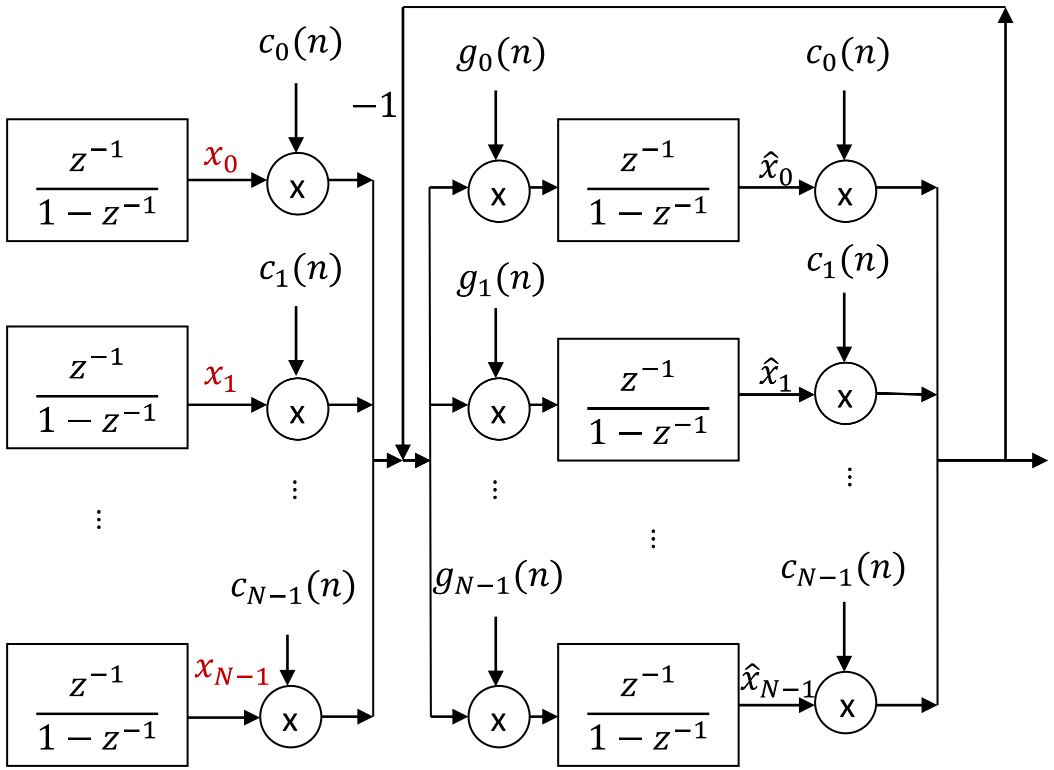
A strukturálisan passzív realizációhoz $H(z) = \frac{z^{-1}-b}{1-bz^{-1}} = -b + \frac{(1-b^2)z^{-1}}{1-bz^{-1}}$ felbontás szükséges.

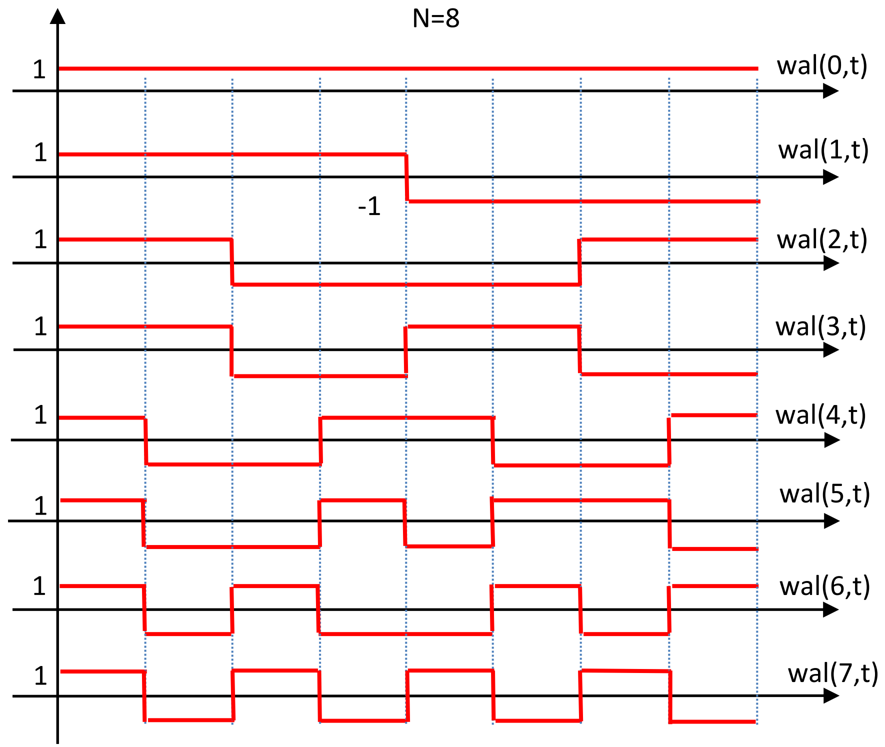
$\boxed{z_0 = +1}$ $\boxed{r_0 = 1-b}$ $w_0 = 1+b$

$\boxed{z_0' = -1}$ $\boxed{r_0' = 1+b}$ $w_0' = -1+b$

A két eset: azt használjuk, amelyikre $r_0 < 1$.

Hatékonyan implementálható ortogonális transzformáció: Walsh transzformáció





~ DC komponens

~ szinusz alap

~ koszinusz alap

~ szinusz (2*fr.)

~ koszinusz (2*fr.)

$\frac{1}{N}$ kell a hurokban!

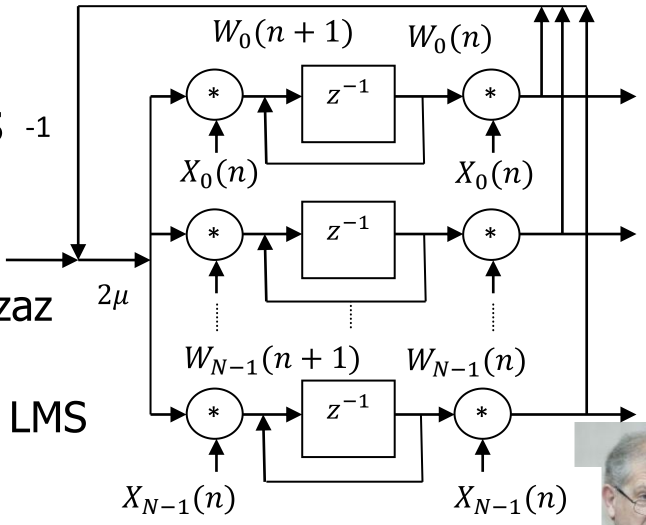
A rekurzív DFT és az LMS eljárás kapcsolata

Az LMS eljárás lerajzolható ugyanolyan formában, mint a rekurzív jelreprezentáció. Az LMS algoritmus összefüggése komplex regressziós vektor esetén:

$$\boxed{\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) + 2\mu \boldsymbol{X}^*(n) e(n),}$$

azaz a bázisvektor az $\boldsymbol{X}(n)$ vektornak, a reciprok bázis vektor pedig az $2\mu\boldsymbol{X}^*(n)$ vektornak, azaz a komplex konjugált konstans szorosának felel meg.

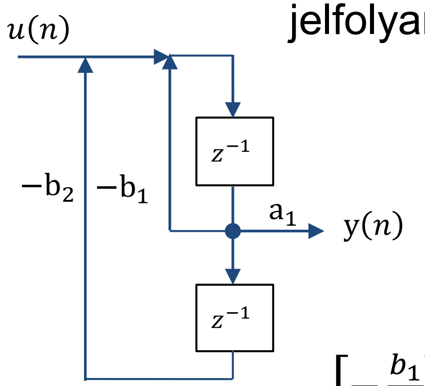
Ha $\boldsymbol{X}(n)$ a harmonikus komplex exponenciálisokat tartalmazza, és $2\mu = 1/N$, akkor az LMS eljárás éppen a rekurzív DFT-t írja le.



Méréselmélet 2. zárthelyi 2020.05.19.

1. A $H(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}$ átviteli függvénnyel jellemezhető rendszer állapotváltozóit kellene megbecsülnünk. Vélelmezzük, hogy a rendszer belső struktúrája a direkt számítási struktúrának felel meg. Bemenetén multiszinuszos gerjesztést alkalmazunk. A paramétereket ismertnek tételezzük fel: $a_1 = 0.5$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0.5$. Tervezzen olyan megfigyelőt (azaz számítsa ki a megfigyelő ismeretlen paramétereit), amely képes a vizsgált rendszer állapotváltozóinak a lehető legrövidebb időn belüli meghatározására (max. 4 pont)! (A megfigyelési zaj elhanyagolható!) Ellenőrizze, hogy teljesül-e a megfigyelő sajátértékeire vonatkozó feltétel (max. 2 pont)! Hogyan függenek a megfigyelő ismeretlen paraméterei a b_2 értékétől (max. 1 pont)?

Megoldás: A direkt struktúra jelfolyamgráfja:



Az állapotváltozós leírás: $\begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(n) = \boldsymbol{Ax}(n) + \boldsymbol{B}u(n)$

$$y(n) = [a_1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{Cx}(n)$$

A véges lépésben történő konvergencia feltétele, hogy $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC})^2 = 0$ teljesüljön. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C} = [0.5 \quad 0]$ $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$

Egyenértékű feltétel, hogy a megfigyelő összes sajátértéke nulla.

$$\begin{bmatrix} -b_1 - a_1 g_0 & -b_2 \\ 1 - a_1 g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 - a_1 g_0 & -b_2 \\ 1 - a_1 g_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b_1 + a_1 g_0)^2 - b_2(1 - a_1 g_1) & b_2(b_1 + a_1 g_0) \\ -(b_1 + a_1 g_0)(1 - a_1 g_1) & -b_2(1 - a_1 g_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

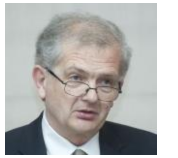
$$\begin{bmatrix} 1 - 0.5 g_0 & -0.5 \\ 1 - 0.5 g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 0.5 g_0 & -0.5 \\ 1 - 0.5 g_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - 0.5 g_0)^2 - 0.5 + 0.25 g_1 & -0.5 + 0.25 g_0 \\ (1 - 0.5 g_0)(1 - 0.5 g_1) & -0.5 + 0.25 g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. A megfigyelő összes sajátértéke nulla feltétel:

$$det \begin{bmatrix} \lambda + b_1 + a_1 g_0 & b_2 \\ -1 + a_1 g_1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + b_1 + a_1 g_0) + b_2(1 - a_1 g_1) = \lambda^2 + \lambda(b_1 + a_1 g_0) + b_2(1 - a_1 g_1) = 0$$

Ebből is $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{a_1} \\ \frac{1}{a_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

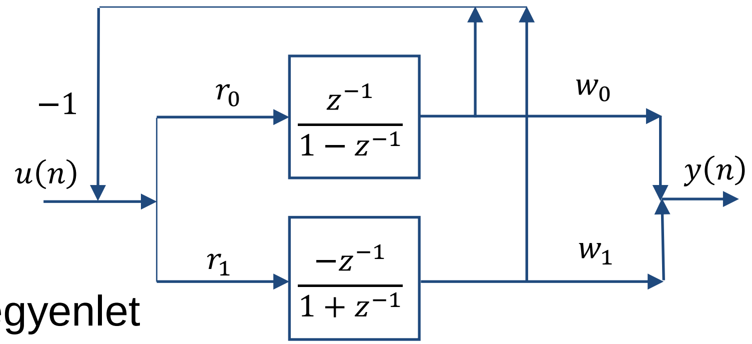
A $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$ korrekciós tényezők nem függenek a b_2 paramétertől!



2. Valósítsa meg az 1. feladatban szereplő átviteli függvényt rezonátoros struktúrával, $z_0 = 1$ és $z_1 = -1$ pozíciójú rezonátorok feltételezésével! A megvalósítás a blokkvázlat felrajzolását és a struktúra paramétereinek levezetését jelenti (max. 4 pont). Teljesül-e a választott megoldásnál a strukturális passzivitás feltétele (max. 1 pont)?

Megoldás:

$$H(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{\frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} w_0 - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}} w_1}{1 + \frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{(1 + z^{-1}) r_0 z^{-1} w_0 - (1 - z^{-1}) r_1 z^{-1} w_1}{1 + (1 + z^{-1}) r_0 z^{-1} - (1 - z^{-1}) r_1 z^{-1}} = \frac{(r_0 w_0 - r_1 w_1) z^{-1} + (r_0 w_0 + r_1 w_1) z^{-2}}{1 + (r_0 - r_1) z^{-1} + (r_0 + r_1 - 1) z^{-2}}$$



$r_0 - r_1 = b_1,\ r_0 + r_1 - 1 = b_2$, ahonnan $\quad r_0 = \frac{1 + b_1 + b_2}{2} = 0.25, \qquad r_1 = \frac{1 - b_1 + b_2}{2} = 1.25,$

$$w_0 = \frac{a_1}{1 + b_1 + b_2} = 1, w_1 = \frac{-a_1}{1 - b_1 + b_2} = -0.2,$$

A strukturális passzivitás feltétele nem teljesül, mert $r_0 + r_1 = 1 + b_2 > 1$. **Megjegyzés:**

A strukturális passzivitás teljesüléséhez az $1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = -(b_2 + b_1 z^{-1} + z^{-2})$ egyenlet gyökei jelölik ki a rezonátor pólusokat: $z^{-2} + \frac{2b_1}{1+b_2} z^{-1} + 1 = z^{-2} + 2z^{-1} cos\varphi_0 + 1 = 0, z_{0,1} = cos\varphi_0 \pm jsin\varphi_0$, ahol $cos\varphi_0 = \frac{b_1}{1+b_2}$

A nevezőpolinomok egyeztetésével ($r_0 = r_1$)

$$1 + 2z^{-1} cos\varphi_0 + z^{-2} + 2r_0 (z^{-1} cos\varphi_0 - z^{-2}) = 1 + 2(1 - r_0) z^{-1} \frac{b_1}{1 + b_2} + (1 - 2r_0) z^{-2} = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2},$$ ahonnan $1 - 2r_0 = b_2$,

vagyis $r_0 = \frac{1 - b_2}{2} = r_1,\ \ r_0 + r_1 = 1 - b_2 < 1.$

3. Mutassa be a skalár Kalman szűrés modelljét és zajparamétereit! Vezesse le a szűrő optimális $a(n)$ és $b(n)$ paramétereit meghatározó ortogonalitási egyenleteket (max. 4 pont), majd $b(n)$ kifejezését annak ismeretében, hogy $a(n) = a[1 - b(n)c]$ (max. 4 pont)!

Megoldás: $x(n) = ax(n-1) + w(n),\ y(n) = cx(n) + n(n)$

ahol $w(n)$ az ún. rendszerzaj, amelyre $E[w(n)] = 0$, $E[w(j)w(k)] = \sigma_w^2$, ha $j = k$, egyébként 0,

$n(n)$ az ún. megfigyelési zaj, amelyre $E[n(n)] = 0$, $E[n(j)n(k)] = \sigma_n^2$, ha $j = k$, egyébként 0.

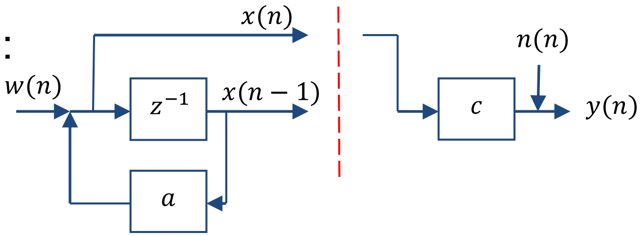
$x(n) = 0, w(n) = 0$, ha $n < 0$.

$E[w(n)x(n-1)] = 0$

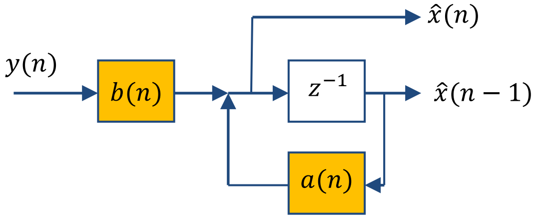
$E[n(n)\hat{x}(n-1)] = 0$

$E[w(n)n(n)] = 0 \qquad \forall n$

A megfigyelés lineáris modellje:



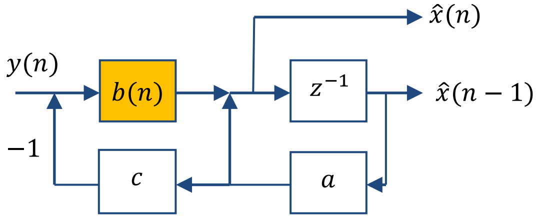
A rekurzív becslő:



$e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$ jelöléssel keressük $a(n)$ és $b(n)$ olyan értékét, amely minimalizálja a $E[e^2(n)] = E\left[\left(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n)\right)^2\right]$ négyzetes hibát:

$$\boxed{\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial a(n)} = -2E[e(n)\hat{x}(n-1)] = 0, \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial b(n)} = -2E[e(n)y(n)] = 0}$$

Mivel $a(n) = a[1 - b(n)c]$, ezért



$\boldsymbol{b(n)}$ meghatározása:

Kiindulva az $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$, $E\{e^2(n)\} = E\{[x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n)]^2\}$

összefüggésből, és $x(n) = ax(n-1) + w(n)$ valamint

$\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ca\hat{x}(n-1))$ behelyettesítésével

$$E\{e^2(n)\} = E\left\{\left[ae(n-1) + w(n) - b(n)\left(ace(n-1) + cw(n) + n(n)\right)\right]^2\right\} =$$

$$= E\{[a[1 - b(n)c]e(n-1) + [1 - b(n)c]w(n) - b(n)n(n)]^2\}$$

Mivel a négyzetre emelésnél a keresztszorzatok várható értékei nullák, mert a zajfolyamatok függetlenek egymástól, illetve az állapotváltozók korábbi értékeitől: $E\{e(n-1)w(n)\} = 0, E\{e(n-1)n(n)\} = 0, E\{w(n)n(n)\} = 0,$
ezért a négyzetre emelést követően csak a négyzetes tagok maradnak meg:

$E\{e^2(n)\} = a^2[1 - b(n)c]^2 E\{e^2(n-1)\} + [1 - b(n)c]^2 E\{w^2(n)\} + b^2(n)E\{n^2(n)\}$. Bevezetve a

$E\{e^2(n)\} = p(n);\ E\{w^2(n)\} = \sigma_w^2;\ E\{n^2(n)\} = \sigma_n^2$ jelöléseket, keressük $p(n)$ minimumát $b(n)$ függvényében:

$\frac{\partial p(n)}{\partial b(n)} = -2a^2[1 - b(n)c]cp(n-1) - 2[1 - b(n)c]c\sigma_w^2 + 2b(n)\sigma_n^2 = 0,$ ahonnan a keresett optimális súlytényező

$$\boxed{b(n)\Big|_{opt} = \frac{a^2cp(n-1) + c\sigma_w^2}{a^2c^2p(n-1) + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2} = cp_1(n)[c^2p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1}, \text{ahol}} \quad p_1(n) = a^2p(n-1) + \sigma_w^2.$$

4. Adja meg annak a jelnek a diszkrét időfüggvényét, amelyet az $\left(1, \frac{1-j}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1+j}{2}\right)$ értékű Fourier transzformált jellemez (max. 3 pont)! **Megoldás:**

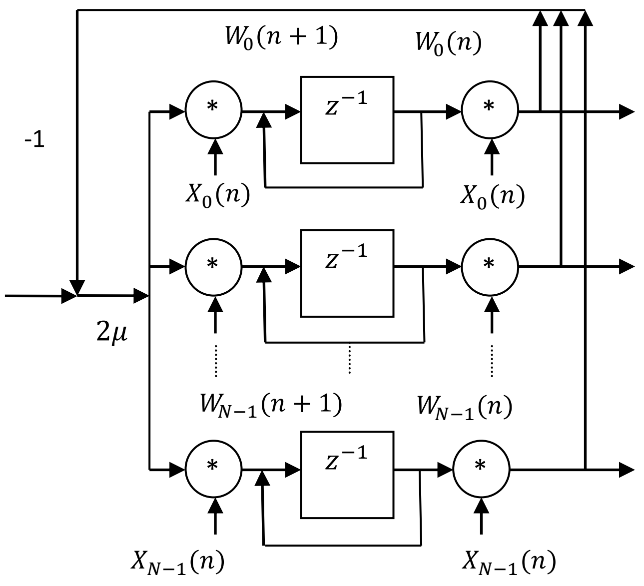
$$1 * e^{j\frac{2\pi}{5}0n} + \frac{1-j}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}3n} + \frac{1+j}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}4n} =$$

$$= 1 * e^{j\frac{2\pi}{5}0n} + \frac{1-j}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1+j}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + \frac{1}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}2n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}1n} - \frac{j}{2} * e^{+j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{j}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}1n} + \frac{1}{2} * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + \frac{1}{2} * e^{-j\frac{2\pi}{5}2n}$$

$$\boxed{= 1 + cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)}$$

5. Blokkvázlat és az összefüggések megadásával mutassa be az LMS eljárás és a rekurzív diszkrét Fourier transzformáció kapcsolatát (max. 2 pont)! Mutassa be a μ konvergencia tényező megválasztásának kritériumát – az LMS eljárás alkalmazása esetén – a stabiltáselméleti megközelítésre alapozva (max. 4 pont)! Adjon felső határértéket μ-re, ha $\dim \boldsymbol{X}(n) = N = 25$ és a regressziós vektor elemeinek maximuma $L = 10$ (max. 1 pont)! **Megoldás:**



Az LMS eljárás lerajzolható ugyanolyan formában, mint a rekurzív jelreprezentáció.

Az LMS algoritmus összefüggése komplex regressziós vektor esetén:

$$\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) + 2\mu e(n)\boldsymbol{X}^*(n),$$

azaz a bázisvektor az $\boldsymbol{X}(n)$ vektornak, a reciprok bázis vektor pedig az $2\mu\boldsymbol{X}^*(n)$ vektornak, azaz a komplex konjugált konstansszorosának felel meg.

Ha $\boldsymbol{X}(n)$ a harmonikus komplex exponenciálisokat tartalmazza, és $2\mu = 1/N$, akkor az LMS eljárás éppen a rekurzív DFT-t írja le.

A paraméterhiba kifejezése: $\boldsymbol{V}(n+1) = [\boldsymbol{I} - 2\mu\boldsymbol{X}(n)X^T(n)]\boldsymbol{V}(n)$.

Ez utóbbi egy autonóm rendszer, amely globálisan aszimptotikusan stabil esetben:

$\boldsymbol{V}(n) \Rightarrow 0$, amivel $\boldsymbol{W}(n) \Rightarrow \boldsymbol{W}^*$.

Ljapunov módszerével keresünk egy alkalmas energiafüggvényt. Esetünkben erre alkalmas: $G(n) = \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n)$.

Azt keressük, hogy ez miként csökkenthető: $\Delta G(n+1) = G(n+1) - G(n) \leq 0$, minden n-re. Ha $G(0)$ véges, akkor $\Delta G(n) \Rightarrow 0$.

$$\Delta G(n+1) = \boldsymbol{V}^T(n+1)\boldsymbol{V}(n+1) - \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n) = \boldsymbol{V}^T(n)[\boldsymbol{I} - 2\mu\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n)]^T[\boldsymbol{I} - 2\mu\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n)]\boldsymbol{V}(n) - \boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{V}(n) =$$

$\boldsymbol{V}^T(n)[-4\mu\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n) + [4\mu^2\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n)]\boldsymbol{X}(n)\boldsymbol{X}^T(n)]\,\boldsymbol{V}(n) = -4\mu e^2(n)(1 - \mu\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n))$ ahol felhasználtuk, hogy $\boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{X}(n) = e(n)$.

Mivel $\mu > 0$, ezért ha $\boxed{0 < \mu < \dfrac{1}{\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n)}}$ $\forall$n-re, akkor $\Delta G \Rightarrow 0$ magával vonja $\mu e^2(n) \to 0$, illetve $\boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{X}(n) \to 0$.

Megjegyzés: A $\boldsymbol{V}^T(n)\boldsymbol{X}(n)$ skalár szorzat lehet úgy is nulla, hogy a két vektor ortogonális, amikoris $\boldsymbol{V}(n) \neq 0$. Ez kerülendő.

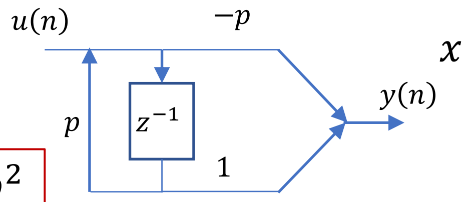
$$\boxed{0 < \mu < \frac{1}{\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{X}(n)} < \frac{1}{NL^2} = \frac{1}{2500} = 0.0004}$$

6. Írja fel egy olyan mindentáteresztő hálózat átviteli függvényét, amelynek egyetlen pólusa a z sík $p = 0.5 + j0$ koordinátájú pontjában helyezkedik el, és az átvitelének abszolút értéke 1 (max. 1 pont)! Rajzolja fel a hálózat jelfolyamgráfját a direkt struktúrának, valamint transzponáltjának megfelelően! (max. 2 pont)! Adja meg mindkét hálózat állapotváltozós leírását! Mindkét hálózat esetében vezesse le, hogy nulla bemenet esetén - végtelen idő alatt - mennyi energia nyerhető ki belőlük (max. 3 pont)! Alkalmas transzformációval hozzon létre olyan beállítást, amely esetén a kivehető energia az állapotváltozó négyzetével egyezik (max. 1 pont)! Adjon meg strukturálisan passzív realizációt is (max. 2 pont)! Adja meg a kivehető energiát erre a realizációra is. Melyik elrendezésből vehető ki a legtöbb energia (max. 1 pont)?

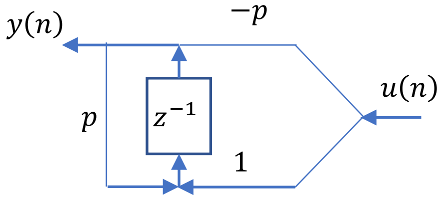
Megoldás:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}}$$

$$\boxed{A = p, C = 1 - p^2}$$



$$x(n+1) = px(n) + u(n)$$
$$y(n) = x(n) - p\,x(n+1)$$
$$= (1 - p^2)x(n) - pu(n)$$



$$x(n+1) = px(n) + (1 - p^2)u(n)$$
$$y(n) = x(n) - pu(n)$$

$$\boxed{A_t = p, C_t = 1}$$

Az $A^T PA + C^T C = P$ összefüggéssel összhangban:

$$pPp + (1 - p^2)^2 = P \to P = 1 - p^2 = 0.75$$

$$pP_t p + 1 = P_t \to P_t = \frac{1}{1-p^2} = \frac{4}{3} \cong 1.33$$

A kivehető energia:

$0.75x^2$ $\quad$ $1.33x^2$

A hasonlósági transzformáció mátrixa:

$R = \sqrt{1-p^2}$ $\qquad$ $R_t = \dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}$

$A' = p, C' = \sqrt{1-p^2}$ $\qquad$ $A_t' = p, C_t' = \sqrt{1-p^2}$

Ezzel $A^T A + C^T C = I$, mert

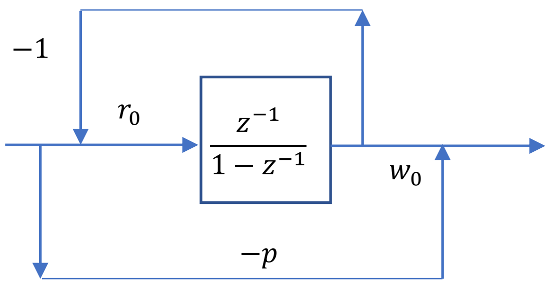
$p^2 + 1 - p^2 = 1$ $\qquad$ $p^2 + 1 - p^2 = 1$

7*. Bizonyítsa be, hogy az eredőben valós átvitelt megvalósító, komplex együtthatós, elsőfokú rezonátorokból felépített, visszacsatolt rezonátoros struktúrából kinyerhető energia a $\mathrm{Q} = \mathrm{diag}\langle \mathrm{r}_0^{-1}, \mathrm{r}_1^{-1}, \dots, \mathrm{r}_{\mathrm{N}-1}^{-1} \rangle$ mátrix segítségével adható meg, amennyiben $\sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{r}_\mathrm{m} = 1$, ahol $\mathrm{r}_\mathrm{m} > 0$, $\forall$m-re (max. 5 pont)! **Megoldás:**

A strukturálisan passzív realizációhoz:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}} = -p + \frac{(1-p^2)z^{-1}}{1-pz^{-1}}$$

$$\frac{\dfrac{r_0 z^{-1}}{1-z^{-1}} w_0}{1 + \dfrac{r_0 z^{-1}}{1-z^{-1}}} = \frac{r_0 z^{-1}}{1-(1-r_0)z^{-1}} w_0 = \frac{(1-p^2)z^{-1}}{1-pz^{-1}}$$



Ebből $r_0 = 1 - p = 0.5$, $w_0 = 1 + p = 1.5$

A kinyerhető energiához: $A = p, C = 1 + p$ $\quad pPp + (1+p)^2 = P \rightarrow P = \frac{1+p}{1-p} = 3$, amivel a kinyerhető energia: $3x^2$. Alternatív számolás: $(1+p)^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^{2k} = \frac{1+p}{1-p}$

A rezonátoros struktúra transzponáltja esetén: $A_t = p, C_t = r_0 = 1 - p$

$pP_t p + (1-p)^2 = P_t \rightarrow P = \frac{1-p}{1+p} = \frac{1}{3} \cong 0.33$, amivel a kinyerhető energia: $0.33x^2$

A legtöbb energia a strukturálisan passzív, rezonátoros elrendezésből nyerhető ki, és ennek megfelelően ebben lesznek a legalacsonyabbak a belső jelszintek.

$A = diag\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \rangle$, $A^* = diag\langle z_0^{-1}, z_1^{-1}, \dots, z_{N-1}^{-1} \rangle$, $R^T = [r_0, r_1, \dots, r_{N-1}]$, $G = AR$, $C = [1,1,\dots,1]$ jelölésekkel, ahol a '*' konjugált transzponáltat jelent:

$\boxed{\text{Bizonyítandó, hogy } (A - GC)^* Q (A - GC) + C^T C = Q.}$ $\quad A^*QA - A^*QGC - C^T G^* QA + C^T G^* QGC + C^T C =$

$= A^*QA - A^*QARC - C^T R^T A^* QA + C^T R^T A^* QARC + C^T C \;= Q - QRC - C^T R^T Q + C^T R^T QRC + C^T C = Q - 2C^T C + 2C^T C = Q,$

ahol felhasználtuk, hogy $\boxed{A^*QA = Q,\ QR = C^T,\ R^T Q = C,\ R^T QR = \sum_{\mathrm{m}=0}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{r}_\mathrm{m} = 1.}$

Megjegyzés: A Q mátrix szimmetrikus négyzetgyökével megvalósított hasonlósági transzformációval a rezonátoros struktúra ortogonális realizációjához jutunk.

Méréselmélet: 2. zárthelyi 2019.05.14.

2. Vezesse le a csúszó ablakos átlagolás rekurzív összefüggését, átviteli függvényét, és amplitúdókarakterisztikáját (*max. 3 pont*)! Számítsa ki az átvitel abszolút értékét az alapharmonikus frekvencia másfélszeresénél, ha az ablakon keresztül $N = 10$ minta látható (*max. 2 pont*)!

Megoldás: $\hat{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = \frac{1}{N}\sum_{k=n-N+1}^{n} y(k) = \hat{x}(n) + \frac{1}{N}[y(n) - y(n-N)] \Big]$ $z\hat{X}(z) = \hat{X}(z) + \frac{1}{N}(1 - z^{-N})Y(z),$

$$\boxed{H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1}}{N}\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}}$$

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T}}{N}\frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T}}{N}\frac{e^{j\frac{N\omega T}{2}} - e^{-j\frac{N\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T}}{N}\frac{\sin\frac{N\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega T}{2}}$$

$$\boxed{\left|H(e^{j\omega T})\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin\frac{N\omega T}{2}}{\sin\frac{\omega T}{2}}\right|}$$

Az alapharmonikus másfélszeresénél $\omega T = 1.5\frac{2\pi}{N} = \frac{3\pi}{10}$, amivel

$$\boxed{\left|H(e^{j\omega T})\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{20}}\right| \approx 0.22.}$$

Kapcsolódó feladat:
Számítsa ki az átvitel abszolút értékét az alapharmonikus frekvencia másfélszeresénél, ha az ablakon keresztül $N = 100$ minta látható :

$$\boxed{H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1}}{N}\frac{1 + z^{-N}}{1 + z^{-1}}}$$

Jellemezze az amplitúdó és a fáziskarakterisztikát!

3. Az $1 + sin\omega t + cos\omega t$ időfüggvényű jel minden alapharmonikus periódusából egyenletes mintavételezéssel $N = 4$ mintát veszünk. Határozza meg a jel diszkrét Fourier és diszkrét Walsh transzformáltját (max. *4 pont*)!

Megoldás: A diszkrét időfüggvény a következő alakú: $1 + sin\left(\frac{2\pi}{4}n\right) + cos\left(\frac{2\pi}{4}n\right),\qquad n = 0,1,2,3$

A minták: $y^T = [2 \quad 2 \quad 0 \quad 0]$. A diszkrét Fourier transzformált:

$$F\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -j & -1 & j\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0.5-0.5j\\0\\0.5+0.5j\end{bmatrix},$$

A diszkrét Walsh transzformált:

$$W\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Kapcsolódó feladat:

Fejezzük ki a két transzformáció kapcsolatát: $F = VW$!

Megoldás:

$V = FW^{-1}$

4. Vezesse le az $(1-z^{-N})\left[\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}+\frac{z_m^{-1}z^{-1}}{1-z_m^{-1}z^{-1}}\right]$ átviteli függvényű szűrő impulzusválaszának diszkrét időfüggvényét $z_m=e^{j\frac{2\pi}{N}m}$ esetére (*max. <u>3 pont</u>*)! Adja meg a számértékeket is $N=5,\ m=1$ esetére (*max. <u>2 pont</u>*)!

Megoldás: A szűrő átviteli függvénye a sorfejtést követően: $H(z)=a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots+a_N z^{-N}$,

ahol $a_i=z_m^i+z_m^{-i}=2cos\left(\frac{2\pi}{N}mi\right), i=1,2,\cdots,N$, mert a sorfejtés együtthatói N-re periodikusak, ezért a N lépésű eltolás következtében N lépés után a tagok egymást kiejtik.

Ezzel az impulzusválasz: $y(0)=0, y(n)=2cos\left(\frac{2\pi}{N}mn\right), n=1,2,\cdots,N$

A numerikus értékek: $0,\quad 2cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=0.618,\quad 2cos\left(\frac{2\pi}{5}2\right)=-1.618,\quad 2cos\left(\frac{2\pi}{5}3\right)=-1.618,\quad 2cos\left(\frac{2\pi}{5}4\right)=0.618,\quad 2$

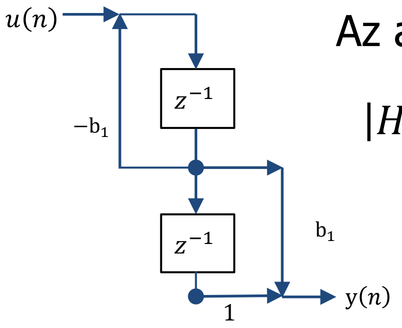
Kapcsolódó feladat:

Vezesse le a $j(1-z^{-2N})\left[\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}-\frac{z_m^{-1}z^{-1}}{1-z_m^{-1}z^{-1}}\right]$ átviteli függvényű szűrő impulzusválaszának diszkrét időfüggvényét $z_m=e^{j\frac{2\pi}{N}m}$ esetére!

Megoldás: A szűrő átviteli függvénye a sorfejtést követően:

$H(z)=a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\cdots+a_N z^{-N}$, ahol $a_i=j\left(z_m^i-z_m^{-i}\right)=-2sin\left(\frac{2\pi}{N}mi\right), i=1,2,\cdots,2N$.

5. Rajzolja fel a $H(z)=z^{-1}\frac{z^{-1}+b_1}{1+b_1 z^{-1}}$ átviteli függvényt megvalósító direkt struktúra blokkvázlatát (max. *<u>2 pont</u>*)! Bizonyítsa be, hogy a $H(z)$ átviteli függvény mindentáteresztő tulajdonságú (max. *<u>2 pont</u>*)! Valósítsa meg ezt az átviteli függvényt rezonátor alapú struktúrával is (max. *<u>4 pont</u>*)! Rajzolja le ez utóbbi blokkvázlatát (max. *<u>1 pont</u>*)! Rajzolja fel mindkét struktúra transzponáltjának blokkvázlatát is (max. *<u>2 pont</u>*)! **Megoldás:**



Az átvitel abszolút értékének négyzete a komplex konjugálttal történő szorzás után:

$$|H(z)|^2=z^{-1}\frac{z^{-1}+b_1}{1+b_1 z^{-1}}z\frac{z+b_1}{1+b_1 z}=\frac{1+b_1(z+z^{-1})+b_1^2}{1+b_1(z+z^{-1})+b_1^2}=1$$

Rezonátor pozíció választás, rezonátor átviteli függvény, a megvalósítandó átvitel a rezonancia frekvenciákon:

$$z_0=1, H_0(z)=\frac{r_0 z^{-1}}{1-z^{-1}}, w_0=H(1)=\frac{1+b_1}{1+b_1}=1$$

$$z_1=-1, H_0(z)=\frac{-r_1 z^{-1}}{1+z^{-1}}, w_1=H(-1)=-1\frac{-1+b_1}{1-b_1}=1$$

A visszacsatolt rezonátoros struktúra átviteli függvénye:

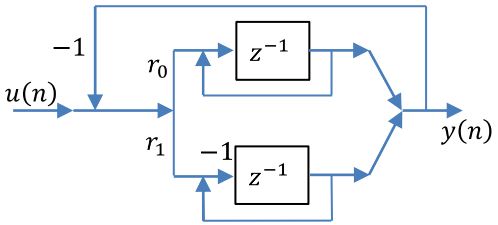
$$\frac{\frac{r_0 z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{r_1 z^{-1}}{1+z^{-1}}}{1+\frac{r_0 z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{r_1 z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{r_0 z^{-1} + r_0 z^{-2} - r_1 z^{-1} + r_1 z^{-2}}{1 - z^{2} + r_0 z^{-1} + r_0 z^{-2} - r_1 z^{-1} + r_1 z^{-2}} = \frac{(r_0 - r_1) z^{-1} + (r_0 + r_1) z^{-2}}{1 + (r_0 - r_1) z^{-1} + (r_0 + r_1 - 1) z^{-2}} = \frac{z^{-2} + b_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}}$$

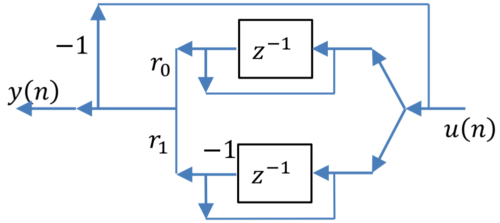
Az együtthatók egyeztetésével:

$$r_0 + r_1 = 1, r_0 - r_1 = b_1,$$

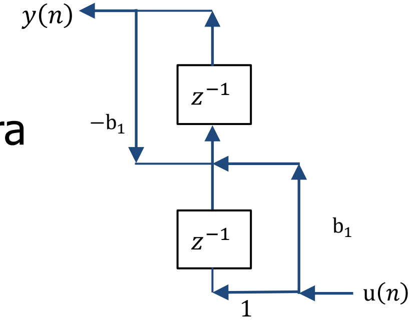
$$r_0 = \frac{1+b_1}{2}, r_1 = \frac{1-b_1}{2}$$

A rezonátoros megvalósítás és transzponáltja:





A direkt struktúra transzponáltja:



6. Vezesse le annak feltételét, hogy a visszacsatolt rezonátoros struktúra eredő átvitele ne haladja meg az egyet (max. _2 pont_)! Mikor nevezünk egy lineáris rendszert ortogonálisnak (max. _1 pont_)? Bizonyítsa be, hogy a magára hagyott ortogonális rendszer disszipatív (max. _3 pont_)! Vezesse le, hogy egy ortogonális rezonátor 100%-os negatív visszacsatolás és alkalmas paraméter beállítás esetén ortogonális struktúrát valósít meg (max. _4 pont_)!

Megoldás: A nyílthurkú átvitelt $a + jb$-vel jelölve, a visszacsatolt struktúra átvitele: $\boxed{\frac{a+jb}{1+a+jb},}$ amivel a vizsgált feltétel:

$$\left|\frac{a+jb}{1+a+jb}\right| \leq 1,\ a^2 + b^2 \leq (1+a)^2 + b^2,\ 0 \leq 1 + 2a,\ \boxed{a \geq -\frac{1}{2}}$$

Részletesebben kifejtve, azzal a feltételezéssel, hogy az r_m súlytényezők mindegyike valós:

$$a = Re \sum_{m=0}^{N-1} \frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} r_m \left[\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} + \frac{z_m^{-1} z}{1 - z_m^{-1} z}\right] = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} r_m \left[\frac{z_m z^{-1} + z_m^{-1} z - 2}{2 - z_m z^{-1} - z_m^{-1} z}\right] = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} r_m \quad a = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} r_m \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{m=0}^{N-1} r_m \leq 1}$$

A zh-ban ez a megoldás teljes értékű, a teljes bizonyítás a jegyzet szerinti, ahol az r_m súlytényezők valós voltát előre nem kötjük ki, hanem a vizsgált feltétel teljesülésének feltételeként adódik.

Egy lineáris rendszert ortogonálisnak nevezünk, ha az $\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$ alakú felírásban $T^T = T^{-1}$ tulajdonságú, azaz T ortogonális mátrix.

Ezt az egyenletet balról megszorozva a transzponáltjával:

$$[x^T(n+1) \quad y^T(n)] \begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = [x^T(n) \quad u^T(n)] T^T T \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix} = x^T(n+1)x(n+1) + y^T(n)y(n) = x^T(n)\,x(n) + u^T(n)u(n)$$

A magára hagyott rendszer ($u(n) = 0$) belső energiája mindaddig csökkenni fog, amíg $y(n) \neq 0$:

$$\boxed{x^T(n+1)x(n+1) - x^T(n)\,x(n) = -y^T(n)y(n)}$$

Kvantálási stratégiaként abszolút-érték csonkítást alkalmazva a magára hagyott rendszer felemészti belső energiáját.

Az ortogonális rezonátor állapot-, becsatolási és kicsatolási mátrixai:

$$A = \begin{bmatrix} cos\varphi_m & -sin\varphi_m \\ sin\varphi_m & cos\varphi_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2r_m cos\varphi_m \\ 2r_m sin\varphi_m \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

A 100%-os negatív visszacsatolás azt jelenti, hogy a kicsatolás és a becsatolás együttes hatása kivonódik az állapotátmenet mátrixból (korábbi jelöléssel: $A - GC$):

$$A - BC = \begin{bmatrix} cos\varphi_m & -sin\varphi_m \\ sin\varphi_m & cos\varphi_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2r_m cos\varphi_m & 0 \\ 2r_m sin\varphi_m & 0 \end{bmatrix}$$

Mindentáteresztő tulajdonságot beállítva: $2r_m = 1$, ezáltal:

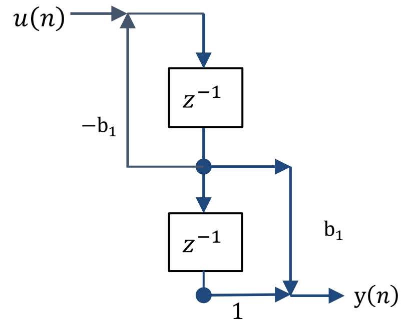
$$T = \begin{bmatrix} A - BC & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -sin\varphi_m & cos\varphi_m \\ 0 & cos\varphi_m & sin\varphi_m \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

amivel:

$$\boxed{T^T T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -sin\varphi_m & cos\varphi_m & 0 \\ cos\varphi_m & sin\varphi_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -sin\varphi_m & cos\varphi_m \\ 0 & cos\varphi_m & sin\varphi_m \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I}$$

Kapcsolódó feladat: Írja fel a transzponált ortogonális rezonátor rendszer-mátrixait! Alkalmazzon 100%-os negatív visszacsatolást! Bizonyítsa be, hogy ez a rendszer is ortogonális!

7*. Bizonyítsa be, hogy az 5. feladatban szereplő rendszer belső energiáját a direkt struktúra esetén $P_D = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}$, $z_0 = 1$ és $z_1 = -1$ pozíciójú rezonátorokat alkalmazó rezonátor alapú struktúra esetén pedig $P_R = 2diag\left\langle \frac{1}{1+b_1} \quad \frac{1}{1-b_1} \right\rangle$ mátrixok segítségével tudjuk megadni (max. *4 pont*)! Milyen állítást tudunk megfogalmazni abszolút-érték csonkítás esetén ezekre a struktúrákra (max. *1 pont*)?

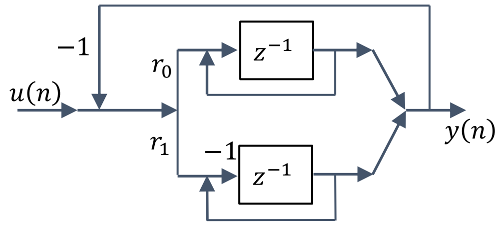


Megoldás: Az 5. feladatban szereplő direkt struktúra állapot-, becsatolási és kicsatolási mátrixai:

$$A = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ C = [b_1 \quad 1].$$

Igazolandó, hogy $A^T P_D A + C^T C = P_D$. Behelyettesítve:

$$\begin{bmatrix} -b_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 1 \end{bmatrix} [b_1 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} -b_1^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b_1 \\ b_1 & 1 \end{bmatrix}$$



Az 5. feladatban szereplő rezonátoros struktúra állapot-, becsatolási és kicsatolási mátrixai:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - r_0 & -r_0 \\ r_1 & -1 + r_1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} r_0 \\ -r_1 \end{bmatrix},\ C = [1 \quad 1].$$

Igazolandó, hogy $A^T P_R A + C^T C = P_R$. Behelyettesítve:

$$\begin{bmatrix} 1 - r_0 & r_1 \\ -r_0 & -1 + r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - r_0 & -r_0 \\ r_1 & -1 + r_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix},$$

Kihasználva, hogy $r_0 + r_1 = 1$, az egyenletek átírhatók:

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_1 \\ -r_0 & -r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & -r_0 \\ r_1 & -r_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix}$$

formába, amiből már belátható, hogy

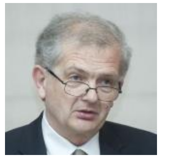
$$\begin{bmatrix} \frac{r_1}{r_0} & -1 \\ -1 & \frac{r_0}{r_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_1} \end{bmatrix}$$

Kapcsolódó feladat: Mutassa be, hogy az $R = diag\left\langle \frac{1}{\sqrt{r_0}}, \frac{1}{\sqrt{r_1}} \right\rangle$ mátrixszal megvalósított hasonlósági transzformáció ortogonális rendszerre vezet!

Megoldás:

$$A' = RAR^{-1} = \begin{bmatrix} r_1 & -\sqrt{r_0 r_1} \\ \sqrt{r_0 r_1} & -r_0 \end{bmatrix},\quad C' = CR^{-1} = [\sqrt{r_0} \quad \sqrt{r_1}],$$

$$\begin{bmatrix} r_1 & \sqrt{r_0 r_1} \\ -\sqrt{r_0 r_1} & -r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & -\sqrt{r_0 r_1} \\ \sqrt{r_0 r_1} & -r_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{r_0} \\ \sqrt{r_1} \end{bmatrix} [\sqrt{r_0} \quad \sqrt{r_1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Néhány példa figyelemfelhívásként a jegyzet végéről:

Az LMS eljárás példáján keresztül mutassa be a stabilitáselméleti megközelítés lényegét, és határozza meg a bátorsági tényező célszerű, konvergenciát biztosító értéktartományát! (Ma megbeszéltük)

Egy autonóm diszkrét idejű rendszer állapotátmenet mátrixa: $\boldsymbol{A} = diag < 0.9, -0.9 >$, megfigyelési mátrixa $\boldsymbol{C} = [1,1]$. Határozza meg a rendszerhez illesztett megfigyelő $\boldsymbol{G}$ erősítés mátrixának elemeit úgy, hogy a megfigyelő véges lépésben konvergáljon!

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC})\,(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC}) = \boldsymbol{0} \quad \text{ahol} \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}$$

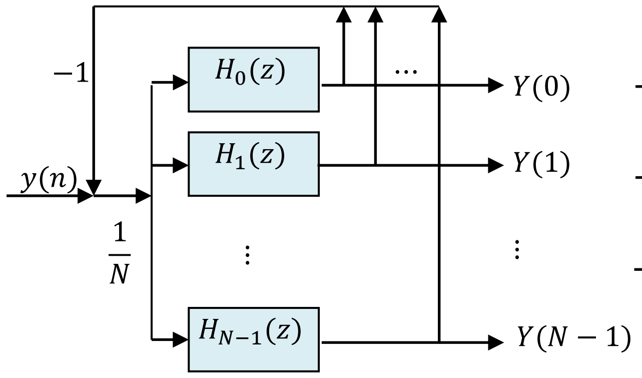
Adja meg annak a jelnek a diszkrét időfüggvényét, amelyet az $(1, 1-j, 1, 1+j)$ értékű Fourier transzformált jellemez!

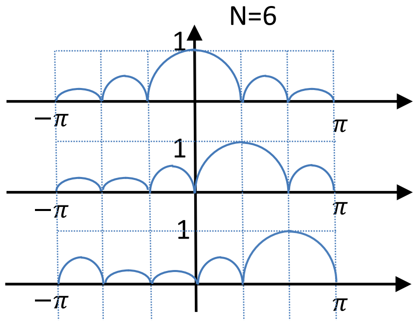
$$1 * e^{j\frac{2\pi}{4}0n} + (1-j) * e^{j\frac{2\pi}{4}1n} + 1 * e^{j\frac{2\pi}{4}2n} + (1+j) * e^{j\frac{2\pi}{4}3n} = 1 + 2cos\left(\frac{2\pi}{4}n\right) + 2sin\left(\frac{2\pi}{4}n\right) + (-1)^n$$

Valósítsa meg a $H(z) = \frac{(1-p)z^{-1}}{1-pz^{-1}}$ átviteli függvényt rezonátor alapú struktúrával! Rajzolja le a szűrő blokkvázlatát! Határozza meg a szűrő átvitelét nulla frekvencián, és a mintavételi frekvencia felénél! Hová célszerű helyezni a rezonátor pólust?

$$\boxed{f = 0 \;\rightarrow z = 1} \qquad \boxed{f = \frac{f_m}{2} \rightarrow z = -1}$$

N=5 esetére tervezzen véges impulzusválaszú szűrőt a frekvencia-mintavételi eljárás segítségével! A szűrő átvitele nulla frekvencián egységnyi, $0.2 * fm$ és $0.4 * fm$ frekvencián (f_m a mintavételi frekvencia) pedig nulla. Rajzolja fel a szűrőt magvalósító számítás blokkvázlatát, és vezesse le az amplitúdó karakterisztikáját megadó összefüggést! Mekkora a szűrő átvitelének abszolút értéke $0.1 * fm$ frekvencián?





Köszönöm a figyelmet!