



# Méréselmélet

7. fejezet: Modellalapú jelfeldolgozás (folyt.)

2021. április 28.

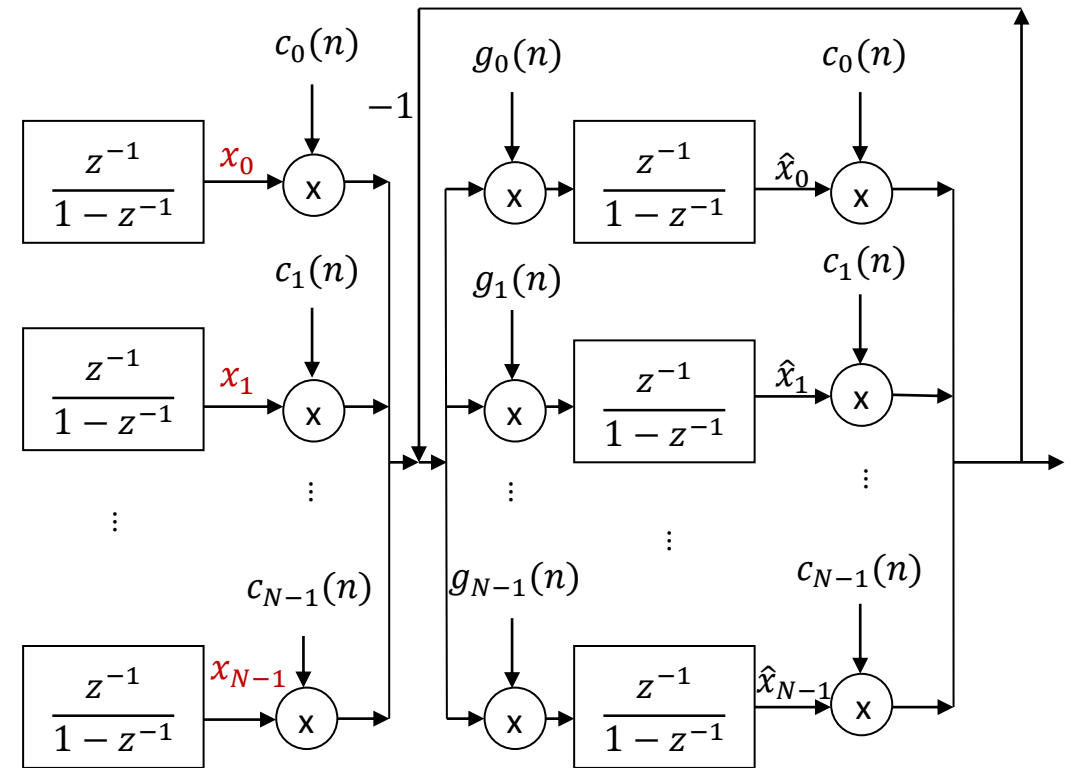
## A 2. házi feladat megbeszélése:

1.1. Állítson elő  $u(n), n = 0, 1, \dots$  diszkrét értéksorozatot multiszinusz generátor „segítségével”, mégpedig úgy, hogy a diszkrét jel  $M = 100$  páratlan harmonikus komponensből álljon, az egyes harmonikus komponensek amplitúdója egységnyi, kezdőfázisa véletlen, és a sorozat várható értéke pedig 1 legyen! A multiszinusz generátort a jegyzet 46. ábrának megfelelően készítse el! Ügyeljen arra, hogy a generált jel a vizsgált frekvenciatartomány egészében megfelelő gerjesztést adjon, és a páros harmonikus pozíciókban nulla amplitúdójú gerjesztést adjon (max. 3 pont)!

Célszerűen  $N = 4M + 1$ , a harmonikusok  $\frac{mf_m}{N}$  frekvenciájúak, ahol  $m = 1, 3, \dots, 2M - 1$ .  $x_0 = 1$ . Az összesen  $M$  harmonikus mindegyikének fázisa  $[0, 2\pi]$  vagy  $[-\pi, \pi]$  tartományba eső véletlen szám. A generált jel valós (képzetes része nulla)!

$$c_m(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}mn}, g_m(n) = \frac{1}{N} e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}, m = 0, 1, \dots, N - 1, n = 0, 1, \dots,$$

$$x_{2i+1} = x_{N-2i-1}^* = \frac{1}{2} e^{j\varphi_{2i+1}}, i = 0, 1, \dots, M - 1, x_{2i} = x_{N-2i}^* = 0, i = 1, \dots, M$$



Vizsgálja meg, hogy hogyan alakul a generált jel csúcserőértéke, és hasonlítsa össze azzal az esettel, amikor a kezdőfázisok rendre nullák (max. 2 pont)!

Készítsen az előző pont szerinti generátor jelével gerjesztett rendszerek kimeneti jelének analizálására alkalmas rekurzív multiszinusz analizátort, ugyancsak a 46. ábrán látható elrendezést követve, amely a bemenetére kapcsolt jelből képes kiszámítani az abban levő harmonikus komponensek amplitúdóját és fázisát! Az 1.1. pont szerinti jel és az analizátor által rekonstruált jel különbségét ábrázolva mutassa be, hogy a generátor-analizátor pár megfelelően működik (max. 5 pont)! (A fázis meghatározásánál különös körültekintéssel járjon el: a fázis többértékű függvény, ugyanakkor a rendszerátvitel fázisa – legalábbis szakaszosan – folytonos.)

Ehhez működtesse az analizátort, és nézze meg, hogy mit ad becslőként! A helyes működést jól illusztrálja, ha az analizátort  $2N$  lépésben futtatja, és kirajzolja a különbségi jel alakulását a vizsgált tartományban!



1.3. Ez az  $u(n)$  sorozat legyen a bemenőjele a modellezendő/adaptálandó rendszernek, melynek átviteli függvénye (vagylagosan)

$$A: \frac{(1-r)z^{-1}}{1+rz^{-4}}, B: \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-4}}, C: \frac{(1-r)z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-rz^{-4})}, D: \frac{(1-r)z^{-1}(1+z^{-2})}{2(1-rz^{-4})}, E: \frac{(1-r)z^{-1}(1-z^{-1})}{2(1-rz^{-4})}, F: \frac{(1-r)z^{-1}(1-z^{-2})}{2(1-rz^{-4})} \quad (1)$$

A multiszinusz analízátorral mérje meg a modellezendő/adaptálandó rendszer kimenőjelét, és a multiszinusz frekvenciákon – felhasználva a gerjesztés amplitúdójának és fázisának értékét – határozza meg az átvitel abszolút értékét és fázisát! A páros harmonikus csatornák kimenetén mit tapasztal (max. 4 pont)? A páros harmonikus pozíciók kimenetét is figyelve végezze el a mérést abban az esetben is, amikor a modellezendő/adaptálandó rendszer kimenetét additív, nulla várható értékű,  $\sigma_n^2$  varianciájú fehér Gauss zaj terheli! A  $\sigma_n$  szórás a bemenőjel csúcsértékének 1%-ára állítsa be! Jellemezze az amplitúdó-mérés hibáját a páros harmonikus csatornák kimenetén végzett mérés felhasználásával (max. 3 pont)!

Ennél a feladatnál minden harmonikus frekvencián meg tudja határozni az átviteli függvény abszolút értékét és fázisát. Az analízátort megfelelően működtetve -  $N$  lépés után - a megfigyelő és a generátor komplex súlytényezőinek hányadosa ugyanezt az átvitelt kell produkálja! Itt ügyeljen arra, hogy csak az állandósult állapot elérése után mérjen, és a fázist megfelelően értelmezze! Zajos mérés esetén mutassa be a mérési hiba abszolút értékét és fázisát célszerűen a teljes vizsgált frekvenciatartományra vonatkozó diagram segítségével!

1.4. Az adaptálandó rendszert lineáris kombinátorral igyekszünk modellezni. Ennek kimenőjele

$$\hat{y}(n) = w_1 u(n-1) + w_2 u(n-2) + \dots + w_P u(n-P). \quad (2)$$

Juttassa el a modellezendő/adaptálandó rendszert az állandósult állapotáig, majd ezt követően végezzen megfigyeléseket, és a rekurzív LS módszer alkalmazásával határozza meg (2) súlyozó együtthatóit! Hány lépés után ítélte úgy, hogy a rendszer kimenőjele elérte az állandósult állapotát? Hány lépés után állította le a paraméterek LS becslését? (A lineáris kombinátor súlytényezőiből alkotott állóvektort  $W$ , a regressziós vektort  $X$  jelölje!) (max. 5 pont)

Az állandósult állapot eléréséhez szükséges „időt”/lépésszámot a vizsgált szűrő súlyfüggvényének vizsgálatával határozhatjuk meg. Az állandósult állapotot akkor érzük el, amikor a súlyfüggvény lecsengett. Ennek mértéke az Önök (kísérlet)tervezői döntése! Hasonló megfontolás kell a rekurzív LS becslés leállításához.



1.5. Fejtsse mértani sorba az (1) átviteli függvényt! Vesse össze a sorfejtett alak és a lineáris kombinátor együtthatóit az (1) átviteli függvényű rendszer súlyfüggvényével! (max. 2 pont)!

Itt a sorfejtés célszerűen a nevezőpolinom alakjából adódóan a mértani sor szerinti. Ennek a súlyfüggvényt kell kiadnia. Az LS becslés akkor jó, ha  $P$  súlytényező és a súlyfüggvény minták hasonló értékek.

2. Alkalmazza az 1.4. feladat esetére az LMS eljárást:  $W(n+1) = W(n) + 2\mu e(n)X(n)$ .

A paraméterek nulla kezdeti értékéből indulva futtassa az algoritmust a (közelítő) megoldás megtalálásáig. Ezt követően  $r$  értékét csökkentse  $q$ -val, majd folytassa a futtatást az új megoldás megtalálásáig. A bátorsági/konvergencia tényezőt Ön válassza meg! Indokolja választását! Rajzolja ki az együtthatók alakulását az iterációs lépések függvényében (konvergencia diagram)! Beadandó a program kommentezett listája és az együtthatók konvergencia diagramja (max. 5 pont)!

A konvergencia diagramokat úgy készítse el, hogy azokon a paraméterek állandósult állapota egyértelmű, értékük leolvasható legyen. A paraméter változtatást az előző beállítás végértékének elérését követően végezze, és tegye egyértelműen láthatóvá, hogy a paraméterek mely értékről mely értékre váltanak.

3. Végezze el a modellillesztést mindkét átviteli függvényre ( $r$  és  $r - q$  esetek) az

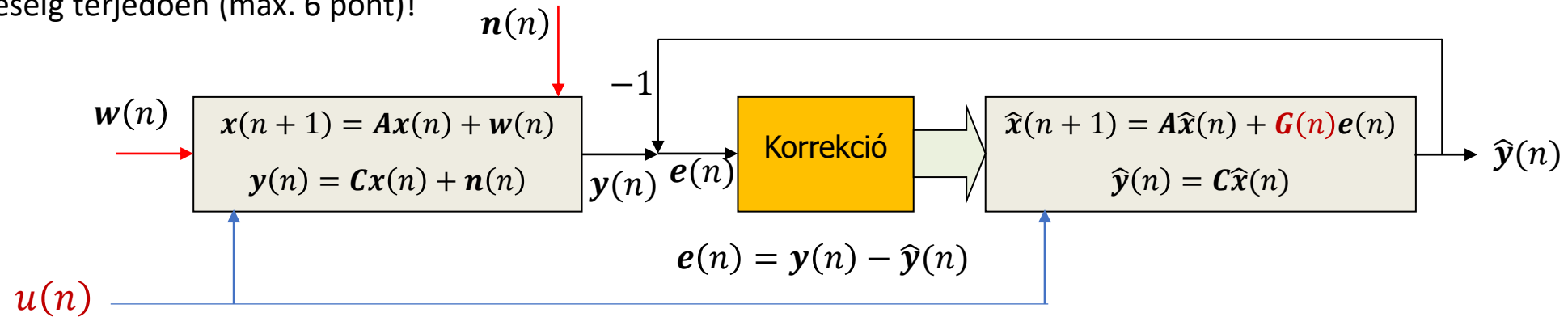
$$\hat{y}(n) = a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) + a_3 u(n-3) - b_1 \hat{y}(n-1) - b_2 \hat{y}(n-2) - b_3 \hat{y}(n-3) - b_4 \hat{y}(n-4)$$

alakú, végtelen impulzusválaszú modell alkalmazásával is! Az illesztés során a véges impulzusválaszú problémára visszavezetés módszerét (*equation-error formulation*) alkalmazza! Beadandó a program kommentezett listája és az együtthatók konvergencia diagramja (max. 5 pont)!

Itt lehetősége van a paraméterek pontos értékével való összehasonlításra: tegye meg!



4. Készítsen az (1) átviteli függvényű rendszerhez állapotváltozós leírást! Alkossa meg a rendszer állapotainak becslésére alkalmas Kalman prediktor programját! A megfigyelési zaj az 1.3. pont szerinti, a rendszerzaj Gauss eloszlású fehér zaj, kovariancia mátrixa  $\mathbf{C}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}$ . A  $\sigma_w$  szórást az 1.1. pont szerinti bemenőjel csúcsértékének 1%-ára állítsa be! Az 1.1. pont szerinti bemenőjel alkalmazásával futtassa a prediktort mindkét esetre ( $r$  és  $r-q$  esetek), és ábrázolja grafikusan a hibarendszer állapotváltozóinak és a  $\text{trace}\mathbf{P}(n)$  értékének alakulását az állandósult állapot eléréséig terjedően (max. 6 pont)!



## 7.2. Jelek reprezentációja jelterekben

**Jelterek:** az euklideszi tér általánosításai

$$\mathbf{x} = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \boldsymbol{\phi}_m,$$

$$\alpha_m = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_m), \\ m = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\boldsymbol{\phi}_m(n) = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} mn\right), \\ \boldsymbol{\theta}_m(n) = \frac{1}{N} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} mn\right).$$

**Diszkrét Fourier  
transzformáció**

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \phi_m(t)$$

$$\alpha_m = (x(t), \theta_m(t)) \\ m = 0, 1, \dots$$

$$\phi_m(t) = \exp(j2\pi mt), \\ \theta_m(t) = \exp(-j2\pi mt).$$

**Fourier sorfejtés**

$$x(t) = \int_S \alpha(s) \phi(t, s) ds$$

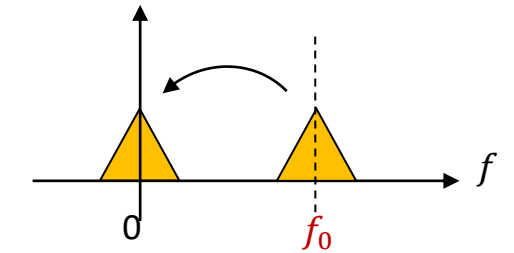
$$\alpha(s) = \int_T x(t) \theta(s, t) dt$$

$$\phi(t, s) = \exp(j2\pi st), \\ \theta(s, t) = \exp(-j2\pi st).$$

**Fourier transzformáció**

**Fourier transzformáció:** Az  $x(t)$  jelet szorozzuk az  $\exp(-j2\pi f_0 t)$  komplex exponenciálissal, aminek hatására a jel spektruma balra tolódik  $f_0$ -val.

Az integrálás (lásd  $\alpha(s)$  számítása) végtelenül keskeny aluláteresztő szűrésnek felel meg, aminek eredménye a spektrum  $f_0$ -beli értéke.



**Fourier sorfejtés:** Az  $x(t)$  jelet harmonikus viszonyban lévő komplex exponenciálisok segítségével írjuk le. Az integrálás (lásd  $\alpha_m$  számítása) végtelenül keskeny aluláteresztő szűrésnek felel meg, aminek eredménye a spektrum értéke az egymással harmonikus viszonyban lévő frekvenciákon.

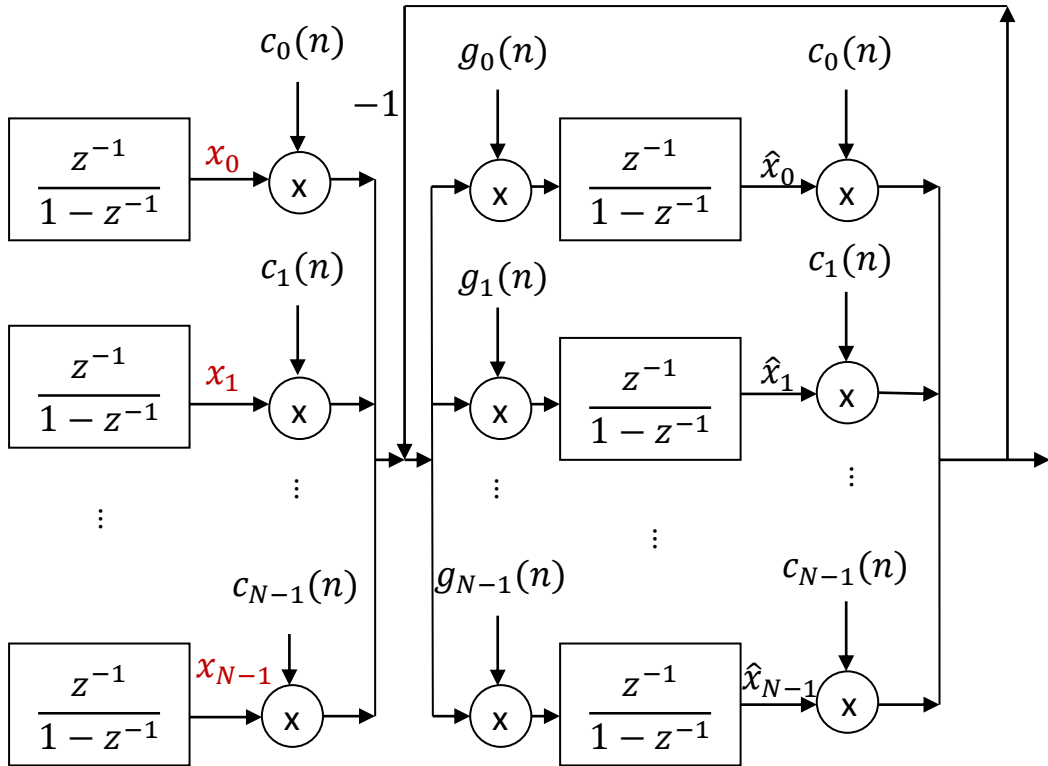
**Diszkrét Fourier transzformáció:** Az  $x$  diszkrét jelet harmonikus viszonyban lévő, diszkrét komplex exponenciálisok segítségével írjuk le.

Az összegzés (lásd  $\alpha_m$  számítása) véges sáv szélességű digitális aluláteresztő szűrésnek felel meg, aminek eredménye a spektrum közelítő értéke az egymással harmonikus viszonyban lévő frekvencia pozíciókban, ill. azok környezetében.

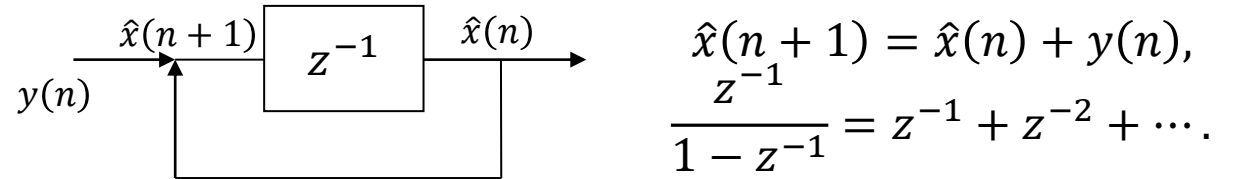


### 7.3. Megfigyelő jelfeldolgozási feladatokra

A súlyozó együtthatókat bemenet nélküli, diszkrét integrátorokban tárolt értékek adják:  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$



A mérendő jelről azt tételezzük fel, hogy a bázis-rendszer elemek lineáris kombinációjaként áll elő, és a bázisvektorok dimenziójának megfelelő mintából álló diszkrét jel.



$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + y(n),$$

$$\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

**Jelölés:**  $\{c_m(n)\}$ ,  $\{g_m(n)\}$  jelöli a bázis/reciprok bázis rendszereket,  $m, n = 0, 1, \dots, N-1$ .

$n$ : „diszkrét idő” index

$m$ : „diszkrét frekvencia” index

$\mathbf{x}(n) = [x_0(n) \ x_1(n) \ \dots \ x_{N-1}(n)]^T$  a jelet generáló hipotetikus rendszer állapotváltozóit.

$\hat{\mathbf{x}}(n) = [\hat{x}_0(n) \ \hat{x}_1(n) \ \dots \ \hat{x}_{N-1}(n)]^T$  becslőjét megfigyelővel állítjuk elő.

A hipotetikus jelgeneráló rendszert leíró egyenletek:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{x}(n); \quad y(n) = \mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n),$$

A megfigyelő:  $\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{g}(n)\mathbf{c}^T(n)[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)]$

$$\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{g}(n)\mathbf{c}^T(n))[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)], \quad \mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1) = \prod_{k=0}^n (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k))[\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)]$$

$$\prod_{k=0}^{N-1} (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k)) = \mathbf{0}.$$

Ez viszont teljesül, ha  $\{c_m(n)\}$ , és  $\{g_m(n)\}$  bázis/reciprok bázis párt alkotnak ( $m, n = 0, 1, \dots, N-1$ )!

A diszkrét Fourier transzformáció (DFT) esetén:

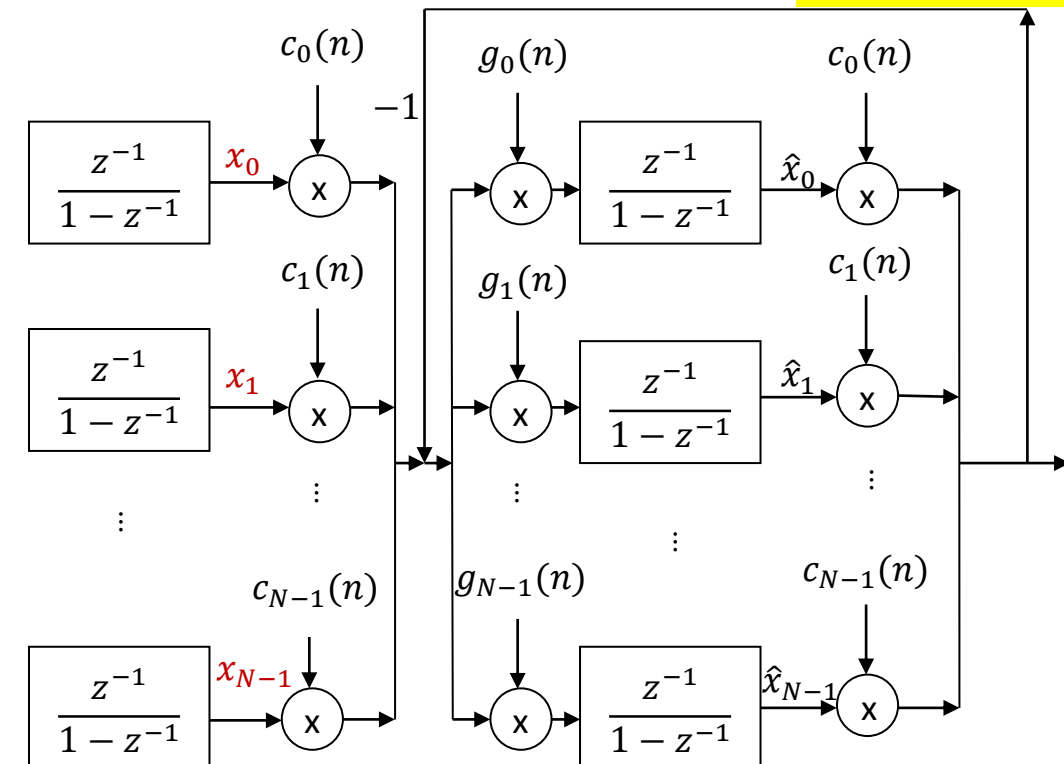
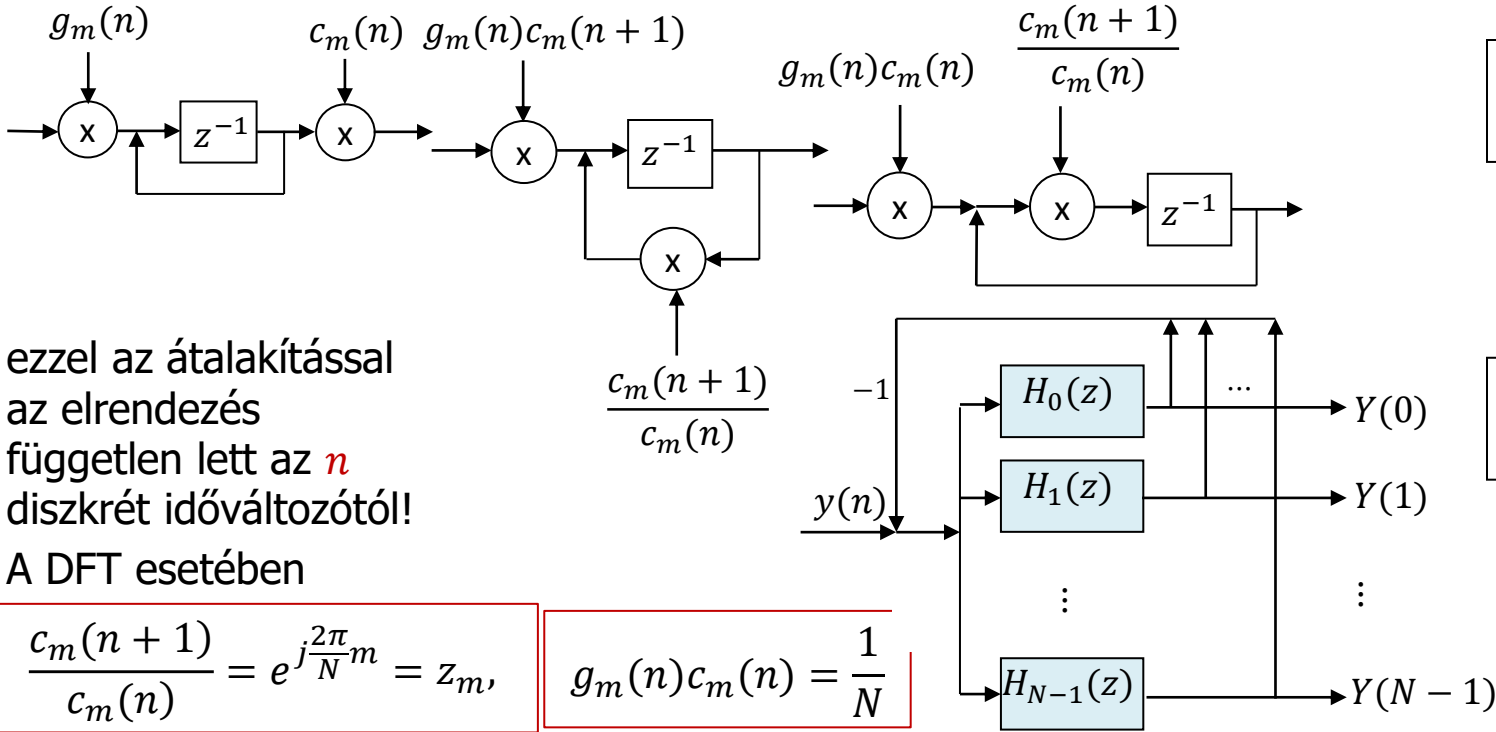
$$\left\{ c_m(n) = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}mn\right) \right\}, \quad \left\{ g_m(n) = \frac{1}{N} \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}mn\right) \right\}_7$$



### A rekurzív jelreprezentáció sajátosságai:

- (1) Soros-párhuzamos átalakító (2) Folytathatóság, decimáció
- (3) Csúzó-ablakos/rekurzív transzformáció (4)  $N$  csatornás szűrő
- (a) A diszkrét integrátorok kimenete
- (b) A diszkrét integrátorok utáni keverők kimenetei

### Keverés-integrálás-keverés helyett sávszűrés:



$$T_m(z) = \frac{H_m(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N} \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}$$

$T_m(z)$  alternatív megvalósítása:

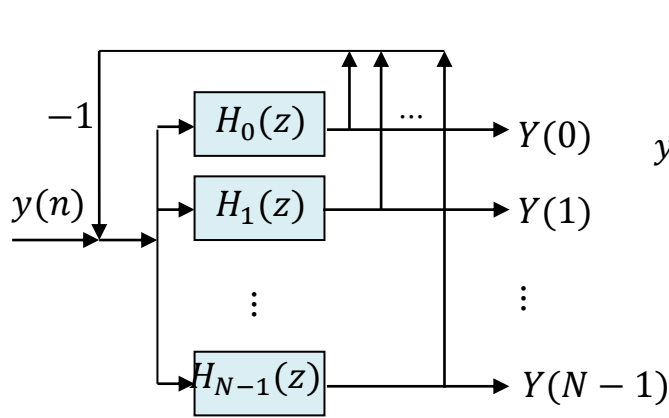
$$T_m(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}$$

$H_P(z)$  alternatív megvalósítása:

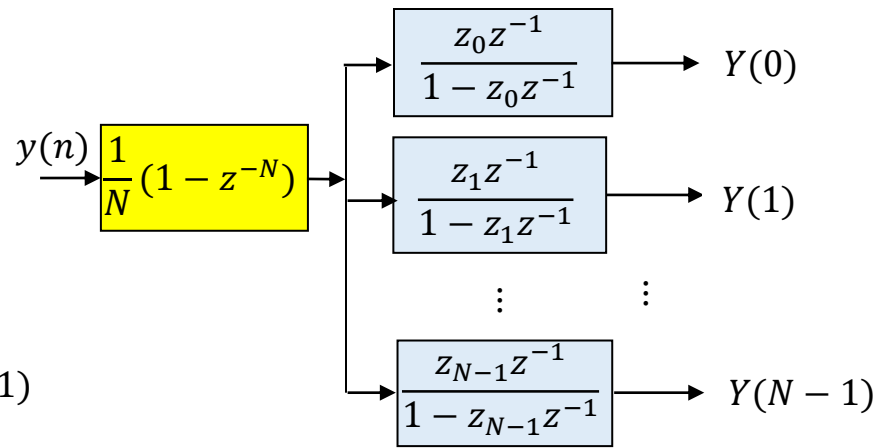
$$H_P(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = z^{-N}$$



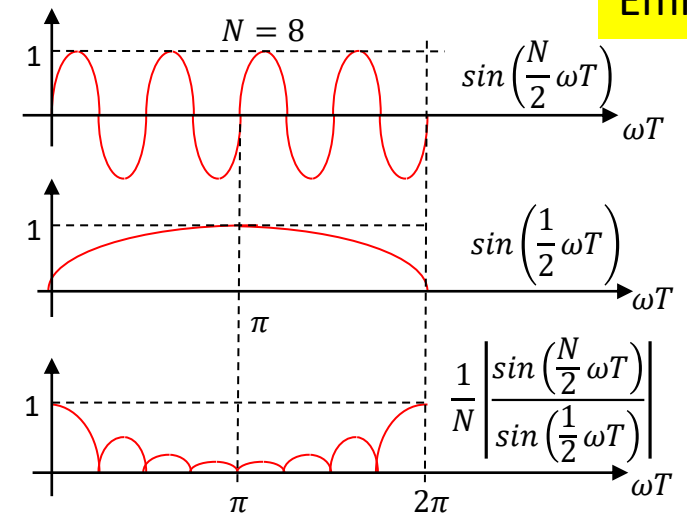




### Rezonátoros struktúra



### Lagrange struktúra



$m = 0$  esetén ( $z_0 = 1$ ) megegyezik a csúszó ablakos átlagoló átviteli függvényével:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} (1 - z^{-N})}{N (1 - z^{-1})}, \quad H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T} \sin\frac{N\omega T}{2}}{N \sin\frac{\omega T}{2}}$$

A megfigyelő alapú (rezonátoros) struktúra kedvezőbb tulajdonságokkal rendelkezik, mint a Lagrange struktúra. Minden olyan feladat ellátásra alkalmas, amire a Lagrange struktúrát kitalálták, számos egyéb lehetőséget is kínál:

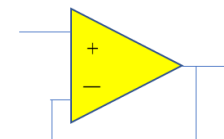
- (a) Lagrange interpoláció tetszőleges (de különböző) rezonátor pólusok esetében;
- (b) tetszőleges átviteli függvény pólus megvalósítása.

$$H_P(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = z^{-N}. \quad T_m(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}.$$

$T_m(z)$  impulzusválasza/súlyfüggvénye az  $m$ -edik (reciprok) bázisvektor, amely  $N$  mintából áll.

$$\begin{aligned} T_m(z) &= z_m z^{-1} + (z_m z^{-1})^2 + (z_m z^{-1})^3 + \dots + (z_m z^{-1})^N \rightarrow Y(m) = \\ &= \frac{1}{N} \left[ y(n - N) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^N + y(n - N + 1) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^{N-1} + \dots + (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^1 y(n - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \left[ y(n - N) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^0 + y(n - N + 1) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^{-1} + \dots + (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^{-(N-1)} y(n - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \left[ y(n - N) (e^{-j\frac{2\pi}{N}m})^0 + y(n - N + 1) (e^{-j\frac{2\pi}{N}m})^1 + \dots + (e^{-j\frac{2\pi}{N}m})^{(N-1)} y(n - 1) \right] \end{aligned}$$

Véges impulzusválaszú szűrő, mert számlálója osztható a nevezőjével. Számlálója az ún. fésűs szűrőt valósítja meg, amelynek  $m$  indexű fogát a pólus „kitöri”.



## Kapcsolat a Lagrange interpolációs polinommal:

Adott  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$  ún. alappontok felett egy függvény értékei:  $y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1), \dots, y_{N-1} = y(x_{N-1})$ .

Az ezeken a pontokon "áthaladó" Lagrange interpolációs polinom

$$Y(x) = \prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{a_m}{x - x_m}, \quad \text{ahol } a_m = \frac{y_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (x_m - x_n)}$$

Az összefüggések egybevetésével látható, hogy a frekvencia-mintavételi eljárás a Lagrange interpolációnak felel meg, és az is, hogy nem csak az  $N$ -edik egységgyökök esetében használható.

## Kapcsolat az Hermite interpolációs polinommal:

(többszörös rezonátor pólusok esete)

Ha az  $x_m$  alappontban egy függvényből  $N_0(m)$  számú adat (érték, első derivált értéke, második derivált értéke, stb.) áll rendelkezésre, akkor az ún. Hermite interpolációs polinom:

$$Y(x) = \prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n)^{N_0(n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_0(m)-1} a_{mi} x^i}{(x - x_m)^{N_0(m)}}$$

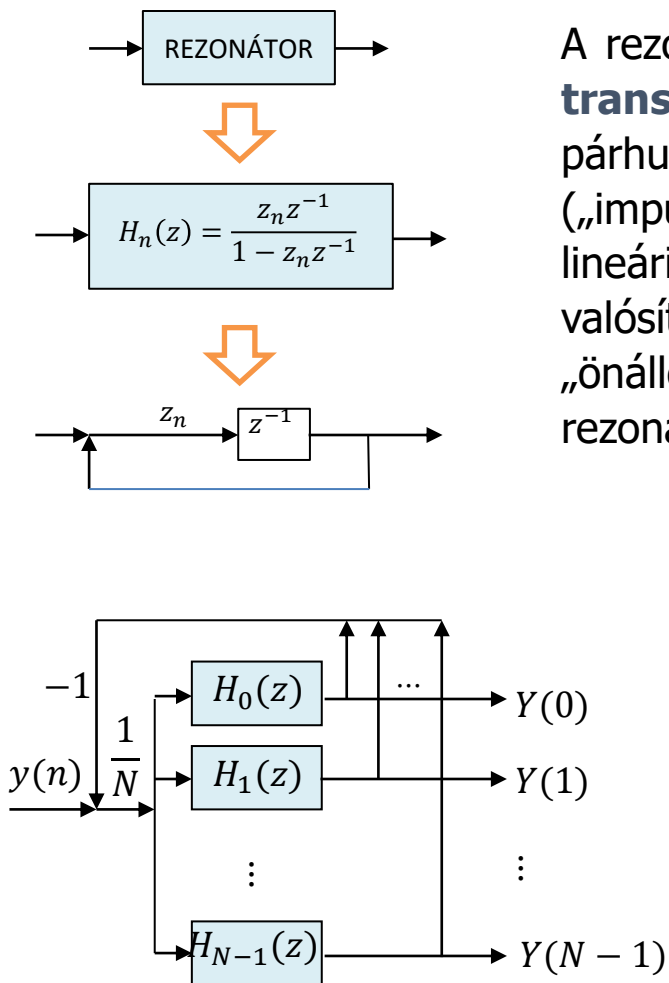
ill. a megfelelő digitális szűrő-készlet:

$$H(z) = \prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})^{N_0(n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_0(m)-1} A_{mi} z^{-i}}{(1 - z_m z^{-1})^{N_0(m)}}$$

amelynek közös zérusai, a Lagrange interpolációhoz hasonlóan előállíthatók a közös visszacsatolás segítségével. A különbség csak annyi, hogy a multiplicitásnak megfelelő számú rezonátor sorosan kapcsolódik.



## A rezonátor alapú rekurzív diszkrét Fourier transzformátor (RDFT) struktúra további alkalmazásai:



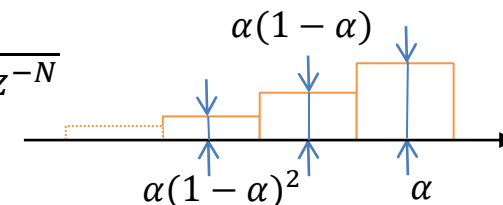
A rezonátor alapú rekurzív diszkrét Fourier transzformátor jelútjainak megfordításával - ezzel az ún. **transzponált struktúrához** jutunk - egy  $N$  bemenetű és egyetlen kimenetű szűrőt kapunk. Ez egy párhuzamos-soros átalakító, amelynek bemenetére  $N$  lépésenként elhelyezett bemeneti érték („impulzus”) súlyozza az adott bemenethez tartozó komplex exponenciális bázisfüggvényeket: ezek lineáris kombinációjaként jön létre a generált jel. A transzponált struktúra tehát egy **jelgenerátort** valósít meg. Az ebben megvalósuló visszacsatolás biztosítja, hogy az egyes rezonátorok ne éljenek „önálló életet”, pontatlanságaik a működés során ne akkumulálódnak, mint a visszacsatolás mentes rezonátorok esetében.

Csak páratlan harmonikus komponenset tartalmazó jelek esetén érdekes lehet a  $-1$  egységgyökeire alapozott bázis/reciprok bázis készlet, ill. transzformáció. Ilyenkor az első bázisvektor egy félperiódusú komplex exponenciális, a második egy másfél periódusú, stb. Ilyenkor  $H_p(z) = -z^{-N}$ , azaz a  $N$  lépésnyi késleltetés mellett fázist is fordít.

Ha az elrendezésben az  $1/N$  tényező helyett  $\alpha/N$  szerepel, ahol  $0 < \alpha < 1$ , akkor a csúszó ablakos transzformációt kombinálni tudjuk az exponenciális átlagolással. Ez azt jelenti, hogy az egymást követő,  $N$  hosszúságú blokkokat felejtő hatással átlagoljuk.

$$H_p(z) = \frac{\frac{\alpha}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \frac{\alpha}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} = \frac{\alpha z^{-N}}{1 - z^{-N} + \alpha z^{-N}} = \frac{\alpha z^{-N}}{1 - (1 - \alpha)z^{-N}}$$

$$H_p(z) = \alpha z^{-N} + \alpha(1 - \alpha)z^{-2N} + \alpha(1 - \alpha)^2 z^{-3N} + \dots,$$



**További transzformációk megvalósítása:**  $x = Ty = V_1 Fy$ ,  $x = Ty = V_2 Wy$ ,  $x = Fy = V_3 Wy$



## A rezonátor alapú megfigyelő, mint univerzális jelfeldolgozó eszköz

Általánosítsuk a rezonátor átviteli függvényét következőképpen:

$$H_m(z) = \frac{g_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}$$

Ezzel:

$$H_P(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}$$

Ha véges impulzusválaszú (FIR) viselkedést akarunk biztosítani, akkor a  $H_P(z)$  összefüggés nevezőjének az alábbi kötetést kell teljesíteni:

$$1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \frac{1}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})},$$

mert ekkor lesz  $H_P(z)$   $z^{-1}$  polinomja, azaz véges impulzusválaszú. Ehhez a  $\{g_m\}$  és az  $\{r_m = \frac{g_m}{z_m}\}$ :

### Megjegyzések:

$$g_m = \frac{z_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}; \quad r_m = \frac{1}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}$$

1. A rezonátor pólus pozíciók szabadon megválaszthatók (de legyenek különbözők).
2. Ha a rezonátor pólus pozíciók az  $N$ -edik egységgyökök, akkor  $r_m = 1/N$  minden  $m$ -re.

Ha végtelen impulzusválaszú (IIR) viselkedést akarunk, és adottak a megvalósítandó  $p_m, m = 0, 1, \dots, N-1$ , akkor:

$$1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - p_n z^{-1})}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})}$$

$$g_m = z_m \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}; \quad r_m = \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}$$

A szűrő kimenőjelét mindkét esetben is az egyes csatornák kimeneteinek lineáris kombinációjaként kapjuk.

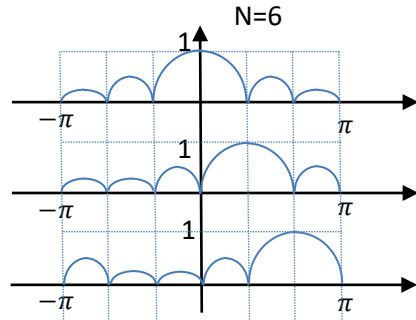
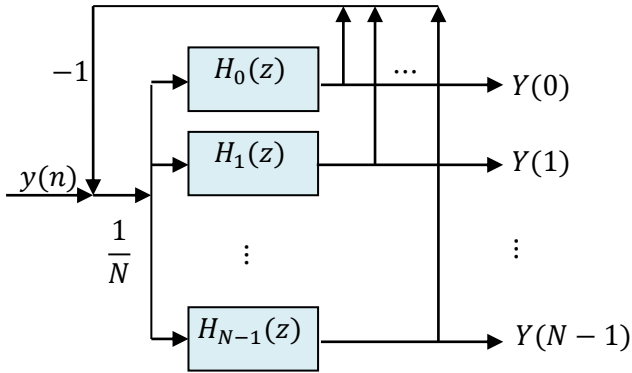
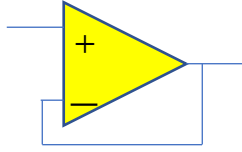
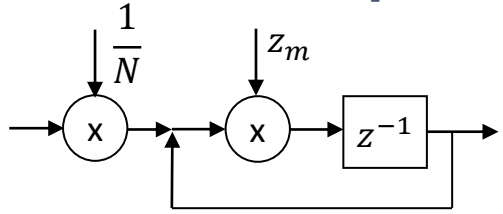
### Megjegyzés:

A rekurzív jeltranszformátort, továbbá FIR és IIR szűrőt megvalósító egyaránt alkalmas rezonátor-alapú jelfeldolgozó struktúra fontos tulajdonságai:

- (a) A jelet komponensekre bontja, majd (szükség szerint) lineáris kombináció képzéssel szintetizálja.
- (b) A rezonancia frekvenciákon a hurokerősítés végtelen, ezért az átvitel paraméter-érzékenysége – a kimeneti lineáris kombináció súlytényezőit leszámítva – ezeken a frekvenciákon nulla, az átvitel pontosságát kizárólag ezek a súlytényezők befolyásolják.
- (c) A rezonátor pólus pozíciók szisztematikus megválasztásával stabilitási és numerikus szempontból egyaránt kedvező számítási elrendezéshez jutunk.



# A rezonátor alapú megfigyelő univerzális jelfeldolgozó eszköz: összefoglalás



A rekurzív jeltranszformátort, továbbá FIR és IIR szűrőt egyaránt megvalósítani képes rezonátor-alapú jelfeldolgozó struktúra fontos tulajdonságai:

- (a) A jelet komponensekre bontja, majd (szükség szerint) lineáris kombináció képzéssel szintetizálja.
- (b) A rezonancia frekvenciákon a hurokerősítés végtelen, ezért az átvitel paraméter-érzékenysége – a kimeneti lineáris kombináció súlytényezőit leszámítva – ezeken a frekvenciákon nulla, az átvitel pontosságát kizárólag ezek a súlytényezők befolyásolják.
- (c) A rezonátor pólus pozíciók szisztematikus megválasztásával stabilitási és numerikus szempontból egyaránt kedvező számítási elrendezéshez jutunk.

## Rezonátorok megvalósítása valós aritmetikával: másodfokú, valós együttthatós rezonátor alaptagok

Valós együttthatós polinomok gyökei vagy valósak vagy konjugált komplex párok. Ugyanez igaz a belőlük származtatott rezonátoros alaptagokra. A párok összevonásával másodfokú, valós együttthatós rezonátor alaptagokhoz jutunk.

Első lépésként a konjugált komplex-pár alaptagok összegét képezzük, ezzel az átvitel valós részének kétszeresét kapjuk. Itt felhasználjuk, hogy  $z_m$  konjugáltja  $z_m^{-1}$ , és  $r_m$  valós.

$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} + \frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} = 2r_m \frac{z^{-1} \cos \phi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1} \cos \phi_m + z^{-2}} = 2\text{Re}[csatorna_m]$$

$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} - \frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} = j2r_m \frac{z^{-1} \sin \phi_m}{1 - 2z^{-1} \cos \phi_m + z^{-2}} = 2j\text{Im}[csatorna_m]$$

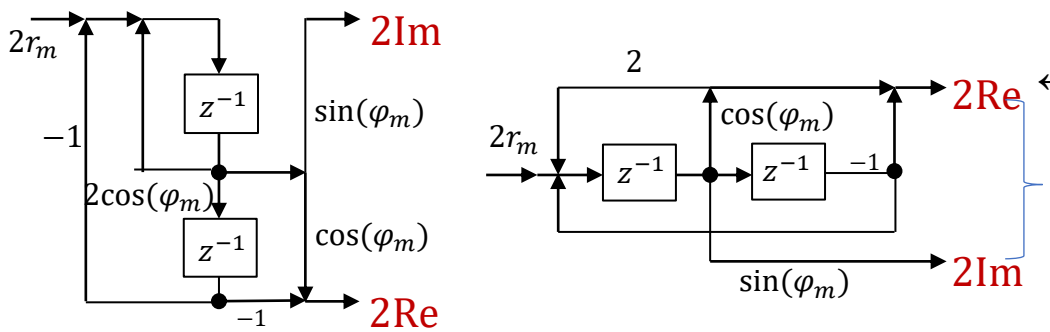
$$r_m z_m z^{-1} (1 - z_m^{-1} z^{-1}) + r_m z_m^{-1} z^{-1} (1 - z_m z^{-1}) = 2r_m (z^{-1} \cos \phi_m - z^{-2})$$

$$r_m z_m z^{-1} (1 - z_m^{-1} z^{-1}) - r_m z_m^{-1} z^{-1} (1 - z_m z^{-1}) = j2r_m z^{-1} \sin \phi_m$$

$$(1 - z_m z^{-1})(1 - z_m^{-1} z^{-1}) = 1 - (z_m + z_m^{-1}) z^{-1} + z^{-2} = 1 - 2z^{-1} \cos \phi_m + z^{-2}$$



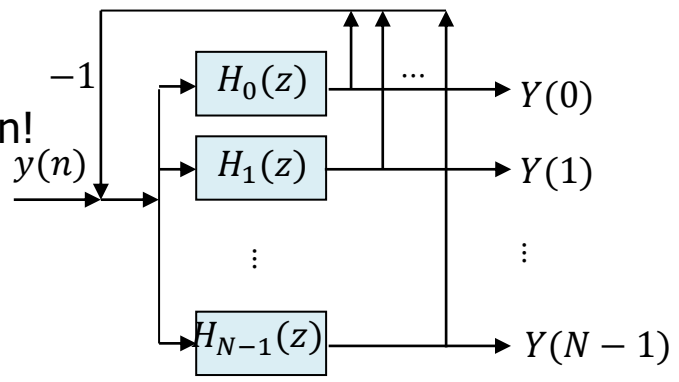
## Az ún. direkt struktúrájú másodfokú rezonátor alaptag/kiszámítási vázlat



← Ezeket összegezzük a visszacsatolásban!

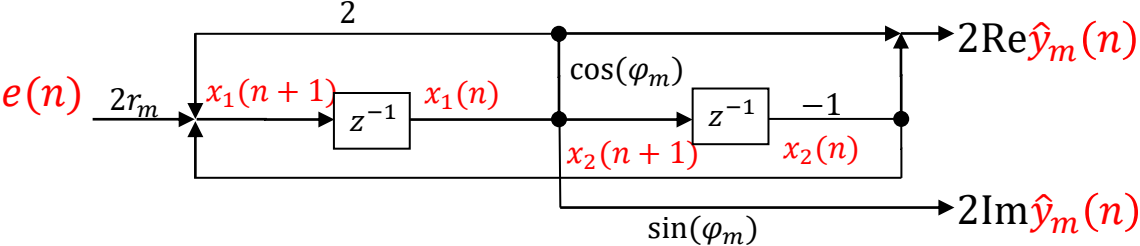
$$* w_m \rightarrow 2Re * Rew_m - 2Im * Imw_m$$

A kicsatolás súlytényezője frekvencia-mintavételi eljárás esetén!



## Másodfokú rezonátor alaptag/kiszámítási forma variációk: **Nagyon nem mindegy!**

Állapotváltozós leírás:



$$2Re \hat{y}_m(n) = [\cos \phi_m \quad -1] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

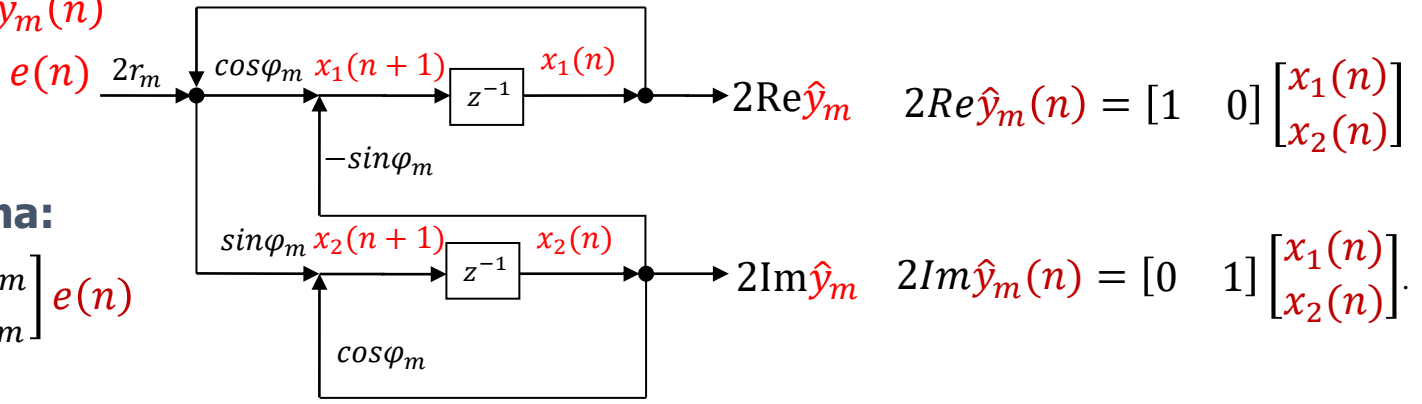
$$2Im \hat{y}_m(n) = [\sin \phi_m \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

Gondot okoz (1) a számítások ún. **dinamikatartománya**, és (2) a **véges számábrázolási pontosság**.

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos \phi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix} e(n)$$

## Ortogonalis rezonátor alaptag/kiszámítási forma:

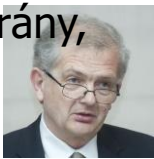
$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_m & -\sin \phi_m \\ \sin \phi_m & \cos \phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2r_m \cos \phi_m \\ 2r_m \sin \phi_m \end{bmatrix} e(n)$$



$$2Re \hat{y}_m(n) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

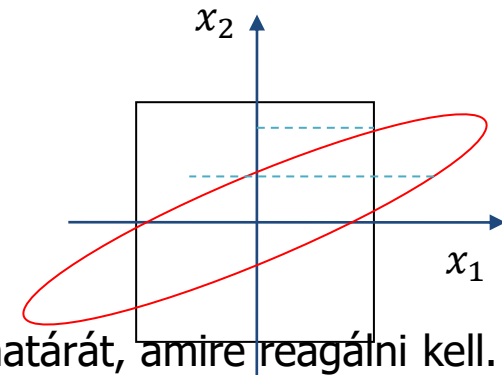
$$2Im \hat{y}_m(n) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

A struktúra egyértelmű előnye a **kedvező dinamikatartomány**. Hátránya, hogy a rezonátor pólus pozíció origótól való távolságát a  $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$  összefüggés felhasználásával állítja be, ami a valóságban, a véges számábrázolási pontosság következtében  $[\sin^2 \phi]_Q + [\cos^2 \phi]_Q \cong 1$  formában valósul meg. Itt  $[\dots]_Q$  a kvantálás műveletét szimbolizálja. További hátrány, hogy a (nem-elfajuló) szorzótényezők száma nagyobb, mint a direkt struktúra esetében.



## Túlcsondulás fixpontos aritmetika esetén:

A dinamikatartomány probléma egy másik vonatkozása, hogy milyen következménnyel jár a túlcsondulás fixpontos aritmetika esetén. A hatás mindenképpen nemlineáris, de nem mindegy, hogy ennek következtében a rezonátor belső energiája nő vagy csökken. Az ábrán ferde ellipszis lenne az azonos energiájú pontok mértani helye, ha nem lenne túlcsondulás.

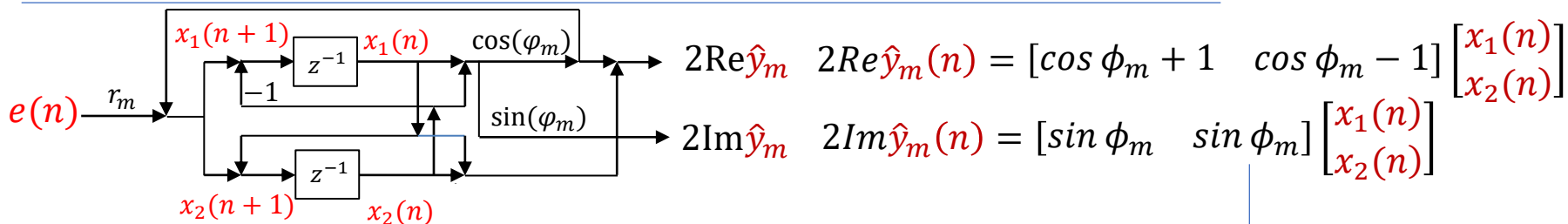


Ha áttérünk fixpontos ábrázolásra, akkor ez a ferde ellipszis metszi a számábrázolási tartomány felső határát, amire reagálni kell. Szokásos megoldások a következők: (1) kettes komplement érték érvényesítése; (2) telítődés: a maximális érték helyettesítése; (3) nulla helyettesítése.

Mindhárom stratégia esetén előfordulhat, hogy a ferde ellipszisen kívüli pontba kerülünk, ami **nagyobb belső energiájú** jelszintet eredményez. Ugyanez nem alakul ki az **ortogonális rezonátor** esetében, mert a túlcsondulás után alkalmazott stratégiák mindegyike kisebb energiájú pontba viszi a rezonátort, hiszen az állapotváltozók vektorának végpontja **ferde ellipszis helyett kör!**

(Gondoljunk arra, hogy nulla bemenet esetén az oszcillátor a belső energiájának/kezdeti értékének megfelelően produkál kimenő jelet.)

A dinamika-tartomány, a szorzás-szám és túlcsondulás esetén mutatott tulajdonságok együttes kompromisszuma az ún. **hullámdigitális rezonátor:**



$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_m & \cos \phi_m - 1 \\ \cos \phi_m + 1 & \cos \phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_m \\ r_m \end{bmatrix} e(n)$$

Itt a dinamika viszonyok alakulását **fekvő, ill. álló ellipszisek** jellemzik, így a túlcsondulás esetén mindig alacsonyabb energiájú pontba kerülünk.

### Hasonlósági transzformációk:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) \\ y(n) &= Cx(n) + Du(n) \\ x' &= Tx(n) \end{aligned}$$

A transzformált rendszer mátrixai:  $x'(n+1) = TAT^{-1}x'(n) + TBu(n)$   
 $y(n) = CT^{-1}x'(n) + Du(n)$

$$\begin{aligned} A' &= TAT^{-1} & B' &= TB \\ C' &= CT^{-1} & D' &= D \end{aligned}$$



## Néhány példa a hasonlósági transzformációval történő áttérésre:

Ha a **direkt struktúráról** az **ortogonális struktúrára** akarunk áttérni, akkor ezt egy olyan transzformáció valósítja meg, amely

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = [\cos\varphi_m \quad -1] \quad D = 0 \end{array} \right\} \text{ mátrixokat} \quad \left. \begin{array}{l} A' = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -\sin\varphi_m \\ \sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 2r_m\cos\varphi_m \\ 2r_m\sin\varphi_m \end{bmatrix} \\ C' = [1 \quad 0] \quad D' = 0 \end{array} \right\} \text{ mátrixokba transzformálja.}$$

Keressük a  $T$  transzformációt  $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  formában!  $B' = \begin{bmatrix} 2r_m\cos\varphi_m \\ 2r_m\sin\varphi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix}$   $C'T = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\cos\varphi_m \quad -1]$ ,

ezért  $a = \cos\varphi_m$ ,  $b = -1$ ,  $c = \sin\varphi_m$ , végül az  $A'T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -\sin\varphi_m \\ \sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -1 \\ \sin\varphi_m & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -1 \\ \sin\varphi_m & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = TA$  összefüggésből  $d = 0$ , azaz  $T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -1 \\ \sin\varphi_m & 0 \end{bmatrix}$ .

**Megjegyzés:** Ha csak az állapotátmenet mátrixra vonatkozó előírást akarjuk fenntartani, akkor a transzformáció fennmaradó szabad paramétereit másképpen is rögzíthetjük: ebben az esetben a becsatolás és a kicsatolás vektorai a megadotthoz képest eltérőek lesznek.

Ha a **direkt struktúráról** a **hullámdigitális struktúrára** akarunk áttérni, akkor

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = [\cos\varphi_m \quad -1] \quad D = 0 \end{array} \right\} \text{ mátrixokat} \quad \left. \begin{array}{l} A' = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & \cos\varphi_m - 1 \\ \cos\varphi_m + 1 & \cos\varphi_m \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} r_m \\ r_m \end{bmatrix} \\ C' = [\cos\varphi_m + 1 \quad \cos\varphi_m - 1] \quad D' = 0 \end{array} \right\} \text{ mátrixokba transzformáljuk.}$$

Keressük a  $T$  transzformációt  $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  formában!  $B' = \begin{bmatrix} r_m \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix}$ , Ebből:  $a = 0.5$   $c = 0.5$   $T = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .  
 $C'T = [\cos\varphi_m + 1 \quad \cos\varphi_m - 1] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\cos\varphi_m \quad -1]$ , Ebből:  $b = -0.5$   $d = 0.5$

Ellenőrzésképpen:  $A'T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & \cos\varphi_m - 1 \\ \cos\varphi_m + 1 & \cos\varphi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = TA$





Ha a **direkt struktúráról** a **transzponált direkt struktúrára** akarunk áttérni, akkor ezt egy olyan transzformáció valósítja meg, amely az

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [\cos\varphi_m & -1] & D &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ mátrixokat} \quad \left. \begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & B' &= \begin{bmatrix} \cos\varphi_m \\ -1 \end{bmatrix} \\ C' &= [2r_m & 0] & D' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ mátrixokba transzformálja.}$$

A transzponált struktúrát úgy kapjuk, hogy a jelfolyamgráf valamennyi nyilának irányát megfordítjuk, a kimenetet bemenetként, a bemenetet kimenetként használjuk.

Keressük a  $T$  transzformációt  $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  formában!  $A'T = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = TA$

$$A'T = \begin{bmatrix} 2a\cos\varphi_m + c & 2b\cos\varphi_m + d \\ -a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a\cos\varphi_m + b & -a \\ 2c\cos\varphi_m + d & -c \end{bmatrix} = TA \quad \text{Innen felhasználva, hogy } b = c, \text{ továbbá}$$

$$B' = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C'T = [2r_m \quad 0] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\cos\varphi_m \quad -1]$$

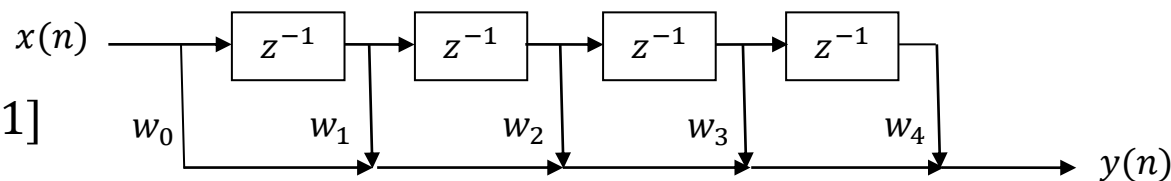
$$a = \frac{\cos\varphi_m}{2r_m}, \quad c = -\frac{1}{2r_m}, \quad b = -\frac{1}{2r_m}, \quad d = \frac{\cos\varphi_m}{2r_m}$$

$$T = \frac{1}{2r_m} \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -1 \\ -1 & \cos\varphi_m \end{bmatrix}$$

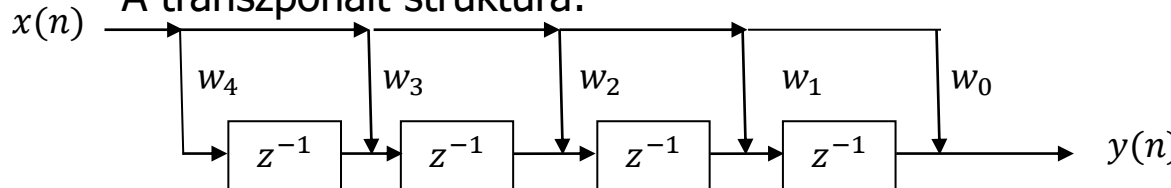
### Egyszerű példa a transzponált struktúra alkalmazására:

Lineáris kombinátorral megvalósított FIR szűrő:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k x(n-k)$$



A transzponált struktúra:



A megvalósításhoz választott struktúra nem mindegy!

**Implementációs gondok:** kvantálás okozta oszcillációk, kerekítések torzító hatása, paraméterérzékenység, stb.

**Probléma:**

Több-bemenetű összegző igénye!

Kétbemenetű összegzőket igényel!



**Vannak jó és kevésbé jó struktúrák/kiszámítási módok! Az ún. ortogonális struktúrák általában:**

Az ortogonális struktúrákat úgy definiáljuk, hogy az  $\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$

Itt  $x(n)$  a rendszer állapotvektorát,  $y(n)$  és  $u(n)$  a skalár kimenet és a skalár bemenet diszkrét időfüggvényét jelöli.

formájú rendszerleírásban, a  $T^T T = I$ , azaz  $T^T = T^{-1}$ , azaz  $T$  ortogonális mátrix.

Képezzük a fenti összefüggés mindkét oldalának önmagával vett skalár-szorzatát!

$$[x^T(n+1) \quad y(n)] \begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = [x^T(n) \quad u(n)] T^T T \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$$

Kifejtve:  $\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) + y^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) + u^2(n).$

Ha feltételezzük, hogy a bemenet nulla, azaz  $u(n) = 0$ , akkor

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) = -y^2(n) \quad \text{alakban írható.}$$

**Eszerint, ha van nem nulla kimenőjel, akkor az állapotváltozók által hordozott belső energiának csökkennie kell!**

Ezt a tulajdonságot kiegészítve az **abszolút-érték csonkítás** stratégiájával garantálható, hogy a paraméterektől egyébként függetlenül a magára hagyott rendszer belső energiáját disszipálni fogja, és így ún. **határciklus oszcillációk** nem alakulnak ki.

Ez a feltétel teljesíthető a rezonátoros struktúra esetére!

$$A = \text{diag}\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \rangle, \quad G' = [z_0 \sqrt{r_0} \quad z_1 \sqrt{r_1} \quad \dots \quad z_{N-1} \sqrt{r_{N-1}}]$$

$$G = AC^T$$

$$\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - GC & G \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$$

$C = [\sqrt{r_0} \quad \sqrt{r_1} \quad \dots \quad \sqrt{r_{N-1}}]$  jelölésekkel, ahol a felső vessző most transzponálást, a „T” pedig a transzponált konjugáltat jelöl:

$$T^T T = I = \begin{bmatrix} (A - GC)^T & C^T \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - GC & G \\ C & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (A - GC)^T (A - GC) + C^T C = I = \underbrace{A^T A}_I - \underbrace{A^T GC}_{C^T C} - \underbrace{C^T G^T A}_{C^T C} + \underbrace{C^T G^T GC}_{C^T C C^T C} + C^T C = I,$$

$$(A - GC)^T G = 0 = A^T G - C^T G^T G = \underbrace{A^T AC^T}_I - \underbrace{C^T CA^T AC^T}_I = C^T - \underbrace{C^T C C^T}_I$$

$$G^T G = I = \underbrace{CA^T AC^T}_I = C C^T$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1$$

A feltétel akkor teljesül, ha: Ennek részletei hamarosan!

$$\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1$$

Most csak annyit, hogy az RDFT esetén:

$$r_m = \frac{1}{N}, \forall m\text{-re.}$$



**Megjegyzés:** Ha az állapotváltozók által hordozott energiát súlyozzuk a  $\mathbf{Q} = \text{diag}\langle r_0^{-1}, r_1^{-1}, \dots, r_{N-1}^{-1} \rangle$  mátrixszal, akkor  $\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) = -y^2(n)$  helyett  $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{r_k} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{r_k} x_k^2(n) = -y^2(n)$  adódik.  $r_m > 0, \forall m$ -re.

Ilyen energiaviszonyokat akkor kapunk, ha:  $\mathbf{A} = \text{diag}\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \rangle$ ,  $\mathbf{C} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ ,  $\mathbf{G}' = [z_0 r_0 \ z_1 r_1 \ \dots \ z_{N-1} r_{N-1}]$ ,  
Ezzel viszont az eredeti formában bevezetett rezonátoros struktúrához jutunk!

## A korlátosság feltétele rezonátor alapú megfigyelőknél:

Kedvezők azok a számítási eljárások, amelyek passzívnak tekinthetők.

Ezek tipikusan - a struktúrájukból adódóan - a paramétereik értékétől függetlenül korlátosak, nem növelik a jelszintet egy bizonyos érték fölé. A rezonátoros struktúra esetében a visszacsatolt rendszer összegzett kimenetére vonatkozó átviteli függvény

$H_P(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{a + jb}{1 + a + jb}$  alakú, ahol  $a = a(\omega)$  és  $b = b(\omega)$   $a^2 + b^2 \leq (1 + a)^2 + b^2$ ,  $0 \leq 1 + 2a$ ,  $a \geq -0.5$   
valós értékek, a hurokerősítés valós és képzetes részei. Annak feltétele, hogy például  $|H_P(z)| \leq 1$  legyen :  $a \geq -0.5$ .

Mivel  $a = \text{Re} \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}$  ill.  $2a = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{g_k z^{-1}}{1 - z_k z^{-1}} + \frac{g_k^* z}{1 - z_k^* z} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{g_k z^{-1} - g_k z_k^{-1} + g_k^* z - g_k^* z_n}{2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z} =$  az  $a \geq -0.5$  feltétel  $z$  értékétől függetlenül teljesül, ha

Ekkor  $\text{Re} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{g_k}{z_k} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} r_k \leq 1$   $= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{-\text{Re} \left[ \frac{g_k}{z_k} \right] (2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z) + j \text{Im} \left[ \frac{g_k}{z_k} \right] (z_k z^{-1} - z_k^{-1} z)}{2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z} \geq -1$ ,  $\text{Im} \left[ \frac{g_k}{z_k} \right] = 0$ ,  
 $k = 0, 1, \dots, N - 1$

**Megjegyzések:** 1. A rekurzív DFT esetén  $r_k = \frac{1}{N} \forall k$ -ra.

2. Az exponenciálisan átlagoló DFT esetén  $r_k = \frac{\alpha}{N} \forall k$ -ra,  $0 < \alpha \leq 1$ .

3. Stabil szűrők esetén mindig létezik olyan rezonátor-pólus készlet, amelyre  $\sum_{k=0}^{N-1} r_k \leq 1$  teljesül.

4. Stabil szűrők esetén az  $r_m$ ,  $m = 0, 1, \dots, N - 1$ , pozitív szám.

5. A tulajdonságot **strukturális passzivitásnak** nevezzük, a paramétereiktől független, egyedül  $\sum_{k=0}^{N-1} r_k \leq 1$  teljesítendő!



A fenti tulajdonságokat megőrző tervezés menete:

(1) A megvalósítandó pólusok ismeretében a rezonátor-pólus pozíciók meghatározása úgy, hogy minden  $r_m$  érték valós legyen. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$H_P(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)}{1 + \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)} = 1 - \frac{\prod_{k=0}^{N-1} (1 - z_k z^{-1})}{D(z)}, \quad \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) = \frac{D(z)}{\prod_{k=0}^{N-1} (1 - z_k z^{-1})} - 1$$

ahol  $D(z)$  a megvalósítandó nevező polinom, továbbá

$$2a = \left[ \frac{D(z)}{\prod_{k=0}^{N-1} (1 - z_k z^{-1})} + \frac{D^*(z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N-1} (1 - z_k^{-1} z)} - 2 \right] \geq -1, \text{ ahol } a = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} \geq -0.5$$

amiből – mivel a rezonátor pólus pozícióknak megfelelő frekvenciákon az egyenlőség érvényesül – a rezonátor pólus pozíciók meghatározhatók:

$$\prod_{k=0}^{N-1} (1 - z_k z^{-1}) = \left[ 1 \pm \frac{z^{-(N-M)} D^+(z)}{D(z)} \right] D(z).$$

$$\pm: \prod_{k=0}^{N-1} z_k = \pm 1$$

Két készlet van!

Itt  $D^+(z)$  egy olyan  $M$ -edfokú ( $M \leq N$ ) polinom, amelynek gyökei a  $D(z)$  polinom gyökeinek egységsugarú körre vonatkozó tükörképei, azaz  $D^+(z)/D(z)$  egy mindentáteresztő típusú hálózatfüggvény.

(2) Az  $r_m$  értékek kiszámítása:

$$r_m = \frac{\prod_{k=0}^{M-1} (1 - p_k z_m^{-1})}{\prod_{k=0, k \neq m}^{N-1} (1 - z_k z_m^{-1})}$$

A  $H_P(z)$  átviteli függvény megvalósításához annak szabad paramétereivel azonos számú paramétert állítunk be: a konjugált komplex átviteli függvény pólusok  $\{p_k\}$  összesen  $M$  független adatot, továbbá a rezonátor pólus pozíciók  $\{z_k\}$  és az  $\{r_m\}$  értékek összesen  $N$  független adatot rögzítenek.

**Példa:**

$$H(z) = z^{-1} \frac{1 - a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}, \quad H_0(z) = r_0 \frac{z_0 z^{-1}}{1 - z_0 z^{-1}}, \quad H_1(z) = r_1 \frac{z_1 z^{-1}}{1 - z_1 z^{-1}}$$

$N = 2, M = 1 \quad D(z) = 1 - b_1 z^{-1}, \quad D^+(z) = -b_1 + z^{-1},$

$$\prod_{k=0}^1 (1 - z_k z^{-1}) = \left[ 1 \pm \frac{z^{-1}(-b_1 + z^{-1})}{1 - b_1 z^{-1}} \right] (1 - b_1 z^{-1})$$

Két eset:

$$\frac{z^{-1}(-b_1 + z^{-1})}{1 - b_1 z^{-1}} = -1 \rightarrow z^2 - 2b_1 z + 1 = 0, \quad z_{0,1} = b_1 \pm j \sqrt{1 - b_1^2}$$

$$r_0 = r_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{z^{-1}(-b_1 + z^{-1})}{1 - b_1 z^{-1}} = 1 \rightarrow z^2 = 1, \quad z_{0,1} = \pm 1$$

$$r_0 = \frac{1 - b_1}{2}, \quad r_1 = \frac{1 + b_1}{2}$$



A tervezés eredménye:

1. eset:  $z_{0,1} = b_1 \pm j\sqrt{1 - b_1^2} = \cos\varphi_0 \pm j\sin\varphi_0$

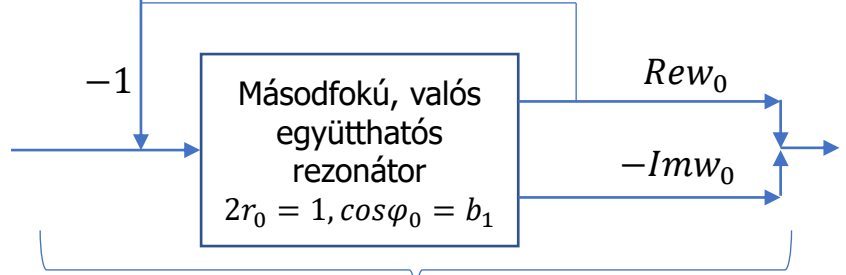
$z_0 z_1 = 1$

$r_0 = r_1 = \frac{1}{2}$

$r_0 + r_1 = 1$

$H(z) = w_0 T_0(z) + w_1 T_1(z)$

$w_0 = H(z_0) = a_1 + j\frac{a_1 b_1 - 1}{\sin\varphi_0}$        $w_1 = H(z_1) = w_0^*$



$H(z) = z^{-1} \frac{1 - a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$

**Köszönöm a figyelmet!**

$H(z) = z^{-1} \frac{1 - a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$

Ha nincs egységnyi késleltetés, azaz:

$H(z) = \frac{1 - a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$

Ekkor csak a második részt tervezzük:

$N = 1, M = 1 \quad D(z) = 1 - b_1 z^{-1}, \quad D^+(z) = -b_1 + z^{-1}$

Akkor ezt fel kell bontanunk az alábbi módon:

$H(z) = 1 + \frac{(b_1 - a_1)z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$

$(1 - z_0 z^{-1}) = \left[ 1 \pm \frac{-b_1 + z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}} \right] (1 - b_1 z^{-1})$

Két eset:

$z_0 = -1, \quad r_0 = 1 + b_1, \quad w_0 = -\frac{b_1 - a_1}{1 + b_1}$

$z_0 = 1, \quad r_0 = 1 - b_1, \quad w_0 = \frac{b_1 - a_1}{1 - b_1}$

Melyiket használjuk?

Ha  $b_1 < 0$ , akkor az elsőt:  $r_0 < 1$

felüláteresztő jellegű hatás

Ha  $b_1 > 0$ , akkor a másodikat:  $r_0 < 1$

aluláteresztő jellegű hatás

2. eset:

$z_{0,1} = \pm 1$

$z_0 z_1 = -1$

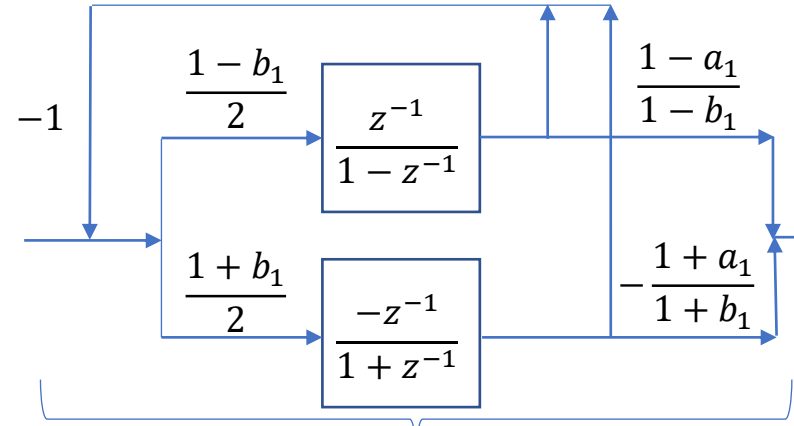
$r_0 = \frac{1 - b_1}{2}$

$r_1 = \frac{1 + b_1}{2}$

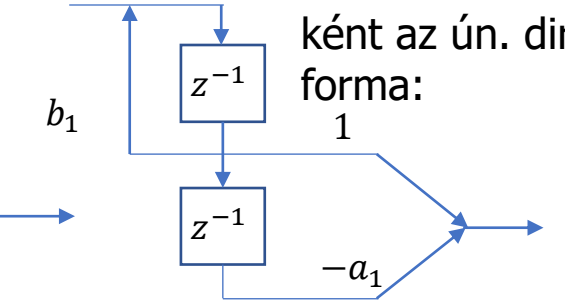
$r_0 + r_1 = 1$

$H(z) = w_0 T_0(z) + w_1 T_1(z)$

$w_0 = H(z_0) = \frac{1 - a_1}{1 - b_1}$        $w_1 = H(z_1) = -\frac{1 + a_1}{1 + b_1}$



Összehasonlításként az ún. direkt forma:



A 2. eset:

