Játékelméleti módszerek

LÓJA KRISZTINA ~~DOK~~TORANDUSZ

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Távközlési és Telematikai Tanszék
loja@math.bme.hu

Reviewed

A kialakuló távközlési verseny modellezésének egyik lehetséges eszköze a játékelmélet. A cikk célja, hogy áttekintést nyújtson az alapvető játékelméleti módszerekhez, néhány egyszerű távközlési példán is szemléltetve azok működését.

A távközlés liberalizálódásával oligopol piac alakul ki mind a vezetékes, mind a mobil távközlésben. Míg monopólium esetén a beruházónak egy jól definiált függvényt kell maximalizálnia, oligopol helyzetben a többi résztvevő döntéseit is figyelembe kell venni. Ennek a problémának a modellezésére nyújt alkalmas eszköztárat a nem-kooperatív játékelmélet. Nem-kooperatívnak azokat a játékokat tekintjük, melyben a résztvevők nem tudnak betartatható megállapodásokat kötni.

Először a játékelmélet központi fogalma, a Nash-egyensúly kerül bevezetésre, az első rész a tiszta Nash-egyensúlyokkal kapcsolatban felmerülő problémákra világít rá. Ezután kevert stratégiák bevezetésével definiáljuk a kevert Nash-egyensúlyt.

A harmadik szakaszban a statikus játékokra alkalmazható, Nash-egyensúlyt adó módszert, a dominált stratégiák eliminációját ismertetjük, a negyedikben dinamikus játékokra mutatunk olyan módszert, amely a Nash-egyensúly egy finomításához vezet. Ezután egy példát említünk kaotikus jelenségek megjelenésére, végül a nem teljes információs játékokra alkalmazható Harsányi-transzformációt ismertetjük.

1. Nash-egyensúly

Legyen $n \geq 2$ természetes szám a játékosok száma és legyen A_k a k-adik játékos stratégiáinak halmaza. A stratégia egy- vagy többlépéses döntés, amely a játék során előforduló összes lehetséges szituációban meghatározza a játékos viselkedését. A játékosok egymástól függetlenül döntenek, a k-adik játékos az $a_k \in A_k$ stratégiát választja, és ezzel haszna $\pi_k(a_1, ..., a_k, ..., a_n)$ valós szám. A játékosok egy stratégia-együttese Nash-egyensúlyt alkot, ha egyiküknek sem érdemes egyoldalúan eltérni az egyensúlyi stratégia-együttesben szereplő saját stratégiájától. Legyen $a_{-k}=(a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_n)$ az $a=(a_1, ..., a_k, ..., a_n)$ vektor k-adik elemének elhagyásával keletkező vektor. Ekkor az $(a_1^*, ..., a_n^*)$ stratégia-együttes (gyenge) Nash-egyensúlyt alkot, ha $\pi_k(a_k^*, a_{-k}^*) \geq \pi_k(a_k, a_{-k})$ minden $a_k \in A_k$ stratégiára (k=1, 2, ..., n). Szigorú egyenlőtlenségek esetén a stratégia-együttes erős Nash-egyensúlyt képez.

Az $a_k^* \in A_k$ stratégia a k-adik játékos legjobb válasza a többi játékos valamilyen $a_{-k} \in A_{-k}$ stratégia-együttesére, ha $a_{-k} \in A_{-k}$ esetén a_k^* maximalizálja a k-adik játékos hasznát. A Nash-egyensúly tehát azt jelenti, hogy minden játékos (nem feltétlenül egyértelmű) legjobb választ ad a többiek egyensúlyi stratégiájára.

Példaként tekintsünk egy duopol piacot, melyben a két vállalat döntést hoz a hálózat méretére vonatkozóan [1]. Tegyük fel, hogy az első vállalat három, a második négy lehetőség közül választhat, a növekvő sorszámú lehetséges stratégiákhoz mind nagyobb hálózatméret tartozik, és kifizetéseik az *1. táblázatban,* a kifizetési mátrixban feltüntetett értékek (az egyes cellákban az első szám az első vállalat haszna, a második a másiké).

		2. vállalat			
		1.	2.	3.	4.
1. vállalat	1.	2, 6	1, 7	1, 6	0, 5
	2.	3, 5	**2, 6**	1, 5	0, 4
	3.	3, 4	1, 5	1, 4	-1, 2

1. táblázat Példa Nash-egyensúlyra

Ha mindkét cég a második lehetőséget választja, akkor alakul ki a Nash-egyensúly, az első cég haszna 2, a másodiké 6, és ezt egyikük sem tudja egyoldalú változtatással növelni. (A Nash-egyensúlyhoz tartozó hasznokat itt és a későbbiekben is vastagított számok jelzik a mátrixban.)

Nash-egyensúly az oligopol piacok Cournot-egyensúlya és Bertrand-egyensúlya is, az ár, illetve a termelt mennyiség meghatározása oly módon, hogy attól egyik cégnek sem éri meg eltérnie.

A Nash-egyensúllyal kapcsolatban több probléma is felmerül. Van olyan játék, aminek egyáltalán nem létezik (tiszta)[1] Nash-egyensúlya. Erre példa a kő-papír-olló játék *(2. táblázat).* A két játékos egyszerre választ követ, papírt vagy ollót, az azonos választás döntetlent eredményez mindkét játékosnak 0 haszonnal, különböző választás esetén az olló a papírral, a kő az ollóval, a papír a kővel szemben nyer, a nyertes haszna 1, a vesztesé -1. Könnyen látható, hogy a két játékos nem tud olyan együttes döntést hozni, amitől valamelyiküknek ne érné meg eltérni, tehát ennek a játéknak nincs (tiszta) Nash-egyensúlya.

[1] *A tiszta stratégiák fogalmát a 2. pontban tisztázzuk.*

2. táblázat Kő-papír-olló		2. játékos		
		Kő	Papír	Olló
1. játékos	Kő	0, 0	-1, 1	1, -1
	Papír	1, -1	0, 0	-1, 1
	Olló	-1, 1	1, -1	0, 0

3. táblázat Nemek harca		Feleség	
		Meccs	Balett
Férj	Meccs	**4, 3**	2, 2
	Balett	1, 1	**3, 4**

4. táblázat Fogolydilemma		2. fogoly	
		Tagad	Vall
1. fogoly	Tagad	-1, -1	-10, 0
	Vall	0, -10	**-8, -8**

5. táblázat Fogolydilemma- változat		2. játékos	
		Önzetlen	Önző
1. játékos	Önzetlen	3, 3	0, 4
	Önző	4, 0	**1, 1**

Olyan játékra is adható egyszerű példa, ahol ugyan létezik Nash-egyensúly, de az nem egyértelmű. Ilyen a nemek harca játék. Két játékos van, a férj bokszmeccsre szeretne menni, a feleség balettra. Mindkettejüknek fontosabb, hogy együtt legyenek, mint hogy egyéni preferenciájukat érvényesítsék, de nincs lehetőségük egyeztetni. A kifizetési mátrix a *3. táblázatból* olvasható ki. Látható, hogy az is Nash-egyensúly, ha mindketten bokszmeccsre, és az is, ha mindketten balettra mennek.

Természetesen életszerűbb példák is adhatóak hasonló kifizetési mátrixszal. Például ilyenek a szabványosítási kérdések. A gyártó cégeknek fontosabb termékeik kompatibilitása, mint egyéni érdekeik. Nash-egyensúlyt ebben az esetben azok a döntés-együttesek képeznek, melyben valamely céghez alkalmazkodik a többi, így minden cég annak gyártmányával kompatibilis terméket állít elő.

A valódi probléma nem is az, ha több egyensúly van, hanem az, ha nem tudunk közülük választani. Adható példa számtalan Nash-egyensúllyal rendelkező játékra, ahol a játékosok számára valamelyik egyensúlyi döntés-együttes mégis kiválasztható valamilyen elv alapján.

Ilyen a Kreps [2] által javasolt játék, melyben két résztvevő kap egy városokat tartalmazó listát, amelyből mindkettejüknek ki kell választaniuk egy részhalmazt egy-egy előre megadott elemmel. Ha a két lista pontosan partíciónálja az eredetit, akkor mindketten kapnak egy pénzösszeget, egyébként semmit. Ebben a játékban minden partíció Nash-egyensúly, ezek játékelméleti szempontból teljesen egyenértékűek, de a két játékos mégis ki tud egyet választani előzetes megbeszélés nélkül, például politikai vagy földrajzi szempontok alapján.

Azokat az egyensúlyokat, melyeket a több létező Nash-egyensúlyból, játékelméleten kívüli megfontolások segítségével tudnak a játékosok előzetes egyeztetés nélkül kiválasztani, fókuszpontnak nevezzük.

Ha létezik Nash-egyensúly, és az egyértelmű is, akkor sem biztos, hogy az optimális. A legismertebb ilyen példa a fogolydilemma *(4. táblázat)*.

A történet a következő: két gyanúsítottat egy bűncselekmény közös elkövetésének vádjával letartóztat a rendőrség, de nincs ellenük elég bizonyíték. Külön cellába zárják őket, és a következő lehetőségeket ajánlják fel nekik: Ha mindketten tagadnak, csak egy-egy évet kapnak, ha mindketten beismerő vallomást tesznek, akkor nyolc-nyolc évet. Ha azonban az egyikük vall, a másik tagad, akkor az előbbi szabadlábra kerül, a másik tíz évet kap.

Látható, hogy ez esetben egyértelmű Nash-egyensúly létezik, csakhogy az nem optimális.[2] Az egyensúly az, ha mindketten vallanak, így mindkét fogolynak nyolc évet kell leülnie, holott egy-egy évvel is megúszhatták volna.

A probléma leírásának egy másik lehetséges módja a következő *(5. táblázat)*. Mindkét játékos arról dönthet, hogy ő kapjon 100 dollárt, vagy a másik 300 dollárt. Ha mindkét játékos önzetlenül viselkedik, mindkettejük haszna 300 dollár. Azonban a Nash-egyensúly szerint mindkettejük haszna 100 dollár. A játék teljesen ekvivalens a 4. táblázatban leírt játékkal.

A fogolydilemmához hasonló szerkezetű problémával találkozunk, ha két cég a reklámozás mértékéről dönt egy duopol helyzetben. Tegyük fel, hogy mindkét cégnek két választása van, vagy sokat költenek reklámra, vagy keveset. Ha az egyik sokat reklámoz, a másik keveset, akkor a piac nagyobb részét az ismertebb vállalat nyeri majd el. Legjobban úgy járnak, ha mindketten visszafogják a reklámra fordított kiadásaikat. Mégis az a Nash-egyensúly, és a gyakorlatban is az történik, hogy mindketten sokat költenek erre a célra, bár ez nem térül meg nekik.

A fogolydilemma játékban tehát egy olyan Nash-egyensúly adódik, ami nem optimális, de érdemes a játékosoknak azt választani, mert a másik bármely döntésére legjobb választ ad.

Olyan játék is konstruálható, ahol az egyértelmű Nash-egyensúlyt valószínűleg egyetlen játékos sem választja. Ilyen a következő, Kreps [2] által felvetett szituáció. Két játékos van, mindkettőnek az X és az Y betűk közül kell egymástól függetlenül választania. Ha mindketten Y-t választják, mindketten 1 dollárt kapnak, ha egyikük X-et, a másik Y-t, egyikük sem kap semmit, ha mindketten az X-et választották, akkor a játék második szintjére lépve mindkettőnek függetlenül és egyidejűleg egy-egy pozitív egész számot kell megneveznie. Amelyikük a nagyobb számot mondja, 250 dollárt kap, a másik 100-at. Ebben az esetben az egyetlen Nash-egyensúly az (Y, Y) döntés-együt-

[2] *A Nash-egyensúly ebben az esetben Pareto-értelemben nem optimális, azaz van olyan stratégiapár, mellyel mindkét játékos haszna nagyobb.*
A szerk. megj.: *Minden esetben, ahol a Nash-egyensúly és a Pareto-optimum nem esik egybe, érdemes megvizsgálni a problémafelvetés jogosságát vagy realitását. Ez látszik a reklám esetében is, ahol figyelembe kell venni, hogy a bevétel nincs lineáris kapcsolatban a reklámmal.*

tes, amit feltehetően□ nem fognak választani a játékosok, hiszen az (X, X) választás mindkettejüknek legalább 100 dollár hasznot hoz.

A kevés hasznot adó (Y, Y) azért áll elő egyértelmű Nash-egyensúlyként, mert az (X, X) választást követő játéknak nincs Nash-egyensúlya. Ha az (X, X) döntés-együtteshez (100, 100) kifizetés tartozna további döntés nélkül, akkor (X, X) lenne a játék másik (Pareto-optimális) Nash-egyensúlya.

2. Kevert Nash-egyensúly

Az eddigi példákban a játékosok kiválasztottak egy stratégiát, amit 1 valószínűséggel követtek. Ezt hívjuk tiszta stratégiának. Neumann János vezette be a kevert stratégiákat, ahol az egyes lehetőségek közötti választás a véletlenen alapszik. Legyen P_i egy valószínűségeloszlás az *i.* játékos stratégiahalmazán. Legyen $p_i(a_j) \geq 0$ valós szám az a_j stratégia választásának valószínűsége. Az egyszerűség kedvéért legyen csak két játékos. Ekkor az *i.* játékos nyereményének várható értéke a P_1 és P_2 valószínűségeloszlásoktól függ.

$$\pi_i(P_1, P_2) = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} p_1(a_1) p_2(a_2) \pi_i(a_1, a_2)$$

Az *i.* játékos (i=1, 2) Neumann-Morgenstern-féle hasznosságfüggvénye a következő:

A Nash-egyensúly természetes módon kiterjeszthető kevert stratégiákra is. A korábban ismertetett kő-papír-olló játéknak például (aminek tiszta Nash-egyensúlya nincs) egyértelmű kevert Nash-egyensúlya van: a p_i(kő)= p_i(papír)=p_i(olló)=□, (*i*=1, 2), azaz mindkét játékos □ valószínűséggel választja mindhárom lehetséges döntését.

Ahogy a következő tétel mutatja, Nash-egyensúly meglehetősen általános feltételek mellett létezik. Nash tétele szerint minden *n*-személyes játéknak létezik legalább egy tiszta Nash-egyensúlya, ha az A_k stratégiahalmaz nem-üres, konvex és kompakt halmaza egy véges-dimenziós euklideszi térnek minden *k*-ra, és a *k*-adik játékos $\pi_k(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$ haszna folytonos minden változójában és kvázikonkáv[3] a_k-ban (*k*=1, 2, ..., *n*).

Nash kevert stratégiákra vonatkozó tétele szerint, ha az eredeti (tiszta) stratégia-halmazok végesek, akkor a kevert stratégiák alkalmazásával létre jövő bővített stratégiahalmazokon definiált játéknak van legalább egy kevert Nash-egyensúlya.

3. Domináált stratégiák eliminációja

Domináált stratégiák iterált eliminációja

Legyen $a_1^* \in A_1$ és $a_1 \in A_1$. Azt mondjuk, hogy a_1^* gyengén dominálja a_1-et, ha minden $a_2 \in A_2$ stratégia esetén az 1. játékos haszna a_1^*-ot alkalmazva legalább akkora, mint ha a_1-et választaná, azaz $\pi_1(a_1^*, a_2) \geq \pi_1(a_1, a_2)$ minden $a_2 \in A_2$ esetben, és létezik olyan $a_2' \in A_2$, melyre $\pi_1(a_1^*, a_2') > \pi_1(a_1, a_2')$. Az a_1^* erősen dominálja a_1-et, ha $\pi_1(a_1^*, a_2) > \pi_1(a_1, a_2)$ minden $a_2 \in A_2$ esetben. Például a fogolydilemma esetében a tagadást erősen dominálja a vallomástétel; ha a másik vall, az első fogoly tagadással 10, míg vallomástétellel csak 8 évet kap, ha a másik tagad, tagadással 1 évet kell leülnie az első fogolynak, míg vallomástétellel egyet sem.

A játékelméletben általános feltevés, hogy a szereplők racionálisak, így feltesszük, hogy olyan stratégiát, amely minden esetben rosszabb, mint valamely másik, nem választanak, tehát a dominált stratégiákat elhagyhatjuk a vizsgált játékból. Az így kapott játékból szintén elhagyhatjuk a dominált stratégiákat. Ezt az eljárást folytatva előfordulhat, hogy egyetlen döntés-együttesünk marad. Ekkor az biztosan Nash-egyensúly.

		2. játékos		
		x	y	z
1. játékos	u	6, 3	1, 5	0, 6
	v	1, 7	**2, 8**	2, 6

6. táblázat Iterált elimináció

Példaként tekintsük a *6. táblázatban* ábrázolt játékot. Mivel y dominálja x-et, feltehetjük, hogy a 2. játékos nem fogja választani x-et. Ha az x stratégiát kizárjuk, a megmaradt lehetőségeket tekintve v dominálja az u stratégiát. Ha u-t is kizárjuk, y dominálja z-t. Tehát a (v, y) stratégia-együttes marad, ami a játék egyetlen Nash-egyensúlya.

Ez a módszer azonban nem mindig alkalmazható. Vannak játékok, amelyekben az eljárás leszűkíti ugyan a vizsgálandó játékot, de nem vezet egyetlen döntés-együtteshez, és olyan példa is könnyen adható, melyben egyik stratégia sem dominálja a másikat. Ilyen a nemek harca is. Ott két tiszta (és egy kevert) Nash-egyensúly van, és az ezek közötti választást ez a módszer sem könnyíti meg.

		2. játékos	
		u	v
1. játékos	x	**1, 1**	0, 0
	y	0, 0	**10, 10**

7. táblázat

A *7. táblázatban* vázolt játék esetében, bár szintén két Nash-egyensúly van, az ezek közötti választást segíti a két egyensúlyhoz tartozó hasznosságok közt lévő jelentős különbség. Ez alapján a játékosok az (y, v) döntés-együttest választják, de a dominált stratégiák iterált eliminációja nem vezet erre a megoldásra, ugyanis ennek a játéknak nincs dominált stratégiája, y nem dominálja x-et és v sem u-t.

Ha csak az erősen dominált stratégiákat hagyjuk el, akkor, ha létezik egyensúly, az egyértelmű. Nem ez a helyzet a gyengén domináns stratégiák iterált eliminációjával. Erre ad példát Rasmusen [3] a következő játékkal *(8. táblázat)*.

[3] *Egy $f: R^n \rightarrow R$ függvényt kvázikonkávnak hívunk, ha egy x□R^n konvex halmazon van értelmezve és minden $\{x \in X: f(x) > t\}$ felső szinthalmaza konvex*

		2. játékos		
		o_1	o_2	o_3
1. játékos	s_1	**2, 12**	1, 10	**1, 12**
	s_2	0, 12	0, 10	0, 11
	s_3	0, 12	0, 10	0, 13

8. táblázat

Ebben a példában különböző sorrendben eliminálva a gyengén dominált stratégiákat más eredményt kapunk. Ha az eliminált stratégiák sorrendje s_3, o_3, o_2, s_2, akkor az (s_1, o_1) stratégia-együttest kapjuk eredményül, ha azonban a sorrend o_2, s_2, o_1, s_3, akkor az (s_1, o_3) stratégiapárt.

Dominált stratégiák egy-lépéses eliminációja

Gyengén domináns egyensúlynak hívjuk azt a stratégiakombinációt, melyet úgy nyerünk, hogy töröljük a játékból az egyes játékosok összes gyengén dominált stratégiáját.

Mivel ez esetben az elimináció egy lépésben történik, (így nincsenek olyan stratégiák, melyeket azért tudunk eliminálni, mert valamely másik stratégiát már töröltük), ezzel az eljárással végül legalább annyi stratégia megmarad, mint az iterált esetben, például az előző játékban a két Nash-egyensúlyhoz tartozó stratégiák.

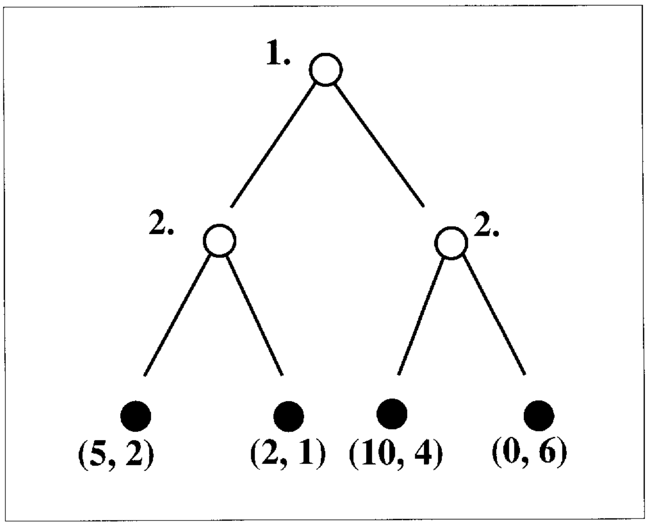
4. Dinamikus játékok

Az eddigi példákban a játékok mátrixos alakját, a normálformát használtuk. Ez elterjedt ábrázolási módja az olyan játékoknak, melyben a játékosok egyidejűleg döntenek. A másik lehetőség a játék fa struktúrájú ábrázolása, az extenzív forma, amit főleg szekvenciális (dinamikus) játékokra alkalmaznak, tehát olyankor, mikor a játékosok bizonyos sorrendben döntenek a többiek addigi lépéseinek ismeretében.[4]

A következő példában két játékos van, mindkettő két lehetőség közül választhat, vagy jobbra, vagy balra lép. Először az első játékos lép, majd döntésének ismeretében a második. Az ábrán az üres körök jelzik az egyes döntési pontokat, a fekete körökkel jelölt végpontok alatt láthatóak a kifizetések.

A hátráló indukció[5] alkalmazása során először az utoljára döntést hozó játékost tekintjük, és feltesszük, hogy minden döntési pontban a játék azon kimenetelét választja, amely nagyobb haszonnal jár a számára. Az utolsó előttiként döntést hozó játékos már csak ezeket a kimeneteleket veszi figyelembe és így dönt. Ily módon a játék végéről visszafelé haladva kirajzolódik a játék menete, ami egy Nash-egyensúlyt eredményez.

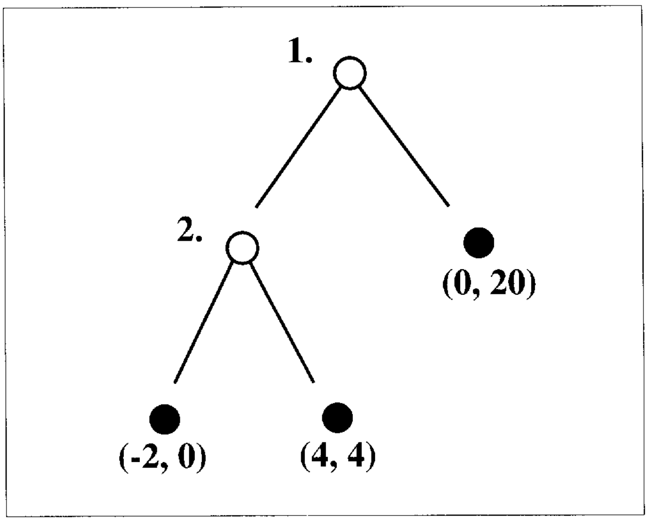
Az *1. ábrán* látható példában, ha az első játékos jobbra lép, akkor a másik nyeresége jobbra lépve 6, balra 4, ezért feltesszük, hogy ebben a döntési pontban jobbra lép. Ha az első játékos balra lép, akkor a másik nyeresége 2, ha balra lép és 1, ha jobbra. Feltesszük ezért, hogy balra lép. Mindezt végiggondolva az első játékos balra fog lépni és ezután szintén balra lép a második, így nyereségük (5, 2). Így eljutottunk a játék egyetlen Nash-egyensúlyához, ami ugyan nem Pareto-optimális, mert a (jobb, bal) stratégiapár a (10, 4) kifizetést eredményezné, tehát mindkét játékos haszna duplája lenne, de ez a megoldás nem stabil, mivel a második játékosnak megéri eltérni így 6-ra növelve a hasznát.



1. ábra

Ezzel az eljárással általában hatékonyan megoldható egy szekvenciális játék. Természetesen ennek a módszernek is vannak korlátai. Egy játék fája lehet például végtelen, amikor ezt az eljárást el sem tudjuk kezdeni.

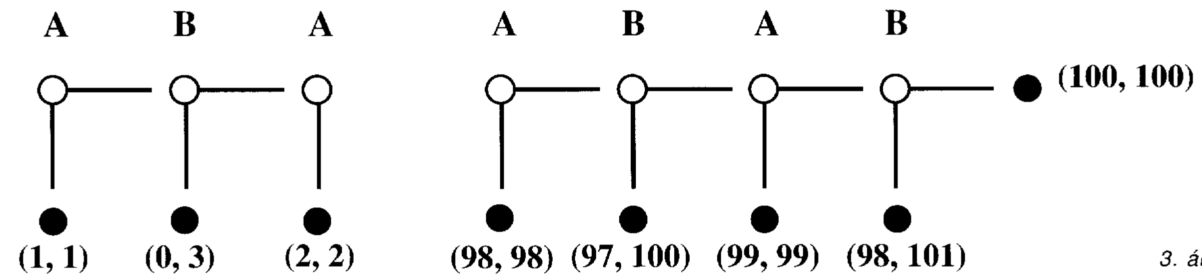
Olyan játék is van, ahol elvileg ugyan alkalmazható a hátráló indukció, de gyakorlatilag megvalósíthatatlanul bonyolult. Ilyen például a sakk, aminek a fája véges, mégsem tudjuk az optimális stratégiát ezzel az eljárással meghatározni.



2. ábra

[4] *Az eddig ismertetett statikus játékok szintén ábrázolhatóak extenzív formában, de akkor a játékosok nem mindig tudják, hogy a fa mely pontjában vannak döntéseik meghozatalakor, ezért szükség van az ún. információs halmaz bevezetésére. Valamely játékos információs halmaza a játék adott pontján azon döntési pontok halmaza, melyek közül a játékos nem tudja meghatározni, hogy melyik az aktuális döntési pont.*

[5] *Egyes irodalmakban erre a módszerre Kuhn-algoritmus néven hivatkoznak.*



3. ábra

A módszer előnye, hogy kizárja a hiteltelen fenyegetéseket. Tekintsük a következő példát *(2. ábra)*: egy duopol piacon két játékos van, az inkumbens és egy potenciális új belépő. Ez utóbbi legyen az 1. játékos, ő lép először, két választása van, vagy belép a piacra, vagy nem. Ha nem lép be, a játéknak vége, a haszna 0, a monopolistáé 20. Ha belép, e döntés ismeretében a 2. játékosnak, a monopolistának két választása van. Ha a monopolárat a duopol piacnak megfelelően lecsökkenti, mindkét cég nyeresége 4 lesz.

A monopolista másik lehetősége, amit a belépő elrettentéseként kilátásba helyez, hogy irracionálisan alacsony árat vezet be, úgy hogy haszna 0-ra csökken és a másik cég tönkremegy, haszna -2. Az 1. játékosnak tehát számolnia kell a csőd veszélyével. Az inkumbens vállalat fenyegetése azonban hiteltelen, ha a belépés már megtörtént, saját hasznát maximalizálja, és nem vezet be a duopolárnál alacsonyabb árat. Ennek figyelembevételével az új cég a hátráló indukciót alkalmazva belép a piacra.

A Nash-egyensúly finomításaként szekvenciális játékokra alkalmazható egyensúly-koncepció a Selten nevéhez fűződő aljáték-tökéletes egyensúly, ami kizárja a hiteltelen fenyegetést. Egy játék aljátéka a már megkezdett játék azon megmaradó része, amely egy olyan döntési pontban kezdődik, aminek a döntési fában elfoglalt helye minden játékos számára ismert, és tartalmazza ezen a döntési ponton kívül az ezt követő döntési pontokat és a megfelelő kifizetéseket.

Az aljáték tehát egy minden játékos által ismert, végpontokig terjedő részfa. Egy stratégia-együttes aljáték-tökéletes (Nash-) egyensúly, ha Nash-egyensúlya az egész játéknak, és megfelelő döntései bármely aljáték Nash-egyensúlyát adják. A hátráló indukció adja a konstruktív bizonyítást az aljáték-tökéletes egyensúly létezésére.

A duopol piacok Stackelberg-egyensúlya is aljáték-tökéletes egyensúly. Ebben az esetben két cég egymást követően határozza meg a termelt mennyiséget úgy, hogy mindkettő döntése legjobb válasz a másikéra.

Konstruálható olyan játék, amely esetében a hátráló indukció által előrejelzett megoldás ugyancsak megkérdőjelezhető. Rosenthal nevéhez fűződik a következő, *3. ábrán* ábrázolt játék, a százlábújáték.

A játék fája véges és mindkét játékos (A és B) által ismert, tehát alkalmazható a hátráló indukció. Az utolsó pontban (ha a játék addig eljut) a B játékos lefele fog lépni, mert ennek nyeresége számára 101, míg jobbra lépve 100 lenne. Emiatt az A játékos az utolsó előtti pontban szintén lefele fog lépni, mert így haszna 99, ha pedig jobbra lépne, akkor mivel B lefele lépne, csak 98 lenne a nyeresége.

A hátráló indukciót folytatva azt kapjuk, hogy az A játékos a játék első döntési pontjában lefele lép, ezzel a játéknak vége, A és B nyeresége egyaránt 1. Kreps [2] kísérletekkel igazolja, hogy a százlábújátékot játszva a kezdőjátékosok nagyon ritkán teszik meg ezt a lépést.

A hátráló indukció alkalmazható többmenetes játékokra is. Tegyük fel, hogy két játékos véges sokszor, például százszor egymás után játssza egymással a fogolydilemma játékot. Az utolsó menetben mindkét játékos vallani fog saját hasznának maximalizálásaként. Emiatt az utolsó előtti menetben sem fog egyikük sem tagadni (kooperálni). A hátráló indukció szerint az első menettől kezdve mindkét játékos mindig vallomást tesz, bár kísérletek szerint ebben a helyzetben általában kialakul a kooperáció.

5. Kaotikus jelenségek

Egész egyszerű játékok vizsgálata során is előfordulhat, hogy kaotikus jelenségekkel találkozunk. Erre mutat példát Sato, Akiyama és Farmer [4].

Tekintsük a már ismertetett kő-papír-olló játéknak egy általánosított változatát *(9. táblázat)*. Ez az eredetitől csak annyiban tér el, hogy döntetlen esetén az első játékos haszna ε_x, a másiké ε_y, ahol $-1<\varepsilon_x<1$ és $-1<\varepsilon_y<1$. Tegyük fel, hogy két játékos ezt játssza ismételten, több meneten keresztül.

		2. játékos		
		Kő	Papír	Olló
1. játékos	Kő	$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	-1, 1	1, -1
	Papír	1, -1	$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	-1, 1
	Olló	-1, 1	1, -1	$\varepsilon_x, \varepsilon_y$

9. táblázat Általánosított kő-papír-olló játék

Tegyük fel, hogy nem a hasznukat maximalizáló optimális stratégiát játsszák, azaz nem racionálisak, hanem korlátosan racionálisak, stratégiájukat a játék során alakítják ki. Kevert stratégiájukban az egyes valószínűségeket minden menet végén módosítják aszerint, hogy az egyes döntések győzelmet eredményeztek-e. Ekkor a játékosok döntéseinek sorozata kaotikus dinamikát követ.

6. Harsányi-féle transzformáció nem teljes információs játékokra

Az eddigi játékok során a játékosok pontosan ismerték a játék teljes szerkezetét, a másik lehetőségeit és a kifizetéseket. Az ilyen játékokat nevezzük teljes információjú játékoknak. Egy játékot tökéletes (perfekt) információs játéknak hívunk, ha abban minden játékos ismeri a többi játékos addig meghozott döntését. Nem tökéletes információjú játékok például a fentebb normálformában ábrázolt játékok, az egyidejűleg hozott döntések miatt. A két fogalom között lényeges különbség van.

A játékelmélet, ahogy azt Neumann és Morgenstern 1944-ben megalkotta, és minden játékelméleti munka a 60-as évek végéig a teljes információs játékok vizsgálatára szorítkozott. 1964 és 1970 közt az USA Fegyverzetellenőrzési és leszerelési hivatala játékelméleti szakembereket alkalmazott, köztük Harsányi Jánost. ő tudta először hatékonyan kezelni a nem teljes információs játékokat.

Ebben a helyzetben a két játékos az amerikai és a szovjet fél. Mindkettő csak a saját helyzetét és lehetőségeit ismeri, nincs egészen tisztában a másik fél politikai céljaival, katonai erejével, békés vagy harcias szándékával és egyéb paramétereivel. Így nem ismerik egymás kifizetéseit, de még a másik stratégiahalmazát sem.

Harsányi ötlete az volt, hogy ezeknek megfelelően felteszi, hogy mindkét játékosnak többféle típusa létezhet, és mindkettő csak a saját konkrét típusát ismeri. Mindkét játékos lehetséges típusaihoz egy-egy valószínűség-eloszlás rendelhető, ez alapján a véletlen választ a lehetséges típusokból a játék elején, de ez a lépés a játékos számára nem megfigyelhető. Ily módon a játék kezelhetővé válik, a másik fél különböző típusaival már lejátszatható a játék, a kifizetéseket a megfelelő valószínűségek szerint összegezhetjük. A nem teljes információs játék ezután csaknem tökéletes információs lesz, ez a Harsányi-transzformáció.

Ez a módszer természetesen nem csak katonai és politikai kérdésekben alkalmazható, de gazdasági versenyben is. A cégek általában csak a saját helyzetüket, lehetőségeiket ismerik pontosan, a másikét nem, de valamilyen valószínűségeket tudnak rendelni a másik cég lehetséges típusaihoz. Harsányi módszere tehát alkalmazható a kibontakozódó távközlési versenyre is.

Összefoglalás

A bemutatott néhány legfontosabb játékelméleti módszer (korlátai ellenére) jól példázza azt, hogy a távközlési versenyben az oligopol piacon felmerülő problémák alkalmas egyszerűsítés után jól modellezhetőek, vizsgálhatóak és megoldhatóak a nem-kooperatív játékelmélet különböző eszközeivel.

Irodalom

[1] R. Konkoly, I. Fekete, A. Gyürke: Evaluation of uncertainties in investment projects, Third European Workshop on Techno-economics for Multimedia Networks and Services, Aveiro, Portugal, 1999.

[2] D. Kreps: Game theory and economic modelling Oxford University Press, 1990.

[3] E. Rasmusen: Games and information, Blackwell Publishers, 1989.

[4] Y. Sato, E. Akiyama, J. D. Farmer: Chaos in learning a simple two person game, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 99, Issue 7, 4748-4751, April, 2002.