

6. Szűréselmélet alapjai:

I. Optimális nemrekurzív becslő (skalár Wiener szűrő)

Az alábbiakban ismételten a lineáris kombinátor struktúrával foglalkozunk, és természetesen ugyanarra az eredményre jutunk, mindössze a kiindulás némileg eltérő, és a menet közbeni interpretációban fedezhetők fel új elemek. Keressük x legjobb becslőjét

$\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k$ ún. lineáris batch processzorral, ahol y_0, y_1, \dots, y_{N-1} jelölik a megfigyelési

adatokat, a $\{w_k\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ pedig ismeretlen súlytényezők. A 30. ábra azt illusztrálja, hogy a tér x elemét/vektorát az $\{y_k\}$ elemek által kifeszített altérben, azok lineáris kombinációjával létrehozott \hat{x} elemmel/vektorral igyekszünk közelíteni. Legjobbnek azt a becslést tekintjük, amelyik legkisebb hibával jár: ez az x vektor altérre történő merőleges vetítésével áll elő. Megmutatjuk, hogy ez ekvivalens azzal a megoldással, amelyet a négyzetes hibakritérium minimalizálásával kaptunk:

$$e = x - \hat{x}, \quad E\{e^2\} = E\{(x - \hat{x})^2\} = E\left\{\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k\right)^2\right\} \quad (137)$$

$$\frac{\partial E\{e^2\}}{\partial w_j} = -2E\left\{\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k\right) y_j\right\} = 0, \quad E\{e y_j\} = 0 \quad \forall j \text{-re.} \quad (138)$$

Ez utóbbi az ún. ortogonalitási egyenlet, amely a vektorokkal történő interpretációban éppen azt fejezi ki, hogy az optimális beállítás esetén az e hibavektor merőleges valamennyi y_j vektorra. A (138) összefüggés átrendezésével:

$$\sum_{k=0}^{N-1} w_k \underbrace{E\{y_k y_j\}}_{R_{yy}(k,j)} = \underbrace{E\{x y_j\}}_{P_{xy}(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (139)$$

ahol $R_{yy}(k, j)$ az R_{yy} autokorreláció mátrix (k, j) indexű eleme, $P_{xy}(j)$ a P_{xy} keresztkorreláció vektor j -edik eleme, ahol most (a korábbiakkal ellentétben) a mátrix, ill. vektor indexében külön jeleztük, hogy mely mennyiségek auto-, ill. keresztkorrelációjáról van szó. Az optimális esetben megmaradó hiba:

$$\begin{aligned} E\{e^2\}_{\min} &= E\left\{e\left(x - \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k\right)\right\}_{\min} = E\{ex\} = E\{(x - \hat{x})x\} = E\{x^2\} - \sum_{k=0}^{N-1} w_k E\{x y_k\} = \\ &= E\{x^2\} - \sum_{k=0}^{N-1} w_k P_{xy}(k) \end{aligned} \quad (140)$$

Mindez mátrix formában (ahol $W = [w_0 \quad w_1 \quad \dots \quad w_{N-1}]^T$):

$$R_{yy} W = P_{xy}, \quad W = R_{yy}^{-1} P_{xy}, \quad E\{e^2\}_{\min} = E\{x^2\} - P_{xy}^T R_{yy}^{-1} P_{xy} \quad (141)$$

1. Példa: Zajos megfigyeléseink vannak x -ről: $y_k = x + n_k$. A zaj tulajdonságai: $E\{x n_j\} = 0$

$\forall j \text{-re}, \quad E\{n_j n_k\} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \sigma_n^2 & j = k \end{cases}$. A jel tulajdonságai: $E\{x\} = 0, \quad E\{x^2\} = \sigma_x^2$. A korreláció

mátrixok: $R_{yy}(k, j) = E\{y_k y_j\} = E\{(x + n_k)(x + n_j)\} = \sigma_x^2 + \sigma_n^2 \delta_{kj}, \quad P_{xy}(j) = E\{x y_j\} = \sigma_x^2$. A (141) szerinti összefüggések közül az első részletesen kifejtve:

$$(\sigma_x^2 + \sigma_n^2)w_0 + \sigma_x^2 w_1 + \dots + \sigma_x^2 w_{N-1} = \sigma_x^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 w_0 + (\sigma_x^2 + \sigma_n^2) w_1 + \dots + \sigma_x^2 w_{N-1} &= \sigma_x^2 \\ \vdots & \\ \sigma_x^2 w_0 + \sigma_x^2 w_1 + \dots + (\sigma_x^2 + \sigma_n^2) w_{N-1} &= \sigma_x^2 \end{aligned} \quad (142)$$

Összeadva a N egyenletet:

$$(\sigma_n^2 + N\sigma_x^2) \sum_{k=0}^{N-1} w_k = N\sigma_x^2, \text{ ill. } \sum_{k=0}^{N-1} w_k = \frac{N\sigma_x^2}{\sigma_n^2 + N\sigma_x^2}, \text{ amit soronként visszahelyettesítve:}$$

$$w_0 = w_1 = \dots = w_{N-1} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_n^2 + N\sigma_x^2}, \text{ amivel } \hat{x} = \frac{1}{N + \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_x}\right)^2} \sum_{k=0}^{N-1} y_k, \text{ ill. a hiba:} \quad (143)$$

$$E\{e^2\}_{\min} = \sigma_x^2 - \sigma_x^2 \frac{N}{N + \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_x}\right)^2} = \frac{\sigma_n^2}{N + \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_x}\right)^2} \quad (144)$$

Megjegyzés: Érdekes a fenti összefüggéseket $\gamma = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_x}\right)^2$ függvényében vizsgálni.

2. Példa: Lineárisan növekvő jelből két mintát veszünk. (Az órán nem szerepelt, de az anyag része.) Becsülendő a meredekség. Használjuk a $\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1} w_k y_k$ becslőt, ahol $y_k = (k+1)x + n_k$, $k=0,1$. A korreláció mátrixok:

$R_{yy}(j,k) = E\{(j+1)x + n_j\} \{(k+1)x + n_k\} = (j+1)(k+1)E\{x^2\} + E\{n_j n_k\} = (j+1)(k+1)S + \sigma_n^2 \delta_{jk}$
 $P_{xy}(j) = E\{(j+1)x + n_j\} x = (j+1)E\{x^2\} = (j+1)S$, ahol $S = \sigma_x^2 + (E\{x\})^2$, hiszen most végképp nem várható el, hogy az ismeretlen mennyiség várható értéke nulla legyen. Behelyettesítve a (141) első összefüggésébe:

$$\left. \begin{aligned} (S + \sigma_n^2)w_0 \quad 2Sw_1 &= S \\ 2Sw_0 \quad (4S + \sigma_n^2)w_1 &= 2S \end{aligned} \right\} w_0 = \frac{1}{5 + \frac{\sigma_n^2}{S}}, w_1 = \frac{2}{5 + \frac{\sigma_n^2}{S}}, \text{ most legyen } \gamma = \frac{\sigma_n^2}{S}, \text{ amivel}$$

$$w_0 = \frac{1}{5 + \gamma}, w_1 = \frac{2}{5 + \gamma}, \text{ és végül } \hat{x} = \frac{y_0 + 2y_1}{5 + \gamma}, E\{e^2\} = S \frac{\gamma}{5 + \gamma} \quad (145)$$

Rekurzív becslő az optimális nemrekurzív becslőből:

Bevezető példa: az egyszerű átlagolás rekurzív formában. (Az órán nem szerepelt, de az anyag része.) Megjegyzés: az iterációs indexhez asszociálhatjuk a diszkrét időt ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k), \quad \hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y(k) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n+1} y(n) = \frac{n}{n+1} \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} (y(n) - \hat{x}(n)) \end{aligned} \quad (146)$$

Megjegyzés: A rekurzív eljárás nagy előnye, hogy nem kell megvárni az összes adatot: folyamatosan számolható az egyre jobb minőségű becslő.

Visszatérve az optimális becslőhöz, N helyett n -t írva:

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} w_k(n) y(k), \quad w_k(n) = \frac{1}{n+\gamma}, \quad \text{ahol } \gamma = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_x}\right)^2, \quad E\{e^2(n)\} = E\{(x - \hat{x}(n))^2\} = \frac{\sigma_n^2}{n+\gamma},$$

aminek felhasználásával $w_k(n) = \frac{E\{e^2(n)\}}{\sigma_n^2}$ alakban is írható. Mindezeket megismételve $n+1$ -re:

$$\hat{x}(n+1) = \sum_{k=0}^n w_k(n+1) y(k), \quad w_k(n+1) = \frac{1}{n+1+\gamma}, \quad E\{e^2(n+1)\} = E\{(x - \hat{x}(n+1))^2\} = \frac{\sigma_n^2}{n+1+\gamma},$$

aminek felhasználásával $w_k(n+1) = \frac{E\{e^2(n+1)\}}{\sigma_n^2}$ alakban is írható. Követve (146) lépéseit:

$$\begin{aligned} \hat{x}(n+1) &= \frac{1}{n+1+\gamma} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) + \frac{1}{n+1+\gamma} y(n) = \frac{n+\gamma}{n+1+\gamma} \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1+\gamma} y(n) = \\ &= \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1+\gamma} (y(n) - \hat{x}(n)) \end{aligned} \quad (147)$$

A későbbiek szempontjából érdekes még a négyzetes hiba alakulása. A fentiek alapján:

$$\frac{E\{e^2(n+1)\}}{E\{e^2(n)\}} = \frac{w_k(n+1)}{w_k(n)} = \frac{n+\gamma}{n+1+\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n+\gamma}} = \frac{1}{1 + \frac{E\{e^2(n)\}}{\sigma_n^2}} \quad (148)$$

Ezek felhasználásával (147) átírható:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{E\{e^2(n+1)\}}{E\{e^2(n)\}} \hat{x}(n) + \frac{E\{e^2(n+1)\}}{\sigma_n^2} y(n) = \hat{x}(n) + \frac{E\{e^2(n+1)\}}{\sigma_n^2} (y(n) - \hat{x}(n)) \quad (149)$$

3. Példa: $\gamma = 2$, σ_n^2 adott. A fentiek alapján: $\hat{x}(1) = \frac{y(0)}{3}$, $E\{e^2(1)\} = \frac{\sigma_n^2}{3}$,

(136) felhasználásával: $E\{e^2(2)\} = \frac{E\{e^2(1)\}}{1 + \frac{E\{e^2(1)\}}{\sigma_n^2}} = \frac{\sigma_n^2}{4}$, amivel (137) $n=1$ -re

$$\hat{x}(2) = \frac{\frac{\sigma_n^2}{3}}{\frac{\sigma_n^2}{3}} \hat{x}(1) + \frac{\frac{\sigma_n^2}{4}}{\frac{\sigma_n^2}{4}} y(1) = \frac{3}{4} \hat{x}(1) + \frac{1}{4} y(1) = \hat{x}(1) + \frac{1}{4} (y(1) - \hat{x}(1)) = \frac{1}{4} (y(0) + y(1)),$$

$$E\{e^2(3)\} = \frac{\sigma_n^2}{5}, \quad \hat{x}(3) = \frac{\frac{\sigma_n^2}{4}}{\frac{\sigma_n^2}{4}} \hat{x}(2) + \frac{\frac{\sigma_n^2}{5}}{\frac{\sigma_n^2}{5}} y(2) = \frac{4}{5} \hat{x}(2) + \frac{1}{5} y(2), \text{ stb.}$$

Jelölés: a (149) összefüggés együtthatói: $a(n+1) = \frac{E\{e^2(n+1)\}}{E\{e^2(n)\}}$, $b(n+1) = \frac{E\{e^2(n+1)\}}{\sigma_n^2}$,

amivel: $\boxed{\hat{x}(n+1) = a(n+1)\hat{x}(n) + b(n+1)y(n)}$ (150)

Vegyük észre, hogy $\frac{a(n+1)}{b(n+1)} = \frac{1}{b(n)}$, illetve a (136) összefüggés alapján

$$a(n+1) = \frac{1}{1+b(n)} = \frac{1}{1+\frac{b(n+1)}{a(n+1)}} = \frac{a(n+1)}{a(n+1)+b(n+1)}, \text{ amiből } a(n+1) = 1 - b(n+1), \text{ ezzel}$$

$$\boxed{\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + \underbrace{b(n+1)(y(n) - \hat{x}(n))}_{\text{korrekciós_tag}}} \quad (151)$$

A (151) összefüggés a nemrekurzív optimális rekurzív becslő rekurzív formája, amely minden lépésben - egy újabb mérés révén - egy újabb dimenzióval bővíti azt az alteret, amelyre vetítjük az x vektort. Az optimális rekurzív becslő egy az eddigihez képest gazdagabb modellre épít.

II. Optimális rekurzív becslő (skalár Kalman szűrő):

A modell, amit alkalmazunk a legegyszerűbb állapotváltozós modell, amelynek gerjesztését egy zajfolyamat adja. Determinisztikus gerjesztést is kaphat, de a linearitás miatt érvényes szuperpozíció tétele folytán az külön tárgyalható:

$x(n) = ax(n-1) + w(n-1)$, ahol $\{w(n)\}$ nulla várható értékű fehér-zaj folyamat, melyre

$$E\{w(n)\} = 0, E\{w(n)w(j)\} = \begin{cases} 0 & n \neq j \\ \sigma_w^2 & n = j \end{cases}, \quad \left. \begin{matrix} x(n) = 0 \\ w(n) = 0 \end{matrix} \right\} \text{ ha } n < 0$$

Megjegyzés: Ez az ún. elsőrendű autoregresszív folyamat: első rendben függ az érték az előző „időpillanatbeli” értéktől.

$$E\{x(n)\} = 0, \quad E\{x^2(n)\} = R_{xx}(0) = \sigma_x^2 = E\{a^2x^2(n-1) + w^2(n-1) + 2ax(n-1)w(n-1)\} =$$

$$a^2R_{xx}(0) + R_{ww}(0) = a^2\sigma_x^2 + \sigma_w^2, \text{ ahonnan } \boxed{R_{xx}(0) = \frac{\sigma_w^2}{1-a^2}}. \quad (152)$$

$$R_{xx}(1) = E\{x(n)x(n+1)\} = E\{x(n)(ax(n) + w(n))\} = aR_{xx}(0), \text{ mert } E\{x(n)w(n)\} = 0.$$

$$R_{xx}(2) = E\{x(n)x(n+2)\} = E\{x(n)(ax(n+1) + w(n+1))\} = a^2R_{xx}(0), \text{ általában}$$

$$\boxed{R_{xx}(j) = E\{x(n)x(n+j)\} = R_{xx}(j) = a^{|j|}R_{xx}(0)}. \quad (153)$$

A megfigyelés lineáris modelljét a 31. ábrán láthatjuk. A megfigyelés additív zajjal terhelt. Erre a zajra vonatkozóan ugyanolyan feltételezésekkel élünk, mint $w(n)$ esetében. A két zajfolyamatnak egymáshoz nincsen köze, korrelálatlanok. A rekurzív becslő az új megfigyelés és a korábbi becslés lineáris kombinációja (lásd 32. ábra):

$$\boxed{\hat{x}(n) = a(n)\hat{x}(n-1) + b(n)y(n)} \quad (154)$$

Megjegyzés: Létezik az ún. prediktor-séma is: $\boxed{\hat{x}(n+1) = \alpha(n)\hat{x}(n) + \beta(n)y(n)}$. (155)

Keressük a (154) összefüggés optimális súlytényezőit a 30. ábrán szereplő illusztráció szellemében. Ehhez: $e(n) = x(n) - \hat{x}(n)$, $E\{e^2(n)\} = E\{(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n))^2\}$. Az optimális beállítás feltételei:

$$\frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial a(n)} = -2E\{e(n)\hat{x}(n-1)\} = 0, \quad \frac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial b(n)} = -2E\{e(n)y(n)\} = 0,$$

vagyis az aktuális ortogonalitási egyenletek:

$$\boxed{E\{e(n)\hat{x}(n-1)\} = 0, \quad E\{e(n)y(n)\} = 0} \quad (156)$$

A 30. ábra segítségével szavakban: az $e(n)$ hiba-vektor merőleges az $\hat{x}(n-1)$ és az $y(n)$ vektorokra, ill. az általuk kifeszített síkra.

$a(n)$ meghatározása: (156) alapján $E\{(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n))\hat{x}(n-1)\} = 0$. Ha ebbe beleírjuk: $a(n)x(n-1) - a(n)x(n-1) = 0$, $y(n) = cx(n) + n(n)$, azaz

$$E\{(a(n)(x(n-1) - \hat{x}(n-1)) - a(n)x(n-1))\hat{x}(n-1) + (x(n) - cb(n)x(n) - b(n)n(n))\hat{x}(n-1)\} = 0$$

átrendezve:

$$a(n)E\{-e(n-1)\hat{x}(n-1) + x(n-1)\hat{x}(n-1)\} = E\{((1 - cb(n))x(n) - b(n)n(n))\hat{x}(n-1)\} \quad (157)$$

Itt $E\{e(n-1)\hat{x}(n-1)\} = 0$, mert $\hat{x}(n-1) = a(n-1)\hat{x}(n-2) + b(n-1)y(n-1)$ tagjai ortogonálisak $e(n-1)$ -re. Hasonlóképpen a megfigyelési zaj $n(n)$ mintája korrelálatlan $\hat{x}(n-1)$ értékével. Ezzel (157) az alábbi formában írható:

$$a(n)E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\} = (1 - cb(n))E\{x(n)\hat{x}(n-1)\}$$

Behelyettesítve, hogy $x(n) = ax(n-1) + w(n-1)$, és $E\{w(n-1)\hat{x}(n-1)\} = 0$, kapjuk:

$$a(n)E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\} = a(1 - cb(n))E\{x(n-1)\hat{x}(n-1)\}, \text{ azaz } \boxed{a(n) = a(1 - cb(n))}, \text{ amivel}$$

$$\boxed{\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ac\hat{x}(n-1))} \quad (158)$$

Megjegyzés: Látható, hogy a megfigyelt rendszer modellje beépült a megfigyelésbe. (158) jobboldalának második tagja pedig egy korrekció, amely a mért érték $\hat{y}(n) = ac\hat{x}(n-1)$ becslését veszi alapul. A (158) összefüggésnek megfelelő becslő blokkvázlata a 33. ábrán látható.

$b(n)$ meghatározása (az órán nem szerepelt, de az anyag része):

$E\{e^2(n)\} = E\{e(n)(x(n) - \hat{x}(n))\} = E\{e(n)x(n)\}$, mert $\hat{x}(n) = a(n)\hat{x}(n-1) + b(n)y(n)$ jobboldalán lévő tagok ortogonálisak $e(n)$ -re. Mivel $y(n) = cx(n) + n(n) \Rightarrow cx(n) = y(n) - n(n)$.

Ez utóbbit felhasználva $cE\{e(n)x(n)\} = -E\{e(n)n(n)\}$, vagyis $E\{e^2(n)\} = -\frac{1}{c}E\{e(n)n(n)\}$. Ezt tovább alakítva:

$$E\{e^2(n)\} = -\frac{1}{c}E\{(x(n) - \hat{x}(n))n(n)\} = -\frac{1}{c}E\{(x(n) - a(n)\hat{x}(n-1) - b(n)y(n))n(n)\}.$$

Mivel $x(n), \hat{x}(n-1)$ korrelálatlan $n(n)$ -nel, ezért írható:

$$E\{e^2(n)\} = \frac{b(n)}{c}E\{y(n)n(n)\} = \frac{b(n)}{c}\sigma_n^2, \text{ ahonnan } \boxed{b(n) = c \frac{E\{e^2(n)\}}{\sigma_n^2}} \quad (159)$$

Megjegyzés: Ez a forma még nem igazán jó, $e(n)$ négyzetes várható értékének a meghatározásához kell $b(n)$ értéke. Szükség van egy olyan kifejezésre, amelyben legfeljebb $e(n-1)$ négyzetes várható értéke szerepel. Az átlagos négyzetes hiba kifejezésébe írjuk be a (158) összefüggést:

$$E\{e^2(n)\} = E\{[x(n) - \hat{x}(n)]^2\} = E\{[x(n) - a\hat{x}(n-1) - b(n)(y(n) - ac\hat{x}(n-1))]^2\} \quad (160)$$

Ebbe helyettesítsük be az $y(n) = cx(n) + n(n)$ és $x(n) = ax(n-1) + w(n-1)$ összefüggéseket:

$$\begin{aligned} E\{e^2(n)\} &= \\ &= E\{[ax(n-1) + w(n-1) - a\hat{x}(n-1) - b(n)(acx(n-1) + cw(n-1) + n(n) - ac\hat{x}(n-1))]^2\} = \\ &= E\{[a(1-cb(n))e(n-1) + (1-cb(n))w(n) - b(n)n(n)]^2\} \end{aligned}$$

Elvégezve a négyzetre emelést: a keresztszorzatok várható értékei nullák lesznek, ami marad

$$\boxed{E\{e^2(n)\} = a^2(1-cb(n))^2 E\{e^2(n-1)\} + (1-cb(n))^2 \sigma_w^2 + b^2(n)\sigma_n^2} \quad (161)$$

(159) alapján $E\{e^2(n)\} = \frac{b(n)}{c} \sigma_n^2$. Ezt behelyettesítve a (161) összefüggésbe:

$\frac{b(n)}{c} (1-cb(n))\sigma_n^2 = (1-cb(n))^2 [a^2 E\{e^2(n-1)\} + \sigma_w^2]$, ami egyszerűsítés után alkalmas $b(n)$ meghatározására: $b(n)[a^2 c^2 E\{e^2(n-1)\} + c^2 \sigma_w^2 + \sigma_n^2] = c[a^2 E\{e^2(n-1)\} + \sigma_w^2]$, amiből

$$\boxed{b(n) = \frac{c[a^2 E\{e^2(n-1)\} + \sigma_w^2]}{[a^2 c^2 E\{e^2(n-1)\} + c^2 \sigma_w^2 + \sigma_n^2]}} \quad (162)$$

Megjegyzés: Ha $\sigma_n = 0$, akkor $b(n) = \frac{1}{c}$. Ezzel $E\{e^2(n)\} = 0$.

Összefoglalva:

A rendszermodell: $x(n) = ax(n-1) + w(n-1)$, a megfigyelés: $y(n) = cx(n) + n(n)$. Az optimális rekurzív szűrő

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}(n) &= a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ac\hat{x}(n-1)) \\ b(n) &= cp(n)[c^2 p(n) + \sigma_n^2]^{-1}, \quad \text{ahol} \\ p(n) &= a^2 E\{e^2(n-1)\} + \sigma_w^2 \\ E\{e^2(n)\} &= p(n) - cb(n)p(n) \\ p(n+1) &= a^2(1-cb(n))p(n) + \sigma_w^2 \end{aligned}} \quad (163)$$

Optimális rekurzív prediktor (az órán nem szerepelt, de az anyag része):

A becslő kifejezése (lásd (155)): $\boxed{\hat{x}(n+1) = \alpha(n)\hat{x}(n) + \beta(n)y(n)}$, ami hasonló átírásokkal

$$\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n))$$

formára hozható. A levezetés hasonló lépésekből áll, mint a szűrő esetében, azzal, hogy $p(n+1) = E\{e^2(n+1)\}$ minimalizálását írjuk elő. A levezetést majd a vektoros esetre mutatjuk be.

Összefoglalva:

A rendszermodell: $x(n+1) = ax(n) + w(n)$, a megfigyelés: $y(n) = cx(n) + n(n)$. Az optimális rekurzív prediktor

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{x}(n+1) &= a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n)) \\ \beta(n) &= acp(n)[c^2 p(n) + \sigma_n^2]^{-1} \\ p(n+1) &= a(a - c\beta(n))p(n) + \sigma_w^2 \end{aligned}} \quad (164)$$

Megjegyzés: A 34. ábra az optimális, egylépéses prediktor blokkvázlatát mutatja be, a 35. ábrán egy olyan elrendezés látható, amely szűrőként és prediktorként egyaránt használható.

Példa: skalár Kalman szűrő. (Az órán nem szerepelt, de az anyag része.) Tegyük fel, hogy: $E\{x(n)\} = 0$. Mivel $\hat{x}(0) = 0$, $\hat{x}(1) = b(1)y(1)$. A $b(1)$ értéket az ortogonalitási összefüggésből

kapjuk: $E\{[x(1) - \hat{x}(1)]y(1)\} = 0$, ahol $y(1) = x(1) + n(1)$. A c értékét 1-re választottuk. Ezzel $\hat{x}(1) = b(1)[x(1) + n(1)]$. Mindezeket behelyettesítve az ortogonalitási összefüggésbe: $E\{[(1 - b(1))x(1) - b(1)n(1)][x(1) + n(1)]\} =$

$$= (1 - b(1))\sigma_x^2 + b(1)\sigma_n^2 = 0. \text{ Ebből } b(1) = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}. \text{ Ha például } \sigma_n^2 = \sigma_w^2, \text{ és } a^2 = \frac{1}{2}, \text{ akkor}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_w^2}{1 - a^2} = 2\sigma_n^2. \text{ Ezzel } b(1) = \frac{2}{3}. \text{ A (159) összefüggés felhasználásával } E\{e^2(1)\} = \frac{2}{3}\sigma_n^2.$$

Ezek után már tudjuk használni a (162) összefüggést:

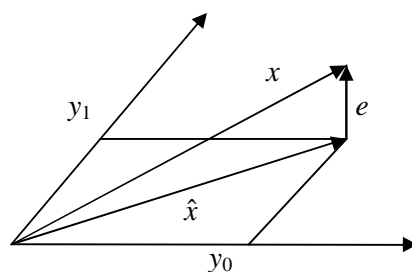
$$b(2) = \frac{a^2 E\{e^2(1)\} + \sigma_w^2}{\sigma_n^2 + \sigma_w^2 + a^2 E\{e^2(1)\}} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{4}{7} \approx 0.57. \text{ Ismét a (147) összefüggés alkalmazásával:}$$

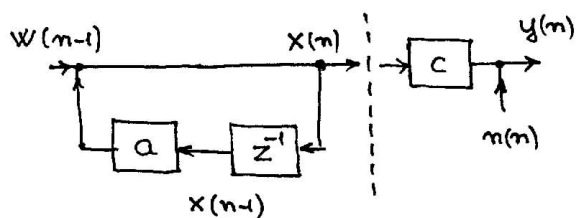
$$E\{e^2(2)\} = \frac{4}{7}\sigma_n^2 \cong 0.57\sigma_n^2. \text{ Így folytatva: } b(3) = \frac{9}{16}, \quad E\{e^2(3)\} = \frac{9}{16}\sigma_n^2 \cong 0.562\sigma_n^2. \text{ Az}$$

iterációt folytatva elérünk egy állandósult állapotot, amikor $E\{e^2(k+1)\} \cong E\{e^2(k)\} = p$. Ezt behelyettesítve (159) és (162) összefüggésekbe, majd egymással egyenlővé téve kapjuk:

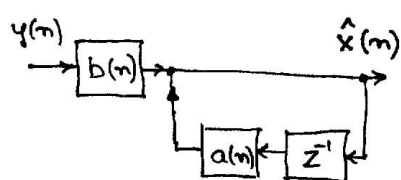
$$p^2 + 3p\sigma_n^2 - 2\sigma_n^4 = 0, \text{ amiből } p = 0.56\sigma_n^2. \text{ Látható, hogy a harmadik iterációs lépés már elég közel vitt az állandósult állapothoz.}$$

30. ábra

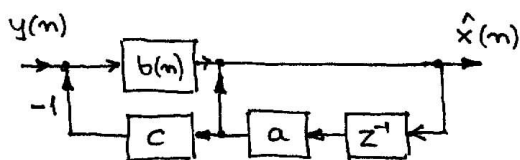




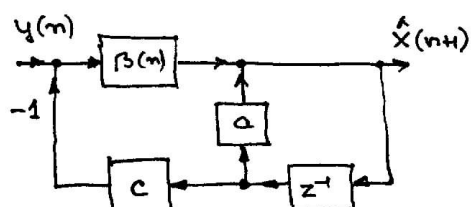
31. ábra



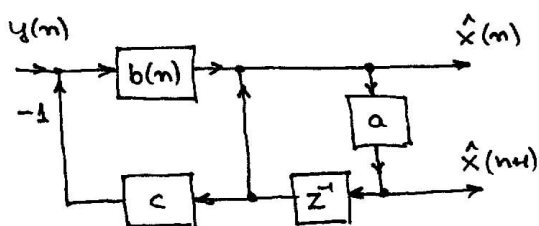
32. ábra



33. ábra



34. ábra



35. ábra