Méréstechnika házi feladat 3. Megoldás

2020. ősz

1. A tiszta koszinuszos jelet írjuk fel általánosan, majd adjuk meg komplex alakban:

$$x_0(t) = \cos(\omega t + \varphi) = \frac{e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2} \tag{1}$$

A komplex írásmód egyrészt illeszkedik a spektrumszámításhoz, másrészt könnyen figyelembe vehető tetszőleges kezdőfázisú szinuszos jel. (Szinuszjel esetén $\varphi = -\pi/2$.) Ezzel az írásmóddal az is megmutatható, hogy a kialakuló spektrumkép fázisfüggetlen. A megadott $x(t)$ jel a fent megadott jel hatványozásával állítható elő (az amplitúdó nem változik). Általánosan $x(t)$ a következőképpen írható fel:

$$x(t) = \left(\frac{e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}\right)^a = \frac{1}{2^a}\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}e^{j[(a-2k)\omega t+(a-2k)\varphi]} \tag{2}$$

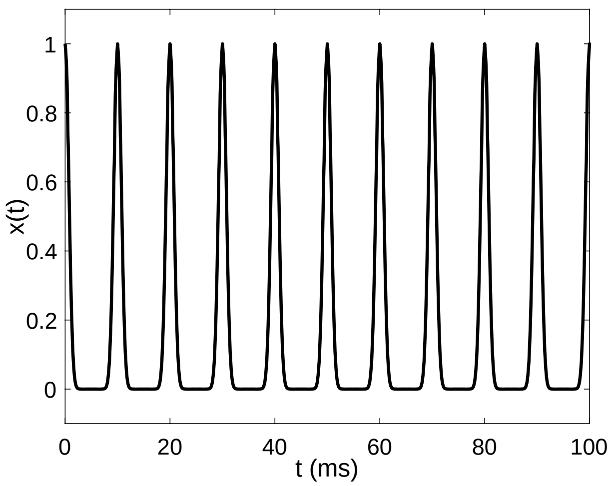
a értékének behelyettesítésével látszik, hogy a legmagasabb komponens az a-adik. Ha a páros, csak páros komponensek vannak jelen (beleértve a DC-t is), ha a páratlan, csak páratlanok. Azaz $a = 14$ esetén 0, $2f$, $4f$ stb.; $a = 13$ esetén f, $3f$ és $5f$ stb. frekvenciájú komponensek jelennek meg a kimeneten. Ez azt is jelenti, hogy az összeg két tagjának spektrumkomponensei nem kerülnek egymásra, összegzésük nem igényel további műveletet.

A DC-komponens amplitúdója $a = 20$, $k = 10$ helyettesítéssel számítható, mert a (2) egyenletben a komplex exponenciális kitevője ebben az esetben lesz zérus. Az eredmény tehát:

$$X_0 = \frac{1}{2^{20}}\binom{20}{10} = 0.1762 \tag{3}$$

(2 pont)

Az alábbi ábrán láthatjuk a jel időfüggvényét ($f = 50$ Hz frekvencián):



(1 pont)

Jól látható, hogy a jel a páros hatvány miatt csak nemnegatív értékeket vesz fel, és erősen impulzusjellegű.

Megjegyzés.

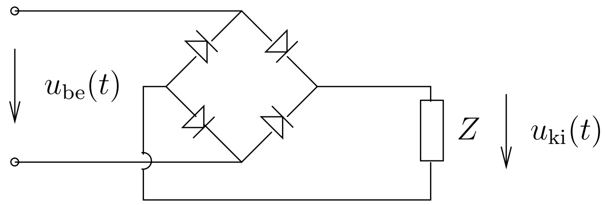
Ha magasabb hatványra emeljük a koszinuszfüggvényt, a fenti számítási mód a faktoriálisok számítása miatt igen nagy számértékekkel való bánásmódot igényel. A Matlab pl. $a > 21$ esetén közelítést alkalmaz. Bár a végeredmény kicsi, de ez nagy számok hányadosaként áll elő. Érdemes elgondolkodni, hogyan lehetne kiszámítani X_0 értékét pl. $a = 2020$ esetén.

2. Az első esetben a gerjesztő feszültség közvetlenül kapcsolódik az impedanciára. Az impedancia, a rajta folyó áram és a diszipált teljesítmény az alábbi módon alakul:

$$Z = R_s + j\omega L, \quad I_1 = \frac{U}{Z}, \quad P_1 = |I_1|^2 R_s = 0.2906 \text{ W} \tag{4}$$

ahol $\omega = 2\pi f$, és U a gerjesztő feszültség effektív értékét jelöli. (1 pont)

A második esetnek megfelelő kapcsolás az alábbi ábrán látható:



A kétutas egyenirányítás miatt a gerjesztő feszültség abszolút értéke jelenik meg a Graetz-híd kimenetén. A diódafeszültség hatása úgy vehető figyelembe, hogy a kimeneti szinusz-félhullámok amplitúdója $2\,U_d$-vel csökken. A továbbiak kedvéért ki kell fejezni a szinuszhullám csúcsértékét:

$$U_p = \sqrt{2}\,U, \quad U_p' = U_p - 2\,U_d \tag{5}$$

Ennek a feszültségnek DC és AC komponense van. A feszültség által létrehozott áramnak a frekvenciafüggő impedancia sajátosságai miatt a jelentős DC mellett igen kicsi AC összetevője van, ezért közelítést lehet alkalmazni. Elsőként fejezzük ki a DC feszültséget és a disszipált teljesítményt:

$$U_{DC}' = (U_p - 2U_d) \cdot \frac{2}{\pi}, \quad P_{2,DC} = \frac{U_{DC}'^2}{R_s} = 50.40 \text{ W} \tag{6}$$

az egyenkomponens ugyanis az abszolút középérték, a tekercs pedig rövidzárként viselkedik. (1 pont)

Az AC komponens felírásához a kimeneti feszültséget célszerű Fourier-sorba fejteni:

$$u'(t) \cong (U_p - 2U_d) \cdot \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega t}{(2k-1)(2k+1)} \right] \tag{7}$$

Az összefüggés azért közelítés, mert a diódafeszültség hatását csak egyszerűsítve vettük figyelembe. A továbbiakban csak a fenti Fourier-sor első tagjával számolunk:

$$U_{AC,p}' = \frac{4}{3\pi}(U_p - 2U_d) \tag{8}$$

A közelítés magyarázata a következő: Az összeg következő tagjának amplitúdója $4/(15\pi) \cdot (U_p - 2U_d)$, azaz az első tag ötöde. Az impedancia ezen a frekvencián az első taghoz képest kétszeres (mivel $\omega L \gg R_s$), tehát a 2. harmonikus által létrehozott áram az első AC komponens tizede, a disszipált teljesítmény tehát a százada. Maga az első komponens miatt fellépő disszipáció is hiba jellegű mennyiség, hiszen egyenáramon $1 \ldots 2$ nagyságrenddel nagyobb áram folyik, így a magasabb felharmonikusok bátran elhanyagolhatók. Az AC komponens által létrehozott disszipált teljesítmény tehát:

$$Z_2 = R_s + j2\omega L, \quad I_{2,p} = \frac{U_{AC,p}'}{Z_2}, \quad P_{2,AC} = \frac{|I_{2,p}|^2}{2} R_s = 11.3 \text{ mW} \tag{9}$$

A teljes disszipált teljesítmény pedig:

$$P_2 \approx P_{2,DC} + P_{2,AC} = 50.41 \text{ W} \tag{10}$$

(2 pont)

3. A lyukszűrő átviteli karakterisztikájára vonatkozó előírások alapján az alábbi megállapításokat tehetjük:

1. Az „általában” konstans átvitel 0 dB meredekséget jelent.
2. Az egyetlen frekvencián való extrém viselkedés rezonanciát jelent, azaz legalább másodfokú átviteli függvény szükséges.

Legyen az átviteli függvény az alábbi alakú:

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{11}$$

Mivel a rezonancia zérus átvitelt kell eredményezzen, a számlálóban kell lenni a másodfokú polinomnak, azaz:

$$N(s) = 1 + \frac{s^2}{\omega_0^2} \tag{12}$$

ahol $\omega_0 = 2\pi f_0$. (1 pont)

Ennek azonban ω_0 felett $+40$ dB/dek meredeksége van, ezért olyan nevezőt kell találni, amely ezt ellensúlyozza. Erre alkalmas egy szintén ω_0 törésponti frekvenciájú másodfokú polinom. Ha azonban ennek is rezonanciája van, kiejti a számláló rezonanciáját, és nem valósul meg a zérus átvitel f_0 frekvencián. A megoldás az, hogy a nevezőnek nem zérus csillapítása kell legyen, azaz:

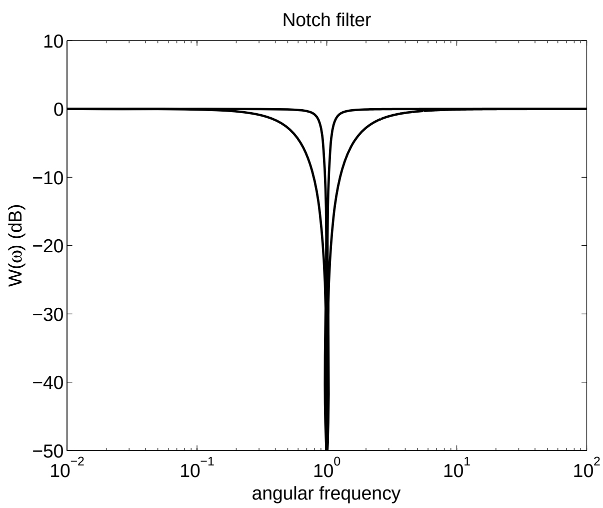
$$D(s) = 1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}, \quad \zeta \neq 0 \tag{13}$$

(1 pont)

A ζ csillapítási tényező megválasztására több lehetőség is van. ζ meghatározza azt a sávot, amelyben lényegesen eltér az átvitel 0 dB-től. Minél kisebb ζ, annál „keskenyebb” a lyuk, hiszen a számláló átvitele mindenképpen zérus, a nevezőé pedig kis ζ esetén nagy, de nem végtelen. Probléma akkor van, ha a számláló sem teljesen veszteségmentes (mert pl. a realizáló reaktáns elemek nem veszteségmentesek), ekkor viszont nem kapunk elég jó elnyomást f_0 frekvencián. Jó kompromisszum a

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{14}$$

választás, mert ebben az esetben a nevező átvitele maximálisan lapos. Az alábbi ábrán $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\zeta = 0.1$ esetére látjuk az átviteli karakterisztikát. A keskenyebb szűrő a kisebb csillapításhoz tartozik:



(1 pont)

Megjegyzés:

Megoldás lehet az is, hogy $D(s)$ egy elsőfokú polinom négyzete, ez esetben azonban csak fix sávszélesség állítható be.