

Méréstechnika házi feladat 2. Megoldás

2020. ősz

1. Az eredő ellenállás kifejezése és értéke:

$$\hat{R}_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0.9091 \text{ k}\Omega \quad (1)$$

Az egyes érzékenységek:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\partial R_e}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} \\ c_2 &= \frac{\partial R_e}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \end{aligned} \quad (2)$$

(1 pont)

Az egyes ellenállások értékének szórása:

$$\sigma_1 = \frac{\Delta R_1}{z_2} = \frac{h R_1}{z_2}, \quad \sigma_2 = \frac{\Delta R_2}{z_2} = \frac{h R_2}{z_2} \quad (3)$$

ahol $h = 5\%$, az ellenállások tűrése, $z_2 = z_{0.005} = 2.58$, a normális eloszlás $p = 99\%$ valószínűséghez tartozó változója. Az eredő szórás kifejezése:

$$\sigma_e = \sqrt{c_1^2 \sigma_1^2 + c_2^2 \sigma_2^2} = \frac{1}{z_2} \sqrt{c_1^2 \Delta R_1^2 + c_2^2 \Delta R_2^2} = 16.036 \text{ }\Omega \quad (4)$$

Ebből az eredő ellenállás hibája $p_1 = 95\%$ konfidenciaszinten:

$$\Delta R_{e,1} = z_1 \sigma_e = 31.55 \text{ }\Omega \quad (5)$$

ahol $z_1 = z_{0.025} = 1.96$. A konfidenciaintervallum pedig a következő:

$$p[\hat{R}_e - \Delta R_{e,1} < R_e < \hat{R}_e + \Delta R_{e,1}] = p_1 \quad (6)$$

Behelyettesítve:

$$p[877.5 \text{ }\Omega < R_e < 940.6 \text{ }\Omega] = 95\% \quad (7)$$

(2 pont)

Ha a feladat az, hogy $p_2 = 99\%$ konfidenciaszinten adjuk meg az eredő ellenállás értékét, akkor az (5) egyenletbe kell behelyettesíteni a $z_2 = z_{0.005} = 2.58$ változót, és kiszámítani a konfidenciaintervallumot. Ehhez azonban először ki kellett számítani a szórásokat stb. Ha viszont megfigyeljük, hogy ebben a feladatban azon a konfidenciaszinten kell kiszámítani az eredő ellenállás hibáját, amilyen szinten az egyes ellenállások hibája adott, akkor a szórásokra és a normális eloszlásra vonatkozó számítás elhagyható, az egyszerű valószínűségi összegzés adja a keresett hibaintervallumot, azaz:

$$\Delta R_{e,2} = \sqrt{c_1^2 \Delta R_1^2 + c_2^2 \Delta R_2^2} = 41.53 \text{ }\Omega \quad (8)$$

A konfidenciaintervallum pedig, rögtön behelyettesítve, a következő:

$$p[867.6 \text{ }\Omega < R_e < 950.6 \text{ }\Omega] = 99\% \quad (9)$$

(1 pont)

2. Írjuk fel először a konfidenciaintervallumot a csomagok mérésére vonatkozóan! A csomagmérés hibája a példában megadott Δm , egyenletes eloszlással. Ennek szórása ismert módon:

$$\sigma_1 = \frac{\Delta m}{\sqrt{3}} = 0.2887 \text{ g} \quad (10)$$

(1 pont)

Ezzel felírható a csomag tömegére a konfidenciaintervallum. Mivel elegendően nagy számú csomagot mértünk meg, az átlag eloszlása normálisnak tekinthető, azaz:

$$\Delta m_{cs} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{K}} z_{0.025} = 0.1265 \text{ g} \quad (11)$$

$$p[\hat{m}_{cs} - \Delta m_{cs} < m_{cs} < \hat{m}_{cs} + \Delta m_{cs}] = 1 - b \quad (12)$$

(1 pont)

Egy lap tömegére a konfidenciaintervallum az ismert módon, leosztással nyerhető:

$$\Delta m_1 = \frac{\Delta m_{cs}}{N} = \frac{\sigma_{cs}}{\sqrt{KN}} z_{0.025} \quad (13)$$

$$p[\hat{m}_1 - \Delta m_1 < m_1 < \hat{m}_1 + \Delta m_1] = 1 - b \quad (14)$$

Behelyettesítve:

$$p[5.0657 \text{ g} < m_1 < 5.0663 \text{ g}] = 95\% \quad (15)$$

(1 pont)

3. A kerekítés miatt az $N = 123$ gyerek által behozott papír össztömege torzítatlan becslő. A kerekítés során elkövetett hiba ± 0.5 kg, az eloszlás egyenletes. Összefoglalva:

$$\hat{M} = m_0 = 1476 \text{ kg}, \quad \Delta m = 0.5 \text{ kg}, \quad \sigma_q = \frac{\Delta m}{\sqrt{3}} = 0.2887 \text{ kg} \quad (16)$$

Az össztömeg eloszlása a centrális határeloszlás-tétel értelmében normális, így az eredő szórás és a konfidenciaintervallum félszélessége:

$$\sigma_N = \sqrt{N} \sigma_q = 3.202 \text{ kg}, \quad \Delta M = \sigma_N z_{0.05} = 5.251 \text{ kg} \quad (17)$$

Így a konfidenciaintervallum:

$$p[\hat{M} - \Delta M < M < \hat{M} + \Delta M] = 1 - b \quad (18)$$

$$p[1470.7 \text{ kg} < M < 1481.3 \text{ kg}] = 90\% \quad (19)$$

(2 pont)

Mézga apuka állítását egyrészt úgy vizsgálhatjuk meg, hogy megnézzük, az általa mondott $M_p = 1500$ kg tömeg milyen valószínűséggel lép fel. Ehhez meg kell vizsgálni, hogy a standard normális eloszlás tengelyén hol helyezkedik el:

$$z = \frac{M_p - \hat{M}}{\sigma_N} \cong 7.5 \quad (20)$$

Ennek alapján a bekövetkezés valószínűsége elhanyagolható. Kérdés viszont az is, hogy lehetséges-e ennyi papírt behozni. Ha minden kerekítési hiba pontosan $\Delta m = -0.5$ kg, akkor a gyerekek valójában:

$$M = \hat{M} + N \Delta m = 1537.5 \text{ kg} \quad (21)$$

papírt hoztak be. Azaz Mézga apuka állítása nem lehetetlen, de valószínűsége elhanyagolható.

(1 pont)