Méréstechnika házi feladat 1. Megoldás

2020. ősz

1. Az egyes nem SI mértékegységeket SI megfelelőikkel helyettesítve származtatható az adott nyomásegység SI egysége. Az átszámításhoz felhasználandó állandók a következők:

$$g = 9.80665\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},\quad \varrho(\mathrm{Hg}, 0\ ^\circ\mathrm{C}) = 13595.1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3},\quad m = 1\ \mathrm{pound} = 0.453592\ \mathrm{kg},\quad d = 1\ \mathrm{inch} = 25.4\ \mathrm{mm} \tag{1}$$

a) 1 at az ún. technikai atmoszféra, azaz:

$$1\ \mathrm{at} = 1\ \frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{cm}^2} = \frac{1\ \mathrm{kg}\cdot g}{10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 98066.5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 98066.5\ \mathrm{Pa} \tag{2}$$

b) 1 PSI az angolszász nyomásegység, 1 font/négyzethüvelyk, azaz:

$$1\ \mathrm{PSI} = \frac{m\cdot g}{d^2} = 6894.75\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 6894.75\ \mathrm{Pa} \tag{3}$$

c) 1 mmHg 1 mm magas 0 °C-os higanyoszlop nyomása, azaz:

$$1\ \mathrm{mmHg} = \varrho\, g\cdot 1\ \mathrm{mm} = 133.3224\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 133.3224\ \mathrm{Pa} \tag{4}$$

(3 pont)
Megjegyzés. A kevesebb tizedesjegyre megadott állandókkal számított értékek is elfogadhatók (pl. $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$).

2. A példában megadott összefüggésből explicite ki kell fejezni a fókusztávolságot:

$$f = \frac{1}{n-1}\frac{1}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}} = \frac{1}{n-1}\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2} = \frac{1}{n-1}\cdot k \tag{5}$$

A véletlen hibák kiszámításához a fenti kifejezést kell vizsgálni. Eszerint:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial n} &= -k\frac{1}{(n-1)^2}, & \left.\frac{\Delta f}{f}\right|_n &= -\frac{n}{n-1}\frac{\Delta n}{n} \\ \frac{\partial f}{\partial r_{1,2}} &= \frac{1}{n-1}\frac{1}{\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)^2}\frac{1}{r_{1,2}^2}, & \left.\frac{\Delta f}{f}\right|_{r_{1,2}} &= \frac{r_{2,1}}{r_1+r_2}\frac{\Delta r_{1,2}}{r_{1,2}} \end{aligned} \tag{6}$$

(1 pont)
Mivel a kérdés az, hogy legfeljebb mekkora hibával mérhetjük a sugarakat, worst case összegést kell alkalmazni:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{n}{n-1}\frac{\Delta n}{n} + \frac{r_2}{r_1+r_2}\frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{r_1}{r_1+r_2}\frac{\Delta r_2}{r_2} \tag{7}$$

Figyelembe véve, hogy $\Delta r_1/r_1 = \Delta r_2/r_2 = \Delta r/r$, a kifejezés egyszerűsödik:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{n}{n-1}\frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta r}{r} \tag{8}$$

A sugarak mérési hibájára vonatkozó összefüggés tehát:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta f}{f} - \frac{n}{n-1}\frac{\Delta n}{n} = 3.18\% \tag{9}$$

(1 pont)

Ha a lencse egyik oldala sík, azt úgy vehetjük figyelembe, hogy $r_{1,2} \to \infty$. Ekkor (5) módosul:

$$f = \frac{r_{2,1}}{n-1} \tag{10}$$

A fókusztávolság hibája ebben az esetben, szintén worst case összegzéssel, megegyezik a (8) kifejezéssel, a sugarak mérési hibájára vonatkozó feltétel pedig az (9) összefüggéssel. (1 pont)

Megjegyzés. A példában csak Δn volt megadva, a relatív hibát ki kellett számítani.

3. Az első esetben az illesztett függvény egyenlete:

$$f(t) = U_0 \tag{11}$$

A négyzetes költségfüggvény pedig:

$$C = \sum_{n=1}^{N} (U_i - U_0)^2 = \sum_{n=1}^{N} U_i^2 - 2U_iU_0 + U_0^2 \tag{12}$$

(1 pont)
Ezt követően meg kell oldani a:

$$\frac{\partial C}{\partial U_0} = 0 \tag{13}$$

egyenletet, amelynek alapján:

$$U_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} U_i = 0.1759 \text{ V} \tag{14}$$

Azaz a megoldás a mért feszültségértékek egyszerű átlaga. (1 pont)

A második esetben az illesztett függvény egyenlete:

$$f(t) = a \cdot t \tag{15}$$

A négyzetes költségfüggvény pedig:

$$C = \sum_{n=1}^{N} (U_i - at_i)^2 = \sum_{n=1}^{N} U_i^2 - 2at_iU_i + a^2t_i \tag{16}$$

(1 pont)
Ezt követően meg kell oldani a:

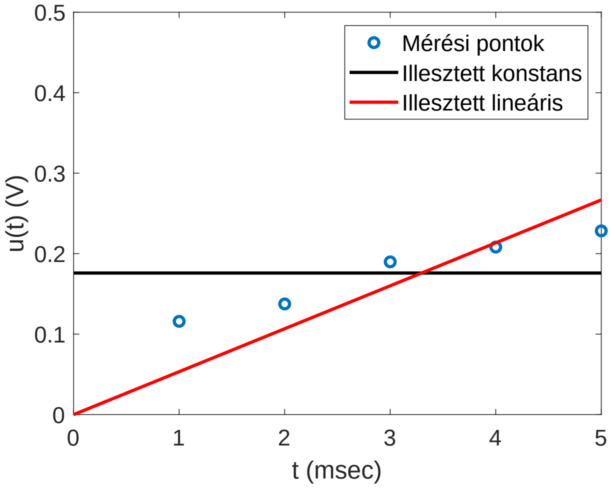
$$\frac{\partial C}{\partial a} = 0 \tag{17}$$

egyenletet, amelynek alapján:

$$a = \frac{\sum_{n=1}^{N} t_iU_i}{\sum_{n=1}^{N} t_i^2} = 0.0534 \text{ V/msec} \tag{18}$$

(1 pont)

A mért értékek és az illesztett egyenesek az alábbi ábrán láthatók:



Jól látható, hogy egyik egyenes sem illeszkedik pontosan, egy $f(t) = a't + b$ egyenletű egyenes jobban közelítené a mérési pontokat, ugyanakkor $a' \neq a$ és $b \neq U_0$, azaz a jobban illeszkdő egyenes meredeksége kisebb lenne, és $t = 0$-ban U_0-nál kisebb lenne az értéke.