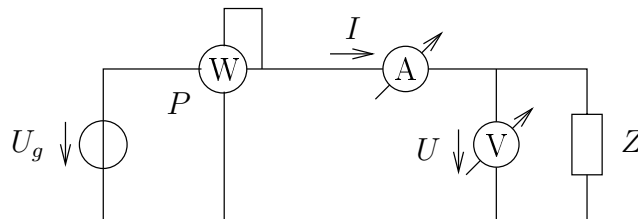


Méréstechnika házi feladat 5. Megoldás

2020. tavasz

1. A volt-amper-wattmérős módszer kapcsolási rajza az alábbi ábrán látható:



A kapcsolatban általában rendszeres hibát okozhat bármelyik műszer nem ideális viselkedése, azaz a voltmérő nem végtelen, illetve az ampermérő nem zérus bemeneti ellenállása, továbbá a wattmérő feszültség- és áramtekercsének szintén nem végtelen, illetve zérus ellenállása. Adott impedancia mérésekor célszerű a legjobb „sorrendben” bekötni a műszereket. Most ezt a hibát elhanyagoljuk, így a bekötés sorrendje nem számít.

Mivel:

$$P = UI \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

rögtön adódik, hogy:

$$|Z| = \frac{U}{I}, \quad \varphi = \arccos \frac{P}{UI} \quad (2)$$

(1 pont)

A helyettesítőkép elemeinek meghatározásához írjuk fel az impedanciát kétféleképpen:

$$Y = \frac{1}{R_p} + j\omega c = \frac{1}{|Z|} [\cos \varphi + j \sin \varphi] \quad (3)$$

A reciprokképzés miatt $j \sin \varphi$ előjele negatív lenne, de mivel az eljárás nem specifikálja a fázis előjelét, kapacitív impedanciát feltételezve, az admittanciához pozitív fázistolást rendelünk. Ebből:

$$R_p = \frac{1}{|Z|} \cos \varphi = \frac{U^2}{P}, \quad C = \frac{\sin \varphi}{|Z|\omega} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{I^2}{U^2} - \frac{P^2}{U^4}} \quad (4)$$

(1 pont)

A hibaszámítás az ismert módon végrehajtható, az érdekesség a végeredmény értékelése. Az egyszerűség kedvéért worst case hibaösszegzést alkalmazunk. A veszteségi ellenállás hibája:

$$\frac{\Delta R_p}{R_p} = \frac{\Delta P}{P} + 2 \frac{\Delta U}{U} \quad (5)$$

Az induktivitás hibájának összetevői:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta C}{C} \right|_U &= \frac{-U^2 I^2 + 2P^2}{U^2 I^2 - P^2} \frac{\Delta U}{U} \\ \left. \frac{\Delta C}{C} \right|_P &= -\frac{1}{\frac{U^2 I^2}{P^2} - 1} \frac{\Delta P}{P} = -\cot^2 \varphi \frac{\Delta P}{P} \\ \left. \frac{\Delta C}{C} \right|_I &= \frac{1}{1 - \frac{P^2}{U^2 I^2}} \frac{\Delta I}{I} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\Delta I}{I} \end{aligned} \quad (6)$$

Összegezve:

$$\frac{\Delta C}{C} = \left| \left. \frac{\Delta C}{C} \right|_U \right| + \left| \left. \frac{\Delta C}{C} \right|_P \right| + \left| \left. \frac{\Delta C}{C} \right|_I \right| \quad (7)$$

(2 pont)

A mérési eljárás nem specifikálja φ előjelét, ezért nem dönthető el, hogy az impedancia induktív vagy kapacitív. Matematikailag negatív $\cos \varphi$ is lehetséges, így összesen 4 lehetőség lenne, de passzív impedancia esetén $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, ezért csupán két lehetőség van.

(1 pont)

Érdemes visszatérni a (5) és (6) hibák elemzésére. Ha a reaktancia vesztesége kicsi, azaz $|\varphi| \rightarrow \pi/2$, (6) így alakul:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta C}{C} \right|_U &= -\frac{\Delta U}{U} \\ \left. \frac{\Delta C}{C} \right|_P &= 0 \\ \left. \frac{\Delta C}{C} \right|_I &= \frac{\Delta I}{I} \end{aligned} \quad (8)$$

A 3. egyenletben a szorzó azért egységnyi, mert $|\varphi| \rightarrow \pi/2$ esetén $P \rightarrow 0$. Ekkor C mérésének hibája:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} \quad (9)$$

Valóban, ha az impedancia tisztán induktív (vagy kapacitív), a teljes impedancia meghatározható U és I méréséből, tehát P hibája közömbös. Úgy tűnik viszont (5) alapján, hogy R_p hibája nem függ attól, hogy milyen jellegű az impedancia. Valójában a teljesítménymérők kis $\cos \varphi$ esetén nagy hibával mérnek, tehát nem tekinthető a hiba $\cos \varphi$ -tól függetlennek, és kis veszteségű esetben R hibája nagy lesz.

2. Az $f = 760$ Hz frekvenciájú szinuszos jel az első esetben nem vezérli túl a mintavételező rendszert, így szinuszos marad. A jel komplex spektrumában $f = \pm 760$ Hz-en vannak komponensek, mintavételezés után ez a komplexum ismétlődik, azaz a

$$kf_s \pm f, \quad k = -\infty \dots \infty \quad (10)$$

helyeken lesznek spektrumvonalak, ezekből a kijelölt tartományban lévőket kellett lerajzolni.

(1 pont)

A második esetben a rendszer túlvezérlődik, az eredmény egy „levágott tetejű” szinuszjel:

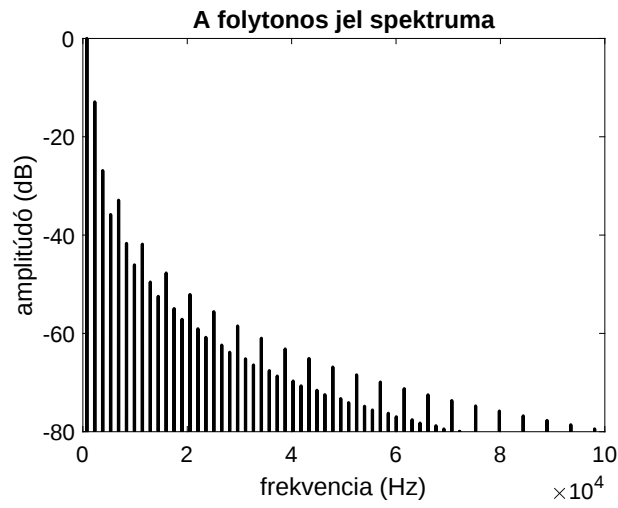
$$u_m(t) = \begin{cases} u(t), & \text{ha } |u(t)| \leq U_{\max} \\ U_{\max}, & \text{ha } u(t) > U_{\max} \\ -U_{\max}, & \text{ha } u(t) < -U_{\max} \end{cases} \quad (11)$$

Ennek spektrumával, illetve mintavételezésével kapcsolatban *jellegre* a következők állíthatók:

- a) A szinuszos jel felharmonikusai is megjelennek a jelben, végtelen számban, de egyre csökkenő amplitúdóval;
- b) a jel szimmetriája miatt csak a páratlan felharmonikusok fognak szerepelni;
- c) a mintavételezés során átlapolódás fog bekövetkezni, de a spektrum továbbra is diszkrét marad;
- d) két spektrumvonal közötti távolság f és f_s legnagyobb közös osztója lesz.

(2 pont)

A telítődő szinuszjel spektruma az alábbi ábrán látható:



A jobb láthatóság kedvéért a -80 dB alatti komponenseket nem ábrázoltuk. Ezt az ábrát diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) segítségével állítottuk elő, igen nagy mintavételi frekvenciát feltételezve. Ha ez nem áll rendelkezésre, vagy becslést akarunk adni a spektrum egyes komponenseire, abból indulhatunk ki, hogy a (11) egyenlettel adott jel jól közelíthető egy trapézjellel, amelynek periódusideje $T = 1/f$, valamint a konstans szakaszát a

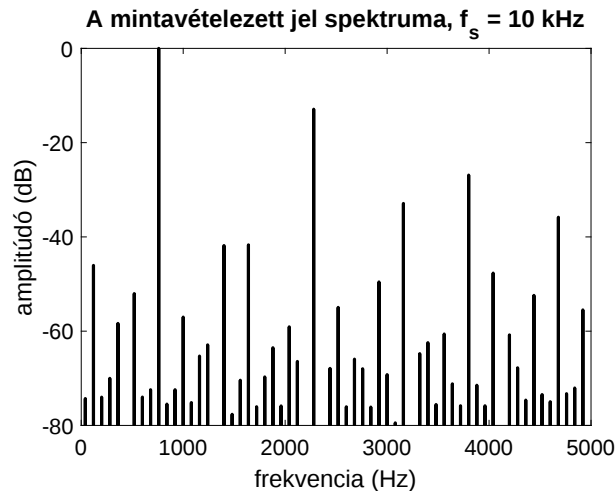
$$\tau = \varphi_0 \frac{T}{2\pi}, \quad \varphi_0 = \arcsin \frac{U_{\max}}{U_p} \quad (12)$$

helyen éri el. Ennek Fourier-sora az alábbi, amely tehát közelíti az eredeti jelet:

$$u_m(t) \approx \frac{4U_p}{\pi\varphi_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)\varphi_0) \sin((2n+1)\omega t) \quad (13)$$

Ha $\tau \rightarrow 0$, azaz a túlvezérlés igen jelentős, négyszögjelet kapunk, és a fenti Fourier-sor is kiadja a négyszögjel sorát.

A mintavételezés során ez a spektrum ismétlődik, és a Fourier-sor végtelen, az átlapolódás nyilvánvaló, de a megadott adatokkal még az is igaz, hogy nem hanyagolhatók el az átlapolódó komponensek. Mivel a mintavételi frekvencia és a jel frekvenciájának a legkisebb közös többszöröse $f_{\text{sup}} = 190000$ Hz, igen sok frekvencián jelenik meg komponens. A frekvenciavonalak távolsága, ha minden felharmonikus jelen van, a két frekvencia legnagyobb közös osztója, amely 10 kHz mintavételi frekvencia esetén 40 Hz. Mivel a telítődő jelben csak minden második felharmonikus van jelen, a vonalak távolsága ennek kétszerese, azaz 80 Hz. Az alábbi ábrán a 760 Hz-es telítődő szinuszjel 10 kHz-cel való mintavételezése utáni spektrumot láthatjuk, a $0 \dots f_s/2$ intervallumban:

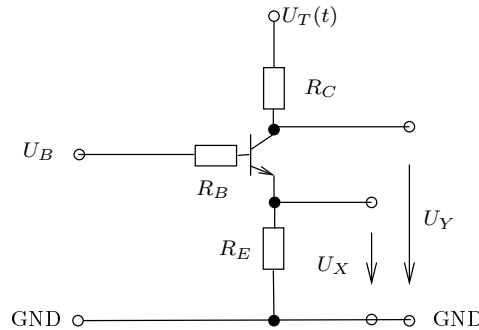


Jól látszik az alapharmonikus, valamint az első felharmonikusok, ezek amplitúdója a legnagyobb. Az összes komponens jelen van, de -80 dB-nél kisebb amplitúdójúak nem láthatók.

A mintavételi frekvencia meghatározásához a folytonos jel spektrumából indulhatunk ki. Egy lehetőség a fenti szimuláció elvégzésével meghatározni azt a frekvenciát, amely felett a felharmonikusok amplitúdója már -60 dB alatti (a spektrumot úgy normáltuk, hogy a maximális amplitúdó legyen 0 dB), és ennek kétszerese a mintavételi frekvencia. Ha becsülni akarjuk ezt a frekvenciát, akkor a (13) egyenletből indulhatunk ki. Eszerint a komponensek a frekvenciával négyzetesen csökkennek. A -60 dB $1/1000$ -et jelent, ennek a gyöke szükséges, ami a kb. 30. felharmonikust jelenti, amely $f_c = 22.8$ kHz-en van – és valóban, körülbelül itt csökkennek a komponensek -60 dB alá. Lehetséges a telítődő szinuszjelet négyszögjellel is becsülni, ekkor azonban az 1000. felharmonikusig el kellene menni, ami jelentős túlmintavételezéshez vezet.

(2 pont)

3. A tranzisztoros áramkör kapcsolási rajza az alábbi ábrán látható:



A generátorokat és az oszcilloszkópot nem tüntettük fel. A kapcsolási rajz annak figyelembevételével készült, hogy az oszcilloszkóp csatornáinak közös a földje. Kihasználjuk, hogy az oszcilloszkópról a vonalvastagságból adódóan csak százalék nagyságrendű pontossággal olvashatók le számértékek, azaz ennél pontosabb megjelenítés sem szükséges. Az I_C kollektoráram közelítőleg megegyezik az emitterárammal, az R_E ellenálláson eső U_X feszültség tehát közelítőleg arányos I_C -vel. Ha R_E kicsi, akkor $R_E \cdot I_E \ll U_{CE}$, azaz $U_Y \approx U_{CE}$. Ehhez a megoldáshoz R_E -t néhány ohm, esetleg 10 ohm nagyságrendűre kell választani. A rajta eső 10 mV körüli feszültség az oszcilloszkópon jól megjeleníthető.

(2 pont)

(Ha közvetlenül az R_C -n eső feszültséget kapcsoljuk az oszcilloszkópra, akkor rövidre zárjuk a tranzisztort, az áramkör nem működik. Egy lehetőség a tranzisztor kollektorát földelni, ennek a megoldásnak az a hátránya, hogy a vízszintes tengely „megfordul”).

A kapcsolás többi elemét a tranzisztoros kapcsolások szokásos értékeire kell választani. Az áramkorlátozó szerepű R_C -t néhányszor 10 kiloohmra, R_B -t ennél kissé nagyobbra, 100 kiloohm nagyságrendűre kell választani.

A bázisáramot meghatározó U_B egyenfeszültséget tápegység állítja elő. Annak érdekében, hogy a bázisáram kellően finoman állítható legyen, állítható tápegység és nagy R_B szükséges.

A megjelenítendő kollektoráram miatt $U_T(t)$ -nek be kell járnia a teljes normál aktív üzemmódra jellemző tartományt. Az oszcilloszkópos megjelenítés miatt adódik a fűrészjel, ennek azonban az ugrás miatt jelentős a felharmonikustartalma, ezért inkább szimmetrikus háromszögjelet érdemes választani. Ezzel a választással (analóg oszcilloszkópot feltételezve) a fényerő is egyenletes lesz a görbe mentén. Ha $U_T(t)$ szinuszos, a felharmonikusok még kevesebb problémát okoznak, ugyanakkor a fényerő nem lesz egyenletes, hiszen a szinuszjel sűrűségfüggvénye nem egyenletes.

Az $U_T(t)$ jel frekvenciája elegendően nagy kell legyen ahhoz, hogy ne „villogjon” a megjelenített ábra, ugyanakkor elég kicsinek kell lennie, hogy a tranzisztor különféle kapacitásai miatt a görbe ne legyen tranziensekkel terhelt. A különféle irányokban bejárt görbe nagyfrekvencián nem azonos, ezért „hurkok” jelennek meg a képernyőn. Mindezeket figyelembe véve, átlagos tranzisztor esetében kilohertz nagyságrendű gerjesztést érdemes

alkalmazni.

(2 pont)

Ha az $I_C - U_{CE}$ görbesereg több elemét is meg akarjuk jeleníteni, U_B -t is modulálni kell. Könnyen hozzáférhető eszközökkel az oldható meg, hogy kis amplitúdójú négyszögjel és egyenfeszültség összegét kapcsoljuk a bázisra. A négyszögjel frekvenciája legyen kisebb, mint az $U_T(t)$ háromszögjel frekvenciája. Ekkor két görbe jeleníthető meg.