

Spektrumanalízis, Diszkrét Fourier-transzformáció

Méréstechnika előadás

Sujbert László

2020. május 20.

Spektrumanalizátorok

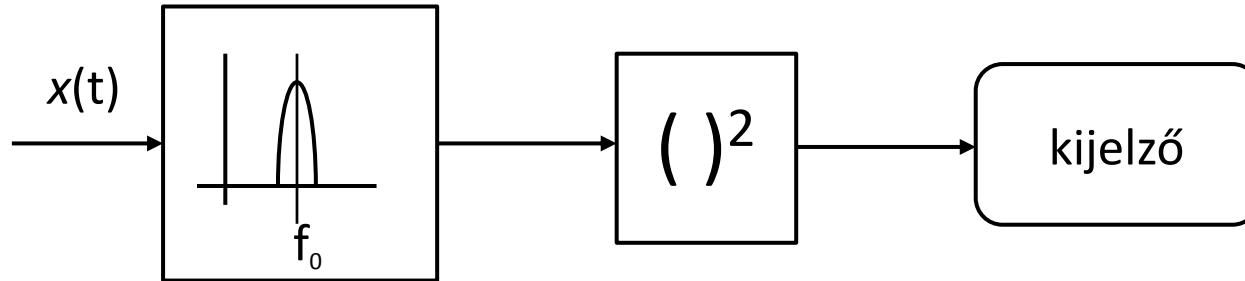
■ Fourier-transzformált (Fourier-sor) mérése

- Valós értékű spektrum
 - Spektrumanalizátorok általában ezt mérik
 - abszolút érték, teljesítmény, effektív érték
- Komplex értékű spektrum
 - Ritkábban fordul elő, pl. hálózatanalizátorokban (átviteli karakterisztika mérése)
 - valós spektrum (lásd fent) + fázis

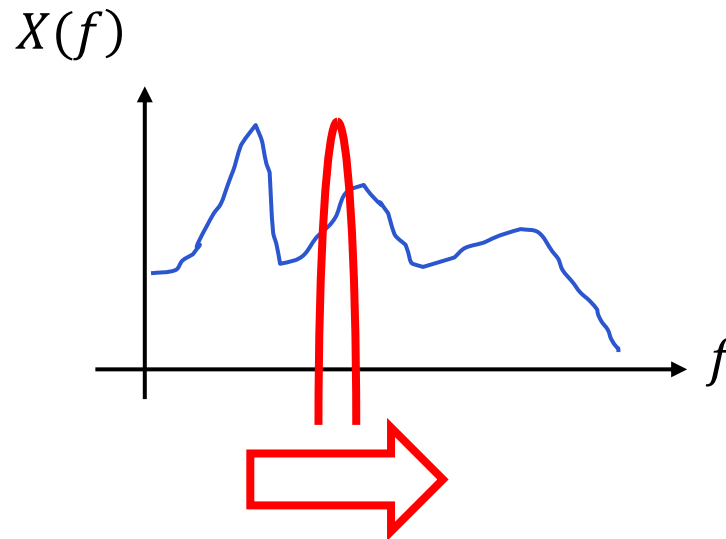
■ Típusok

- soros (hangolt szűrős, letapogató)
- párhuzamos (fix szűrőkkel)
- heterodin
- DFT

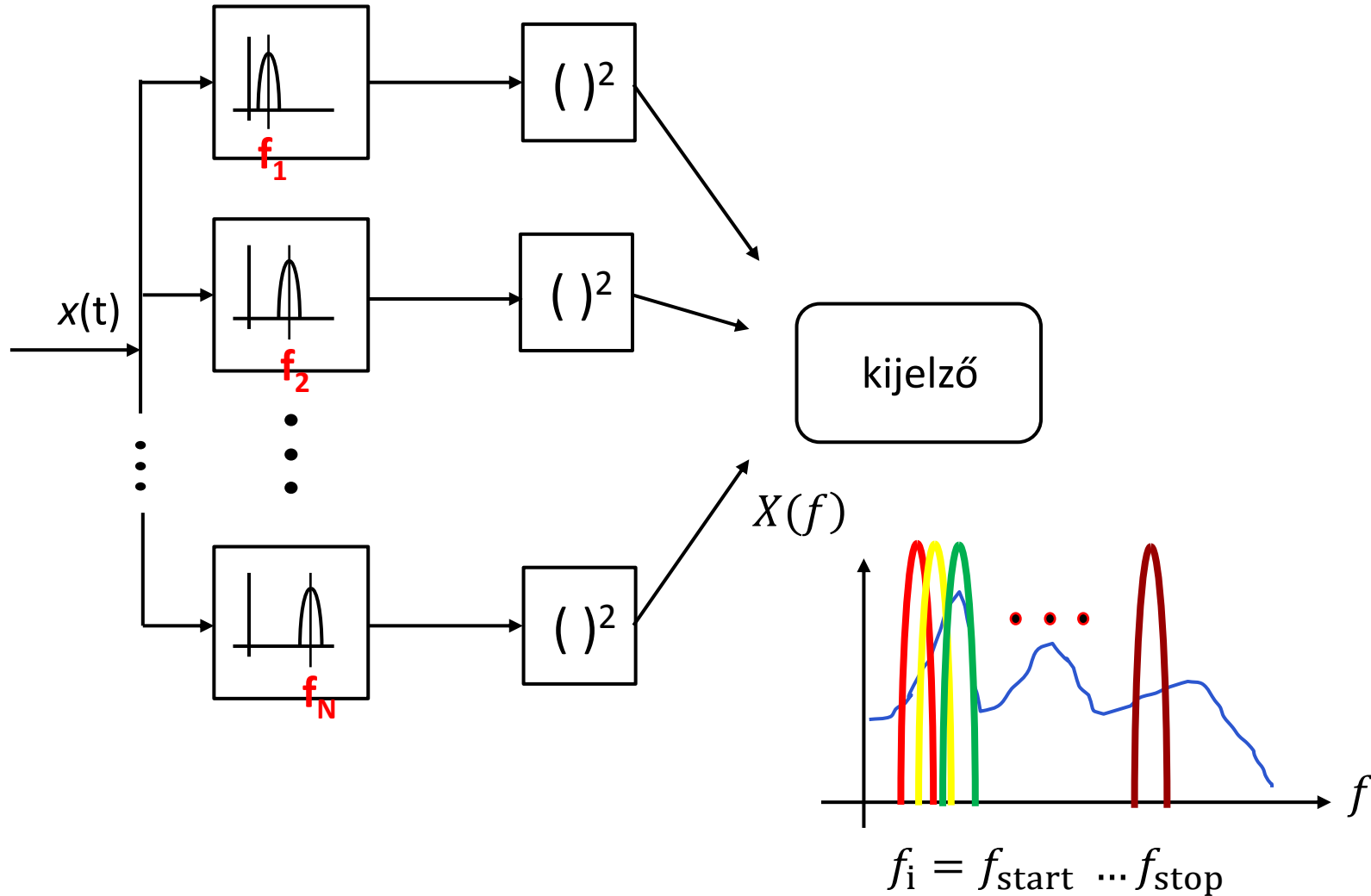
Hangolt szűrő analízátor



$$f_0 = f_{\text{start}} \cdots f_{\text{stop}}$$



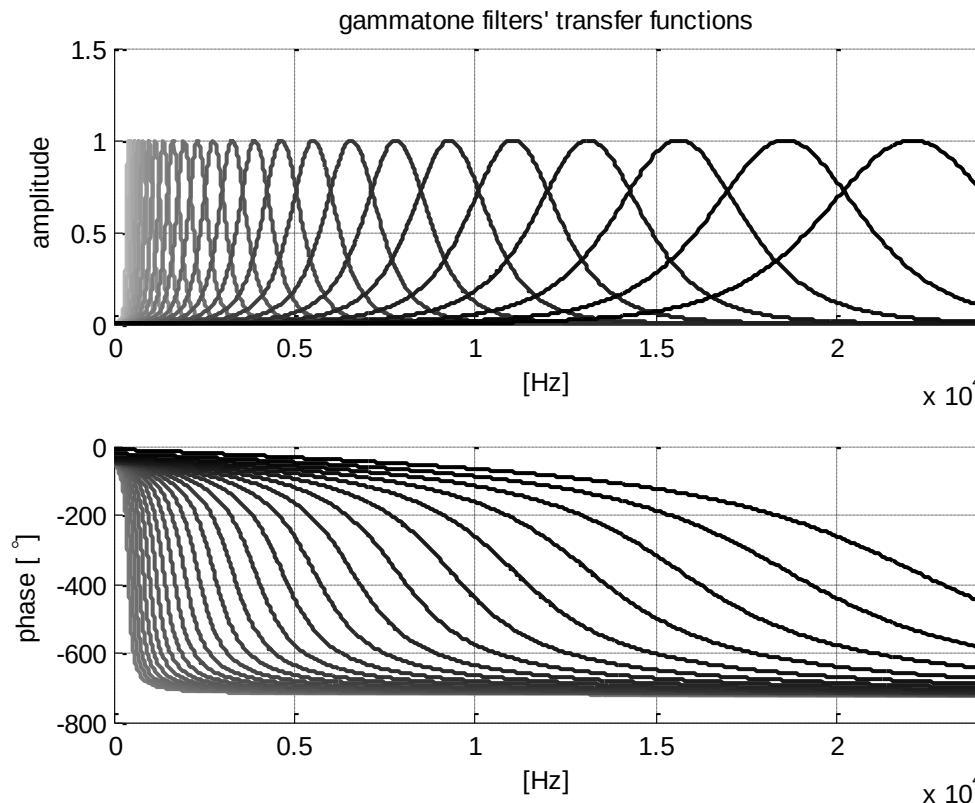
Párhuzamos analízátor



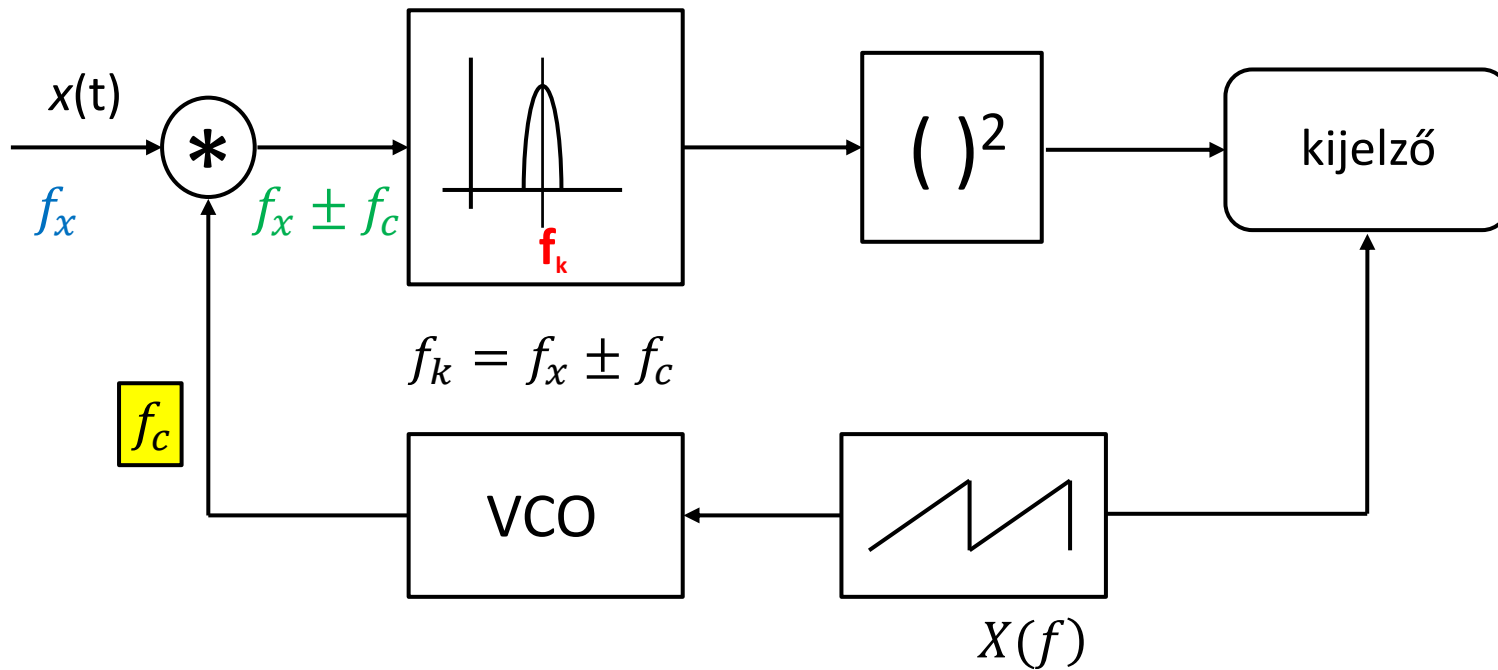
Példák párhuzamos analízatorra

■ Akusztikus mérések

- 1/3-, 1/12-oktáv analízis – sávszűrő bank
- Hangjelek osztályozása – gammatone szűrőbank



Heterodin analizátor

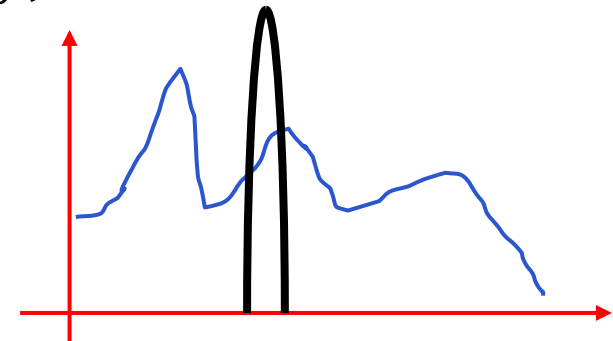


VCO: Voltage Controlled Oscillator
– Feszültségvezérelt oszcillátor

Pl.: $f_c = 100 \dots 150 \text{ kHz}$

$f_x = 0 \dots 50 \text{ kHz}$

$f_k = 100 \text{ kHz}$



Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad x(n) \text{ transzformálandó jel (vektor)}$$

$$n, k = 0 \dots N - 1 \quad X(k) \text{ spektrum (vektor)}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{N}0k} \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}1k} \\ \vdots \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-2)k} \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

A transzformáció mátrixa

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad x(n) \text{ transzformálandó jel (vektor)}$$

$$n, k = 0 \dots N - 1 \quad X(k) \text{ spektrum (vektor)}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{N}00} & e^{-j\frac{2\pi}{N}10} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)0} \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}01} & e^{-j\frac{2\pi}{N}11} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)1} \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

A transzformáció mátrixa

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad x(n) \text{ transzformálandó jel (vektor)}$$

$$n, k = 0 \dots N - 1 \quad X(k) \text{ spektrum (vektor)}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}1} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Konstans transzformáltja

transzformálandó jel (vektor): $x(n) = 1, \quad n = 0 \dots N - 1$

$$\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Konstans transzformáltja

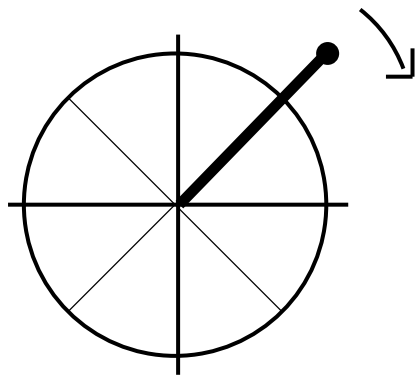
transzformálandó jel (vektor): $x(n) = 1, \quad n = 0 \dots N - 1$

$$\begin{bmatrix} N \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Konstans transzformáltja

transzformálandó jel (vektor): $x(n) = 1, \quad n = 0 \dots N - 1$

$$\begin{bmatrix} N \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



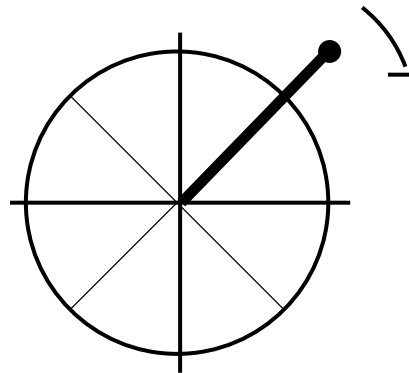
$$e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$(N = 8)$$

Konstans transzformáltja

transzformálandó jel (vektor): $x(n) = 1, \quad n = 0 \dots N - 1$

$$\begin{bmatrix} N \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



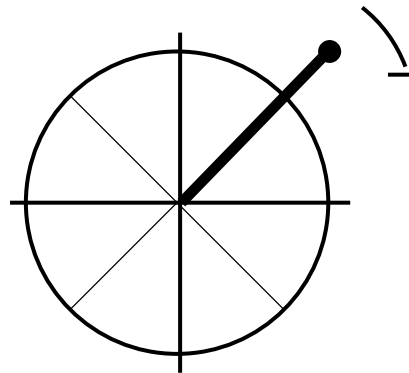
$$e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$(N = 8)$$

Konstans transzformáltja

transzformálandó jel (vektor): $x(n) = 1, \quad n = 0 \dots N - 1$

$$\begin{bmatrix} N \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



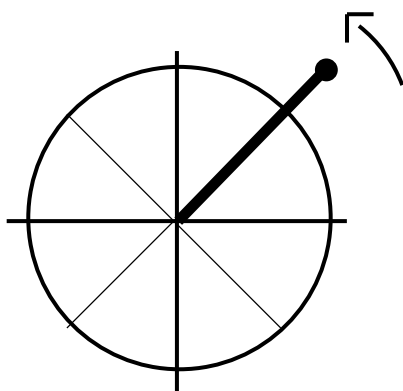
$$e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$(N = 8)$$

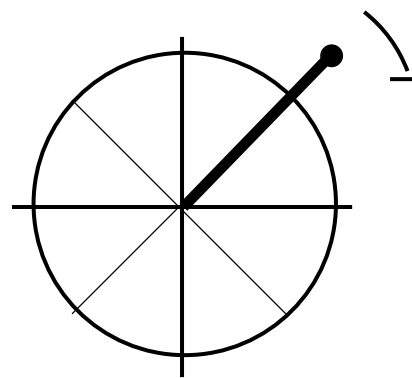
Komplex exponenciális transzformáltja

transzformálandó jel (vektor): $x(n) = e^{+j\frac{2\pi}{N}n}$, $n = 0 \dots N - 1$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{+j\frac{2\pi}{N}} \\ \vdots \\ e^{+j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix}$$



$$e^{+j\frac{2\pi}{N}n}$$



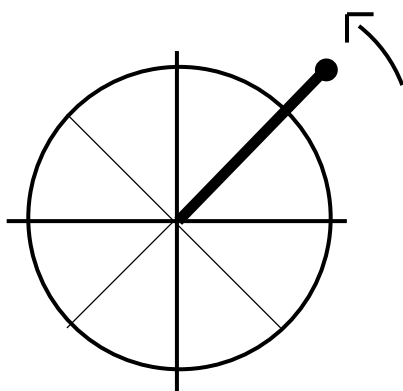
$$e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$(N = 8)$$

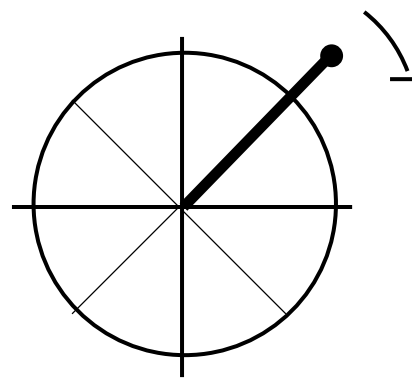
Komplex exponenciális transzformáltja

transzformálandó jel (vektor): $x(n) = e^{+j\frac{2\pi}{N}n}$, $n = 0 \dots N - 1$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{+j\frac{2\pi}{N}} \\ \vdots \\ e^{+j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix}$$



$$e^{+j\frac{2\pi}{N}n}$$



$$e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$(N = 8)$$

Komplex exponenciális transzformáltja

transzformálandó jel (vektor): $x(n) = e^{+j\frac{2\pi}{N}n\mathbf{k}}$, $n = 0 \dots N - 1$

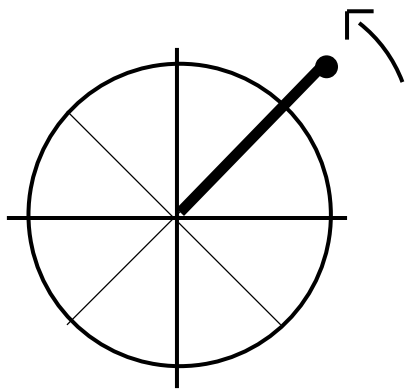
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \dots & \\ & & & \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}1\mathbf{k}} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)\mathbf{k}} \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{+j\frac{2\pi}{N}1\mathbf{k}} \\ \vdots \\ e^{+j\frac{2\pi}{N}(N-1)\mathbf{k}} \end{bmatrix}$$

Koherens mintavétel: N a periódus egész számú többszöröse

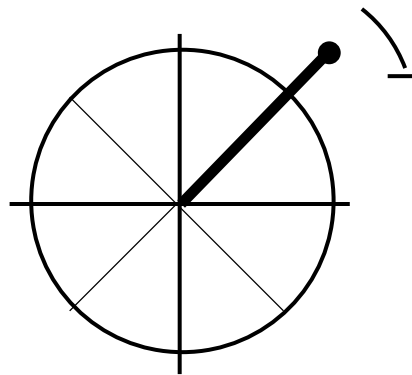
Szinuszos jel transzformáltja

transzformálandó jel: $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) = \frac{1}{2}e^{+j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}, n = 0 \dots N-1$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ N/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}1} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{+j\frac{2\pi}{N}1} & \dots & e^{+j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}e^{+j\frac{2\pi}{N}1} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}e^{+j\frac{2\pi}{N}(N-1)} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \end{bmatrix}$$



$$e^{+j\frac{2\pi}{N}n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}$$



$$e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = e^{+j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}$$

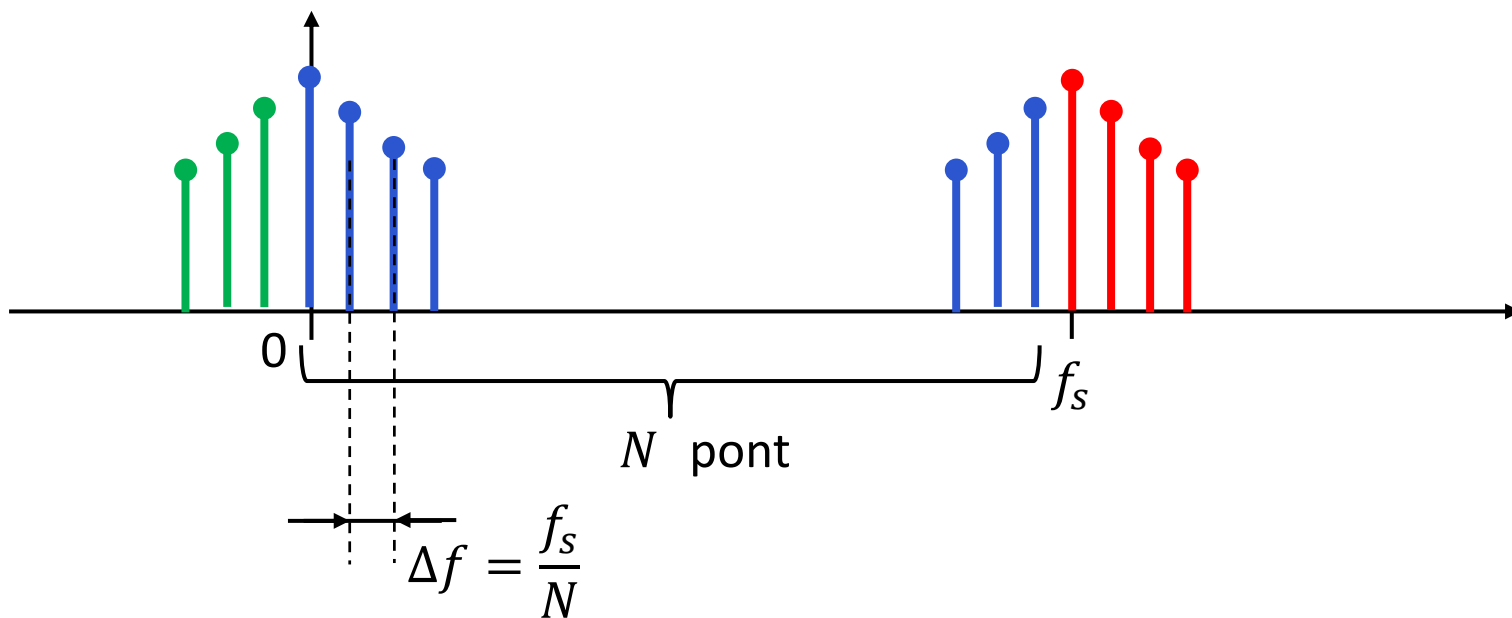
$$(N = 8)$$

A spektrum értelmezése

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad x(n) = x(n\Delta t) = x\left(n \frac{1}{f_s}\right), \quad n = 0 \dots N-1$$

$n, k = 0 \dots N-1$ $X(k)$ spektrum (vektor)

f_s mintavételi frekvencia



Nemkoherens mintavételezés

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad x(n) = x(n\Delta t) = x\left(n\frac{1}{f_s}\right), \quad n = 0 \dots N-1$$

$n, k = 0 \dots N-1$ $X(k)$ spektrum (vektor)

Koherens mintavétel: N a periódus egész számú többszöröse

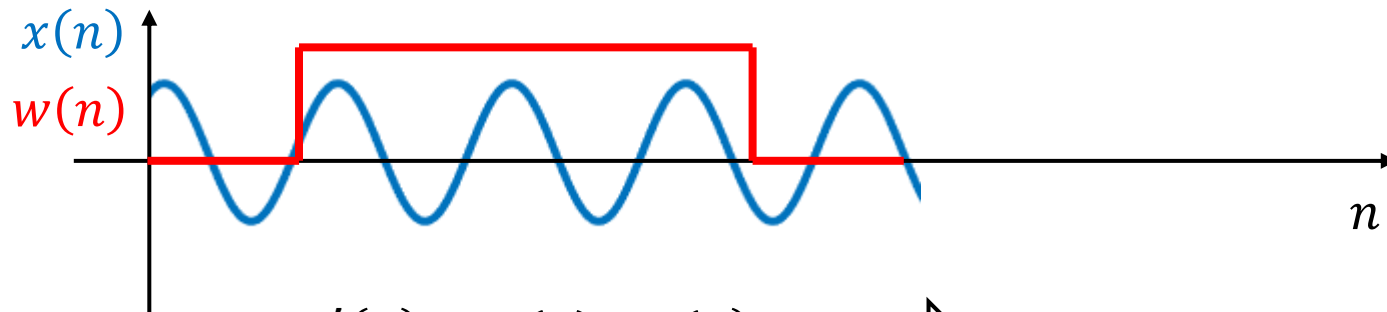
$$f_s \text{ mintavételi frekvencia} \quad \Longrightarrow \quad f_x = k \frac{f_s}{N}$$

Nemkoherens mintavétel: N a periódus nem egész számú többszöröse:

$$f_x \neq k \frac{f_s}{N}$$

Nemkoherens mintavételezés modellezése

Nemkoherens mintavétel: N minta kivágása a jelből négyzetablakkal

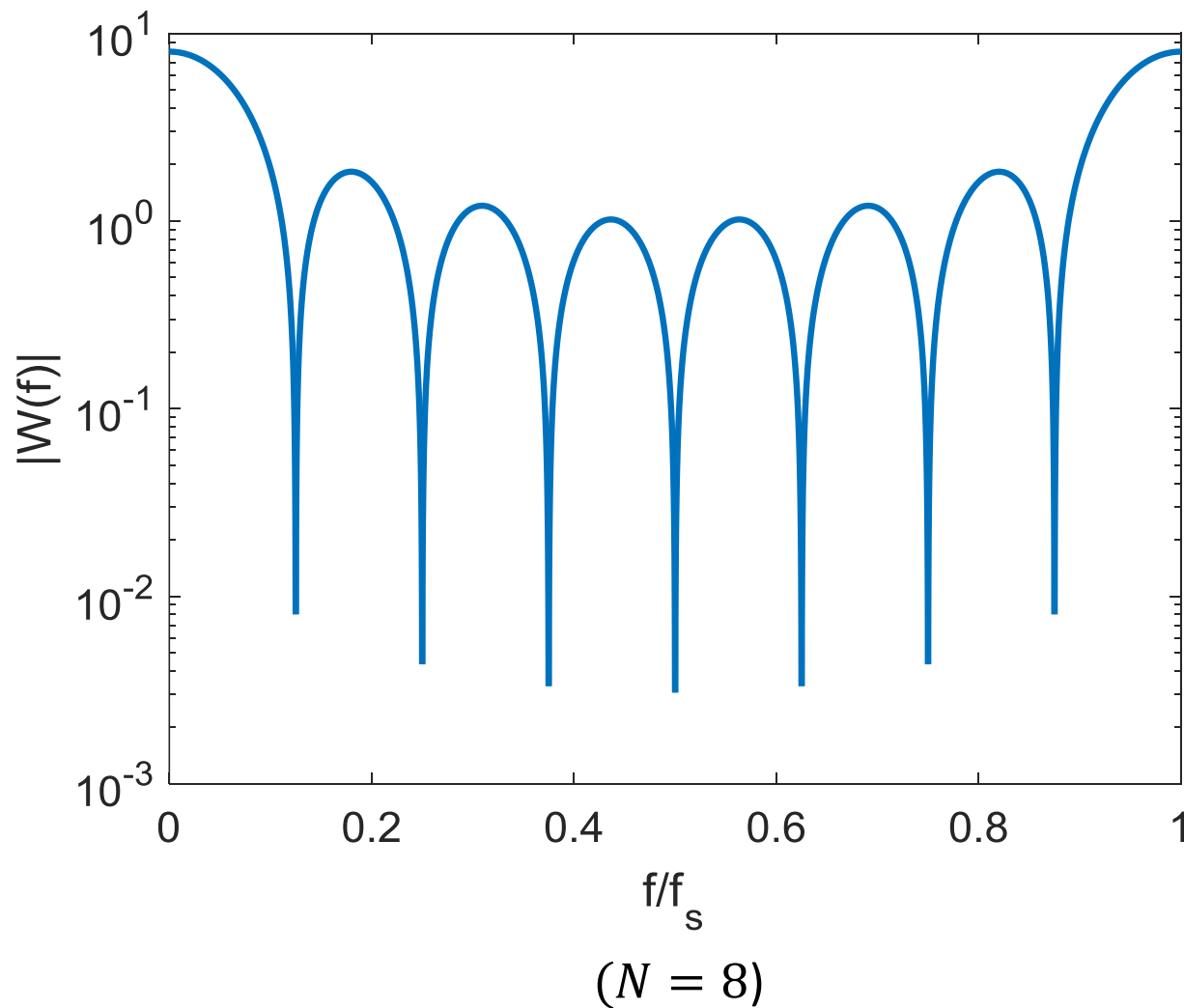


$$x'(n) = x(n) \cdot w(n) \quad \Rightarrow \quad X'(f) = X(f) * W(f)$$

$$w(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0 \dots N - 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

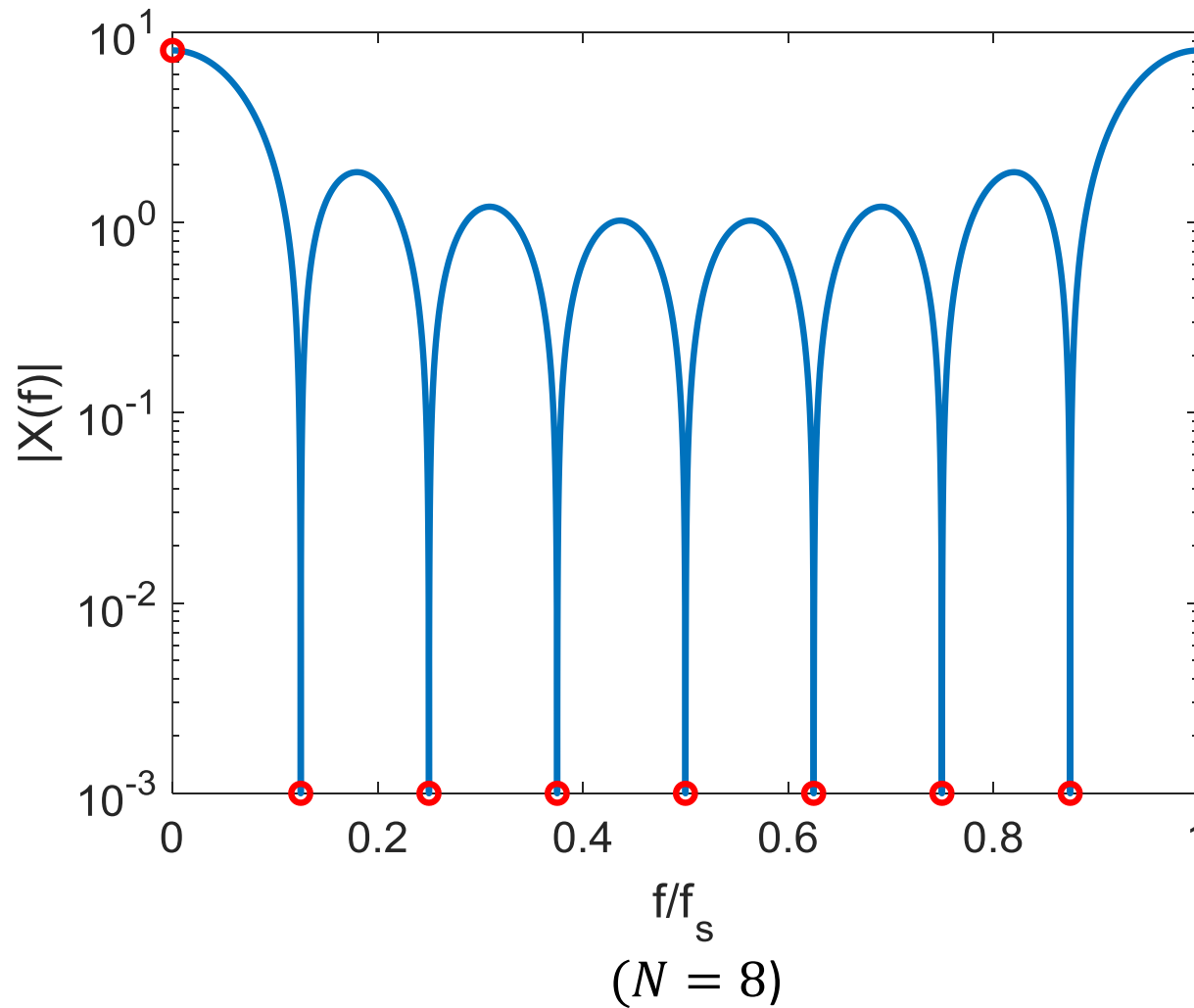
$$W(f) = \frac{\sin(N\pi f / f_s)}{N \sin(\pi f / f_s)}$$

Négyszögablak spektruma

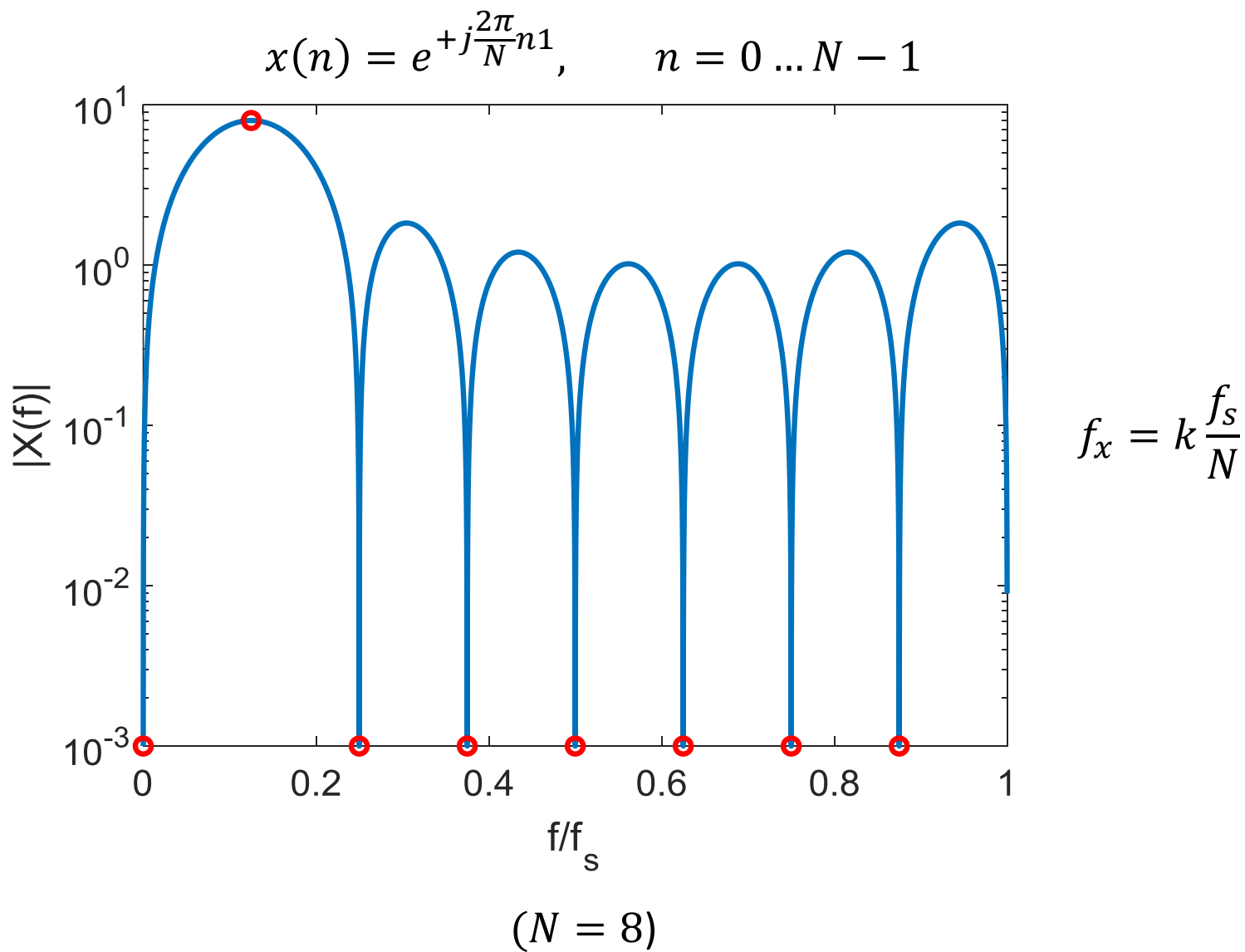


Konstans DFT-je

$$x(n) = 1, \quad n = 0 \dots N - 1$$

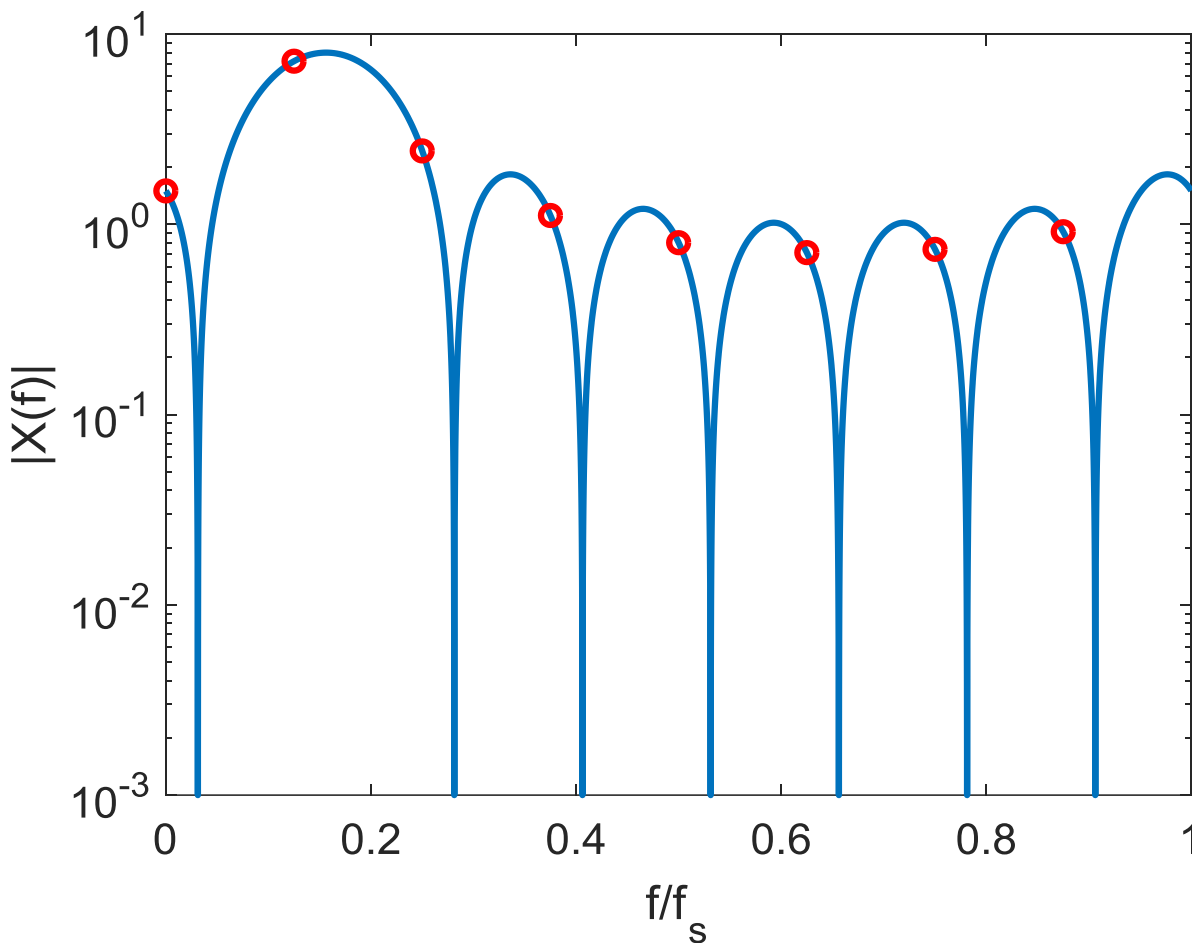


Koherens jel DFT-je



Nemkoherens jel DFT-je

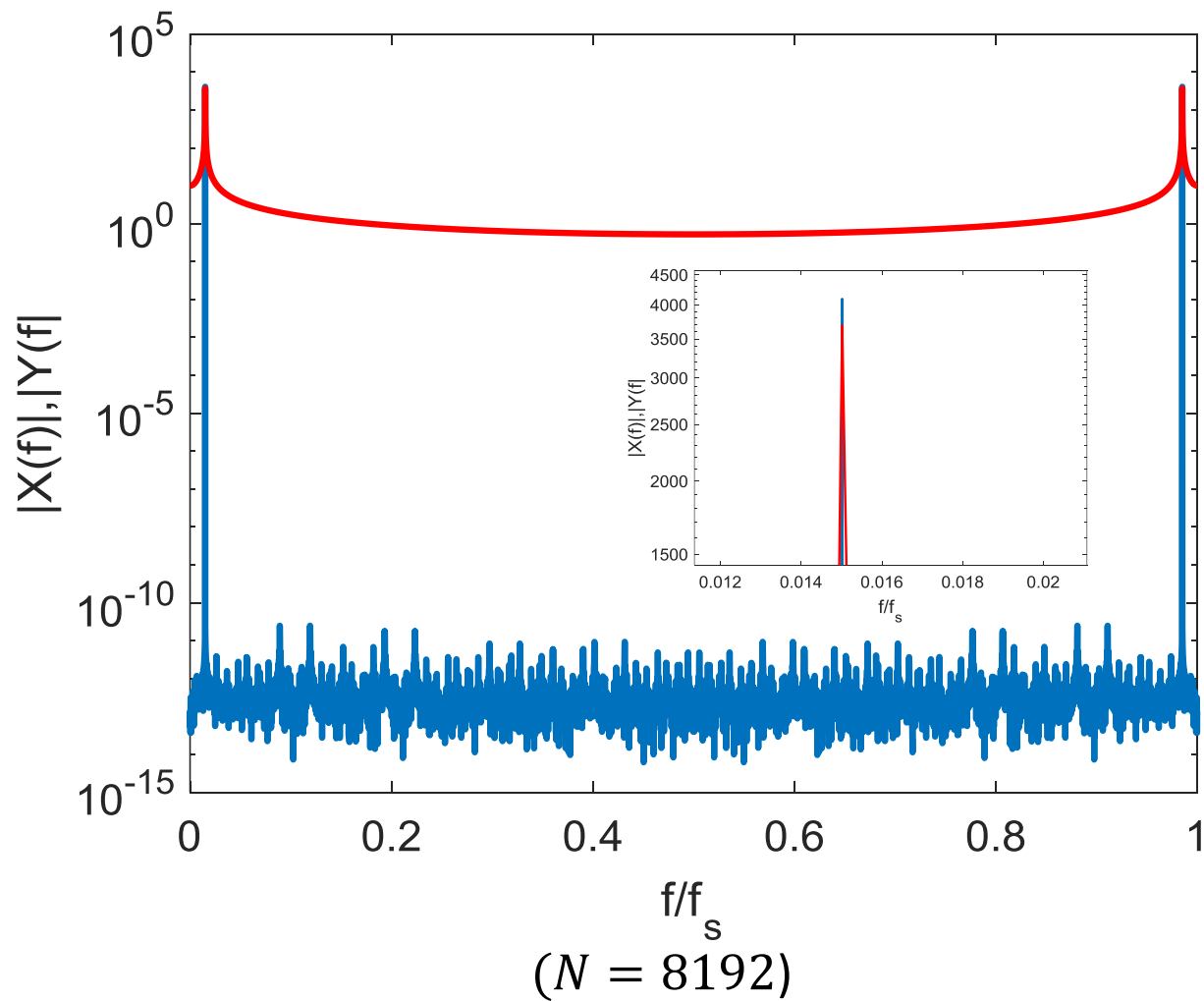
$$x(n) = e^{+j\frac{2\pi}{N}n1.25}, \quad n = 0 \dots N - 1$$



$$f_x \neq k \frac{f_s}{N}$$

$(N = 8)$

Szokásos pontszám esetén



$$f_x = k \frac{f_s}{N}$$

$$f_x \neq k \frac{f_s}{N}$$

Nemkoherens jel DFT-je

■ Káros mellékhatások

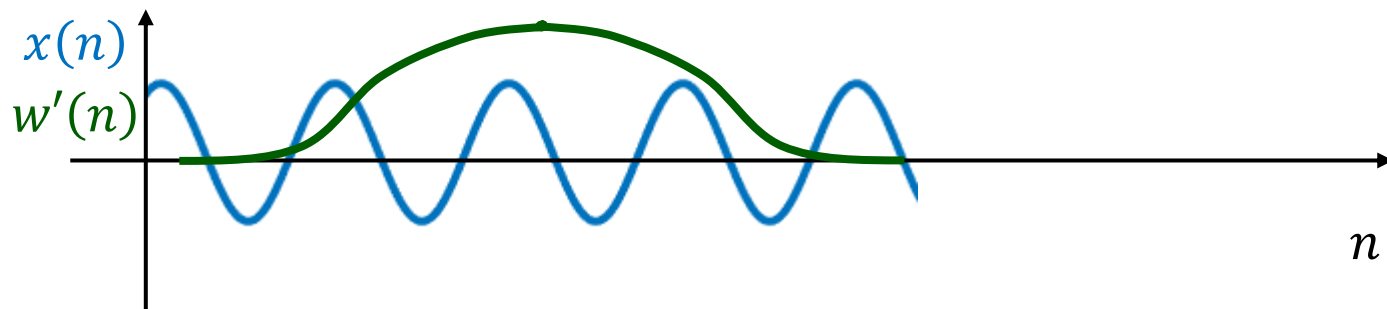
- összes spektrumvonal „megszólal”: szivárgás, leakage
- Amplitúdó nem mérhető pontosan: tetőesés, picket fence

■ Védekezés:

- szinkronizált mérések
- DFT pontszámának növelése ritkán megoldás!
- Nem négyszög alakú ablakfüggvények alkalmazása, „ablakozás”

Ablakozás

Nemkoherens mintavétel: N minta kivágása a jelből speciális ablakfüggvénnyel



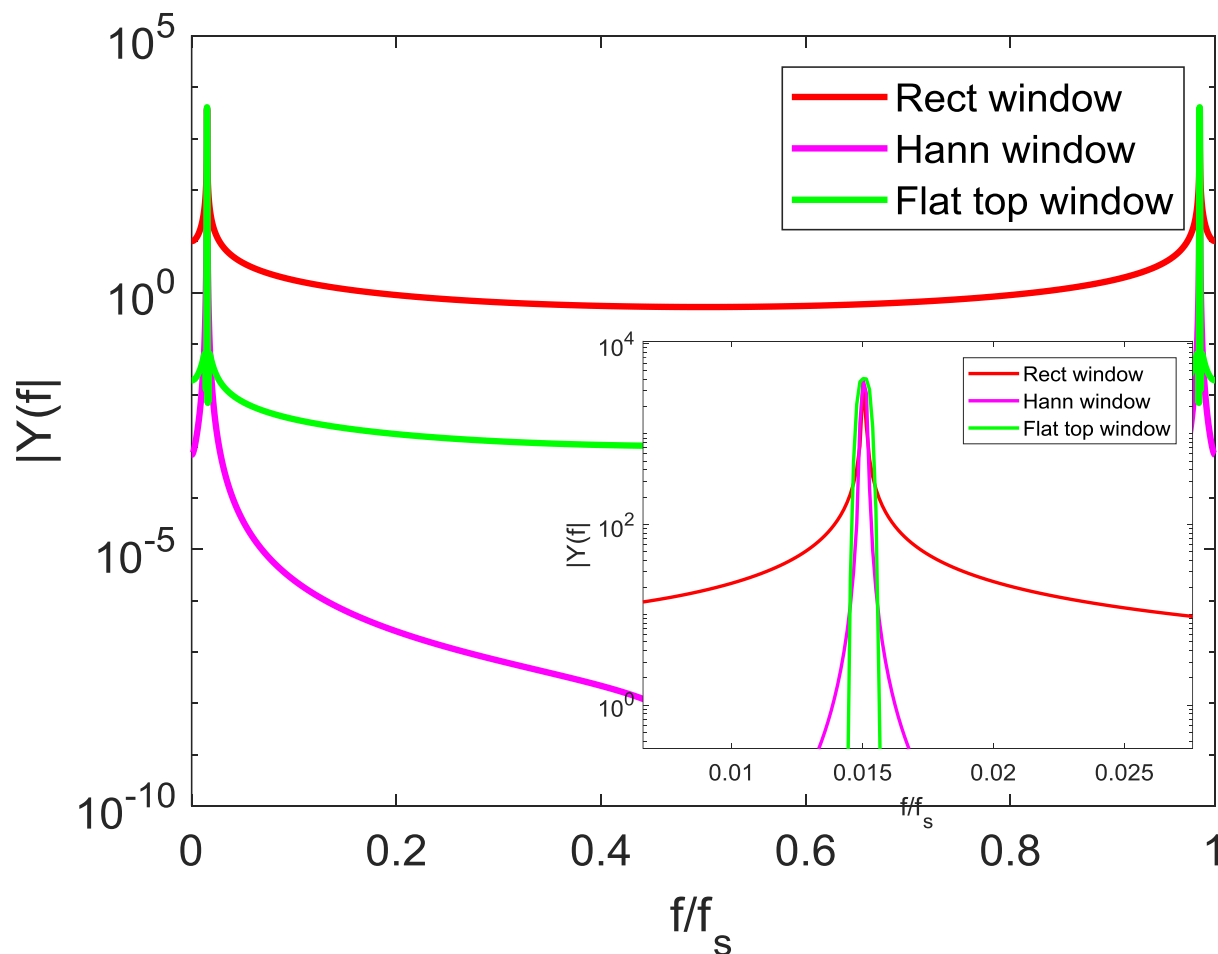
$$x''(n) = x(n) \cdot w(n) \quad \Rightarrow \quad X''(f) = X(f) * W'(f)$$

$w'(n)$ alakja, átviteli karakterisztikája tervezési feladat

■ Szokásos ablakfüggvények:

- Hanning- (von Hann) ablak $\Rightarrow w'(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi}{N} n \right) \right], n = 0 \dots N - 1$
- Hamming-, Kaiser-ablak, ...
- Gauss-ablak
- Flat-top ablak

Szokásos pontszám esetén



$$f_x \neq k \frac{f_s}{N}$$

$(N = 8192)$