Méréstechnika házi feladat 4. Megoldás

2020. tavasz

1. A kerékpár sebességét a műszer az alábbi egyszerű módszerrel becsli:

$$\hat{v} = \frac{s}{t} \tag{1}$$

ahol s a megtett út, amelyet a számlált fordulatok és a kerékátmérő alapján határozhatunk meg; t pedig az ennek megtételéhez szükséges idő. Amennyiben csak az időmérés lehet hibás, a véletlen komponensekre igaz, hogy:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta t}{t} \tag{2}$$

Zavarmentes esetben az időmérés hibája a kvantálási hibával egyezik meg. A mérendő időtartam:

$$t_{\text{névl}} = \frac{Kd\pi}{v_{\text{névl}}} = 0.7464 \text{ sec} \tag{3}$$

A sebességmérés hibája tehát:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{N} = \frac{1}{t_{\text{névl}} f_0} \cong 67 \text{ ppm} \tag{4}$$

(1 pont)

A jeladó működésének bizonytalansága két megközelítéssel is figyelembe vehető. Tekinthetjük úgy, hogy a megtett utat továbbra is pontosan ismerjük, de az időmérés triggerelési hibával terhelt. Egy másik megközelítés szerint a jeladó által adott triggerimpulzusokat pontosan számláljuk és mérjük, de a megtett utat nem ismerjük pontosan. Ez utóbbi megközelítéssel a megtett út hibája:

$$\Delta s = 2\frac{\Delta\varphi}{2\pi} d\pi \tag{5}$$

mivel a hiba mind a mérés elején, mind a mérés végén felléphet. Az út relatív hibája:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\Delta\varphi}{K\pi} = 1.852 \cdot 10^{-3} \tag{6}$$

Az időmérés hibája változatlannak tekinthető, mert a mért időtartam lényegében megegyezik a fentivel, ezért a hibaszámításhoz N korábbi értéke felhasználható. Így a sebességmérés hibája:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta\varphi}{K\pi} + \frac{1}{t_{\text{névl}} f_0} = 1.919 \cdot 10^{-3} \approx 0.2\% \tag{7}$$

(1 pont)

A kvantálási hiba a teljes mérési idő alatt beszámlált órajelimpulzusok számától függ, ezért lényegtelen, hogy hány jeladó van elhelyezve a keréken, tehát a mérési hiba 4 jeladó felszerelése esetén nem változik meg.
(1 pont)

Az állandó kapuidejű mérés esetén mind a mért időtartam, mind a megtett út különbözik, ezért mindkét hibakomponens változik. A mérési idő előre adott, $t_m = 2$ sec, a megtett út pedig egyszerűen a

$$s = t_m v_{\text{névl}} \tag{8}$$

képlettel becsülhető. A pontos megtett út állandó kapuidejű mérés esetén különbözik, mert egész számú periódust mér a műszer, de a fenti képlet hibabecslésre alkalmas. Az időmérés hibája a kvantálási hiba, az út mérésének abszolút hibája most is az (5) képlettel számítható, így a sebességmérés eredő hibája:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta\varphi d}{t_m v_{\text{névl}}} + \frac{1}{t_m f_0} = 7.162 \cdot 10^{-4} \approx 0.07\% \tag{9}$$

(2 pont)

2. Az AD-átalakító által szolgáltatott minta felírható a következőképpen:

$$U_{m,i} = U_i + \Delta U_i \tag{10}$$

ahol ΔU_i a kvantálási hiba. Ezzel az effektív érték becslője:

$$U_m = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(U_i + \Delta U_i\right)^2} \tag{11}$$

(1 pont)

Worst case hibaösszegzés esetén írható a (11) egyenlet következő közelítése:

$$U_m \cong \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(U_i^2 + 2U_i\Delta U_i)} \tag{12}$$

A közelítés során kihasználtuk, hogy ΔU_i^2 elhanyagolható. A gyökjel alatti összeg első tagja a valódi effektív érték négyzete, a második a hibatag, amely szintén egy szumma. A worst case hibaösszegzés azt jelenti, hogy minden tagot pozitív előjellel veszünk figyelembe, továbbá, hogy a kvantálási hiba minden esetben a kvantálási lépcső felével egyezik meg (kerekítést feltételezve), azaz:

$$\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}U_i\Delta U_i = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}|U_i|\Delta U = 2\bar{U}\Delta U \tag{13}$$

ahol $\bar{U}$ a mintavételezett jel abszolút középértéke. Így a (12) egyenletbe behelyettesítve:

$$U_m = \sqrt{U^2 + 2\bar{U}\Delta U} \tag{14}$$

A hiba kiszámításához írjuk fel először a négyzet hibáját:

$$U_m^2 - U^2 = 2\bar{U}\Delta U \tag{15}$$

majd a két négyzet különbségét írjuk fel szorzatalakban:

$$\begin{aligned}(U_m + U)(U_m - U) &= 2\bar{U}\Delta U \\ 2U(U_m - U) &\cong 2\bar{U}\Delta U \\ U_m - U &\cong \frac{\bar{U}}{U}\Delta U = \frac{\Delta U}{k_f}\end{aligned} \tag{16}$$

ahol k_f a formatényező. A teljes megoldáshoz meg kell még határozni ΔU nagyságát:

$$\Delta U = \frac{q}{2} = \frac{\mathrm{FS}}{2^{b+1}} = 1.953 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V} \tag{17}$$

A relatív hiba tehát:

$$h_1 = \frac{U_m - U}{U} = \frac{\Delta U}{Uk_f} = 2.926 \cdot 10^{-3} \approx 0.3\% \tag{18}$$

(2 pont)

Az effektív érték becslője a valószínűségi összegzéshez:

$$U_m = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(U_i + \Delta U_i\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(U_i^2 + 2U_i\Delta U_i + \Delta U_i^2)} \tag{19}$$

A gyökjel alatti összeg első tagja a valódi effektív érték négyzete, a második és a harmadik hibatag, ezeket külön vizsgálhatjuk. Az első tag esetében most nem alkalmazzuk a worst case megfontolást, így:

$$\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i \Delta U_i = 2U_0 \Delta U \to 0 \tag{20}$$

ahol U_0 az egyszerű középérték. A második tag a következőképpen írható:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Delta U_i^2 = \Delta U^2 \tag{21}$$

mivel állandó ΔU-t feltételezve az összegzés éppen N tagot tartalmaz. Mivel ez éppen a kvantálásoknál fellépő hiba négyzete, ez egyben a valószínűségi hibaösszeg is. Így a fent bemutatott gondolatmenettel:

$$U_m = \sqrt{U^2 + \Delta U^2} \tag{22}$$

a négyzet hibája:

$$U_m^2 - U^2 = \Delta U^2 \tag{23}$$

Az effektív érték hibájának kifejezése pedig:

$$U_m - U \cong \frac{\Delta U^2}{2U} \tag{24}$$

A relatív hiba tehát:

$$h_2 = \frac{U_m - U}{U} = \frac{\Delta U^2}{2U^2} = 5.280 \cdot 10^{-6} \approx 5.3 \text{ ppm} \tag{25}$$

ahol ΔU ismét a kvantálási lépcső fele.
(1 pont)

A kvantálási zaj varianciája, illetve effektívérték-négyzete:

$$U_k^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{\Delta U^2}{3} \tag{26}$$

Ismét a fenti gondolatmenetet alkalmazva:

$$U_m = \sqrt{U^2 + U_k^2} \tag{27}$$

a négyzet hibája:

$$U_m^2 - U^2 = \Delta U_k^2 \tag{28}$$

Az effektív érték hibájának kifejezése pedig:

$$U_m - U \cong \frac{U_k^2}{2U} \tag{29}$$

A relatív hiba tehát:

$$h_3 = \frac{U_m - U}{U} = \frac{U_k^2}{2U^2} = \frac{\Delta U^2}{3 \cdot 2U^2} = 1.760 \cdot 10^{-6} \approx 1.8 \text{ ppm} \tag{30}$$

ahol ΔU ismét a kvantálási lépcső fele.
(1 pont)

Megjegyzés. A valószínűségi összegzéssel kapott hiba nagyságrendileg megegyezik a kvantálás zajmodellje által adott értékkel, de nagyobb, mert nem a kvantálási zaj effektív értékét tartalmazza. Mivel a kvantálási zaj eloszlása egyenletes, a szórás, azaz az effektív érték a kvantálási lépcső $\sqrt{12}$-ed része. A valószínűségi összegzés azonban nem foglalkozik az eloszlással, a hibaintervallumból indul ki.