

Méréstechnika házi feladat 3. Megoldás

2019. ősz

1. Az eredeti definíció a következő:

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (1)$$

A továbbiakban hagyjuk el a gyökjelet, mivel a példában javasolt számítási mód ezt a műveletet nem befolyásolja. Ez esetben az alábbi közelítés jogossága, illetve az egyenlőség vizsgálata kérdéses:

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \approx \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^2(k\Delta t) \quad (2)$$

ahol $N = 200$ a minták száma, $\Delta t = 1/f_s$ a mintavételi időköz, $f_s = 10$ kHz. Közelítsük az integrált téglányösszeggel:

$$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \approx \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} x^2(k\Delta t) \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^2(k\Delta t) \quad (3)$$

A példában vázolt eljárás tehát az integrált téglányösszeggel közelíti. A példában adott jel időfüggvénye és mintavételezett értékei:

$$x(t) = A \sin(2\pi f_x t), \quad x(k\Delta t) = A \sin(2\pi f_x k\Delta t) \quad (4)$$

A négyzetre emelt minták:

$$x^2(k\Delta t) = A^2 \sin^2(2\pi f_x k\Delta t) = \frac{A^2}{2} (1 - \cos(2 \cdot 2\pi f_x k\Delta t)) \quad (5)$$

Ezt a (3) egyenletbe helyettesítve és a tagokat csoportosítva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^2(k\Delta t) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^2}{2} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^2}{2} \cos(2 \cdot 2\pi f_x k\Delta t) \right] \quad (6)$$

Az összeg második tagja zérus, ugyanis a szinuszfüggvény argumentumának tényezőit átrendezve azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot 2\pi f_x k\Delta t = 2\pi 2k \frac{\Delta t}{T_x} \quad (7)$$

ahol $T_x = 1/f_x$. Mivel a példában

$$\frac{\Delta t}{T_x} = \frac{f_x}{f_s} = \frac{1}{200} \quad (8)$$

ezért 200 minta pontosan két teljes periódust fed le, és ezen minták összege zérus. Az összeg tehát az első tag, azaz:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^2(k\Delta t) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^2}{2} \right] = \frac{1}{N} N \frac{A^2}{2} = \frac{A^2}{2} \quad (9)$$

amely éppen a szinuszos jel effektívérték-négyzete, azaz a (2) egyenletben éppen az egyenlőség teljesül, így az állítást bebizonyítottuk. (2 pont)

A (7) és (8) egyenletek alapján tetszőleges egész számú teljes periódus mintáinak összege zérus, azaz ha az alábbi egyenletben:

$$2 \cdot 200 \cdot \frac{f_x}{f_s} = n \quad (10)$$

egész szám, a hiba nulla. Ez teljesül, ha:

$$f_x = k \cdot 25 \text{ Hz}, \quad k = 1, \dots \quad (11)$$

(1 pont)

A hiba abból ered, hogy nem egész számú periódust tartalmaz a (6) egyenlet második tagja. A hiba frekvenciafüggő, ezért vizsgálni kell, milyen frekvencián a legnagyobb a hiba. Két úton is eljuthatunk a megoldáshoz.

Egy lehetőség, hogy megvizsgáljuk, mi okozza a hibát. Ha $f_x = 25$ Hz, pontosan egy periódust mintavételezünk, és a hiba nulla. Ha a frekvenciát kissé növeljük, egy teljes periódust és egy részperiódust mintavételezünk. A teljes periódus továbbra is nullát ad, csak a részperiódus mintái adják a hibát. Ha a frekvencia a 25 Hz (nem egész számú) többszöröse, akkor sok egész periódus mintáit összegezzük, és csak keveset a részperiódusból. Ebből adódóan a frekvencia növelésével a hiba egyre kisebb. Ennek alapján megfogalmazható a sejtés, hogy a hiba akkor lesz a legnagyobb, ha a frekvencia a legkisebb a megadott intervallumban, de nem egész számú többszöröse a 25 Hz-nek, azaz $f_x = 20$ Hz-en. Az eredmény próbaszámítással ellenőrizhető.

A másik út a (6) egyenlet második tagjának vizsgálata. Írjuk fel a koszinuszos tagot másképpen:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^2}{2} \cos(2 \cdot 2\pi f_x k \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^2}{2} \cos(2 \cdot 2\pi k \frac{f_x}{f_s}) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^2}{2} \left[e^{j2 \cdot 2\pi k \frac{f_x}{f_s}} + e^{-j2 \cdot 2\pi k \frac{f_x}{f_s}} \right] \quad (12)$$

A továbbiakban elhagyjuk az $\frac{A^2}{2}$ tényezőt, mert a relatív hibához azzal úgyis leosztanánk, és csak az egyik exponenciális tagot vizsgáljuk. A kapott kifejezés egy mértani sor, amelynek kvóciense $q = e^{j2 \cdot 2\pi \frac{f_x}{f_s}}$, a véges tagból álló összeg kifejezhető:

$$\frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2 \cdot 2\pi k \frac{f_x}{f_s}} = \frac{1}{2N} \frac{q^N - 1}{q - 1} = \frac{1}{2N} e^{j2\pi(N-1)\frac{f_x}{f_s}} \cdot \frac{\sin(2\pi N \frac{f_x}{f_s})}{\sin(2\pi \frac{f_x}{f_s})} \quad (13)$$

Ennek abszolút értéke az ismert „diszkrét sinc” függvény, amelynek legnagyobb értéke valóban $f_x = 0$ frekvencián van. Mivel azonban a megadott intervallum alsó határa $f_x = 20$ Hz, a hiba itt a legnagyobb.

(2 pont)

2. Az ábrán szereplő hálózat átviteli függvénye a következő:

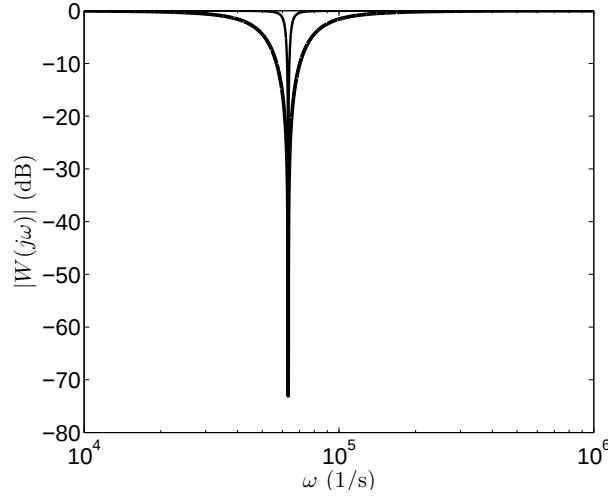
$$W(s) = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1 + s^2 LC}{1 + sRC + s^2 LC} \quad (14)$$

$s = j\omega$ helyettesítéssel az átviteli karakterisztika:

$$W(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \zeta = \frac{RC}{2\sqrt{LC}} \quad (15)$$

(1 pont)

Mind a számlálónak, mind a nevezőnek töréspontja van ω_0 körfrekvencián. Alatta a meredekség zérus, felette +40 dB/dekád, illetve -40 dB/dekád, rendre a számláló, illetve a nevező esetében. A számláló csillapítása nulla, ezért értéke a törésponti körfrekvencián zérus, a nevező értéke a törésponti körfrekvencián a csillapítástól függő véges érték. Ebből következően az átvitel a törésponti körfrekvencián zérus; lényegesen kisebb, illetve nagyobb körfrekvencián egységnyi. Az átviteli karakterisztika abszolút értéke az alábbi ábrán látható:



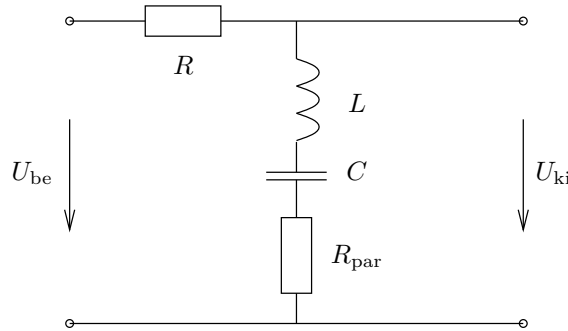
A törésponti körfrekvencia számszerű értéke: $\omega_0 = 6.3246 \cdot 10^4 \frac{1}{s}$. A hálózat ún. lyukszűrő, olyan sávzáró szűrő, amelynek zárósávja egyetlen frekvenciára korlátozódik. A példában megadott adatokhoz a vastagabb vonallal rajzolt, szélesebb karakterisztika tartozik.

(2 pont)

A (15) egyenletből látható, hogy a ζ csillapítás arányos az ellenállás értékével. Ha az ellenállás értéke kisebb, a nevező kisebb veszteségű, és átvitele ω_0 környezetében kisebb lesz, $R \rightarrow 0$ esetén nullához tart. Ezért R csökkentésével a „leszívás” egyre élesebb lesz. Az ábrán $R = 100 \Omega$ esetén látható a karakterisztika, vékonyabb vonallal rajzolva. Értelemszerűen, ha R értékét növeljük, a szűrő egyre szélesebb lesz.

(1 pont)

Amennyiben veszteséges a tekercs és/vagy a kondenzátor, a kapcsolás így rajzolható át:



Mind a tekercs, mind a kondenzátor vesztesége figyelembe vehető soros ellenállás formájában, ezek eredője az ábrán az R_{par} parazita ellenállás. Ennek a módosított hálózatnak az átviteli függvénye a (14) egyenlet alapján:

$$W(s) = \frac{R_{\text{par}} + sL + \frac{1}{sC}}{(R_{\text{par}} + R) + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1 + sR_{\text{par}}C + s^2LC}{1 + s(R_{\text{par}} + R)C + s^2LC} \quad (16)$$

Az átviteli karakterisztika a következőképpen módosul:

$$W(j\omega) = \frac{1 + 2\zeta_{\text{par}} \frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + 2\zeta' \frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (17)$$

Fontos, hogy ω_0 nem változik, továbbá a reális $R_{\text{par}} \ll R$ esetben $\zeta' \approx \zeta$. A függvényből is látható módon, minél nagyobb a veszteség, annál nagyobb lesz az átvitel a törésponti körfrekvencián, azaz annál kisebb lesz a „leszívás”. Az átvitel értéke a fizikai kép alapján is számítható: a rezonanciafrekvencián az induktivitás és a kondenzátor eredő impedanciája zérus, az átvitelt csak R és R_{par} határozza meg:

$$W(j\omega_0) = \frac{R_{\text{par}}}{R_{\text{par}} + R} \cong \frac{R_{\text{par}}}{R} \quad (18)$$

azaz pl. $R = 1000 \, \Omega$ és $R_{\text{par}} = 1 \, \Omega$ esetén a „leszívás” $-60 \, \text{dB}$.
(1 pont)