

Méréstechnika házi feladat 2. Megoldás

2019. ősz

1. A névleges érték becslője a mért ellenállásértékek átlaga, amelynek szórása annál kisebb, minél több mérést végzünk. A két mérés közül csak a 2. adatai alkotnak teljes rendszert, ezért a triviális megoldás, hogy abból számítunk konfidenciaintervallumot. Itt viszont csak kevés adat van, ezért itt az átlag szórása nagyobb, mint az 1. mérés esetén, tehát célszerű lenne mégis az 1. mérés alapján becsülni a névleges értéket. Mivel mindkét mérés azonos várható értékű és szórású populációból származik, s_2 is σ egy becslője. Ez viszont valószínűségi változó, szabadságfoka $N_2 - 1$, így a konfidenciaintervallum $N_2 - 1$ paraméterű Student-t eloszlással írható fel:

$$P \left[\hat{R}_1 - \frac{s_2}{\sqrt{N_1}} t_{14,0.05} < R < \hat{R}_1 + \frac{s_2}{\sqrt{N_1}} t_{14,0.05} \right] = 90\%. \quad (1)$$

ahol $\hat{R}_1 = \bar{R}_1 = 6801 \, \Omega$ és $t_{14,0.05} = 1.761$. Behelyettesítve:

$$P [6786.3 \, \Omega < R < 6815.7 \, \Omega] = 90\% \quad (2)$$

(1 pont)

A bizonyításhoz írjuk fel, hogy a várható érték becslője milyen valószínűségi változó:

$$x = \frac{\hat{R}_1 - R}{\frac{s_2}{\sqrt{N_1}}} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{N_1}} z}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{N_2-1} \frac{\chi_{N_2-1}^2}{N_1}}} \quad (3)$$

Ahol z standard normális eloszlású valószínűségi változó. Egyszerűsíteni lehet σ -val és N_1 -gyel:

$$x = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi_{N_2-1}^2}{N_2-1}}} = t_{N_2-1} \quad (4)$$

Tehát x valóban $N_2 - 1$ paraméterű Student-t eloszlású valószínűségi változó, azaz az (1) szerinti számítás helyes.

(2 pont)

2. A megadott minták alapján kiszámítható a várható érték becslője, valamint a tapasztalati szórás:

$$\hat{t}_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} t_i = 4.2633 \, \text{s}, \quad s_1 = \sqrt{\frac{1}{N_1-1} \sum_{i=1}^{N_1} (t_i - \hat{t}_1)^2} = 0.0999 \, \text{s} \quad (5)$$

ahol $\hat{t}_1$ jelöli a várható érték becslőjét, s_1 a tapasztalati szórást, $N_1 = 6$ pedig a minták száma. Mivel a szórást is a minták alapján becsültük, a konfidenciaintervallum megállapításához a Student t-eloszlást kell alkalmaznunk:

$$P \left[\hat{t}_1 - \frac{s_1}{\sqrt{N_1}} t_{5,0.025} < t < \hat{t}_1 + \frac{s_1}{\sqrt{N_1}} t_{5,0.025} \right] = 95\%. \quad (6)$$

ahol $t_{5,0.025} = 2.571$. Behelyettesítve:

$$P [4.158 \, \text{s} < t < 4.368 \, \text{s}] = 95\% \quad (7)$$

(1 pont)

Az újabb mérésekről megállapítható, hogy ún. kiugró mérési adatok, mert csak igen magas konfidenciaszinten lennének az előző populációhoz tartozók. Pl. t_7 -hez $t = \Delta t_7 / s_1 = 6.87$ tartozik. Ezért nem tekinthető érvényesnek a feltételezés, hogy az adatok eloszlása normális.

Ez esetben két lehetőség adódik: (a) a kiugró adatok elhagyása; vagy (b) a konfidenciaintervallum kiszámítása az eloszlás ismerete nélkül. Az (a) esetben a (7) megoldáshoz jutunk.

A (b) esetben az intervallumot a Csebisev-egyenlőtlenség alapján becsülhetjük meg:

$$P \left[|t - \hat{t}_2| \leq k \cdot \frac{s_2}{\sqrt{N_2}} \right] > 1 - \frac{1}{k^2} = 95\% \quad (8)$$

ahol $k = 4.472$, valamint a várható érték és a szórás új becslője:

$$\hat{t}_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} t_i = 4.2612 \text{ s}, \quad s_2 = \sqrt{\frac{1}{N_2 - 1} \sum_{i=1}^{N_2} (t_i - \hat{t}_2)^2} = 0.3810 \text{ s} \quad (9)$$

Behelyettesítve a (8) egyenletbe

$$k \cdot \frac{s_2}{\sqrt{N_2}} = 0.6956 \text{ s} \quad (10)$$

Ezzel a (7) egyenletnek megfelelő konfidenciaintervallum:

$$P[3.566 \text{ s} < t < 4.957 \text{ s}] = 95\% \quad (11)$$

Jól látható, hogy az intervallum sokkal szélesebbé vált. Érdekes a (8) egyenletbe más konfidenciaszinteket is behelyettesíteni. Ekkor láthatóvá válik, hogy minél magasabb konfidenciaszintet határozzunk meg, annál irreálisabban széles konfidenciaintervallum adódik.

Pontozás: A kiugró adatok felismerése és azok egyszerű elhagyása 1 pontot ér, az új adatokkal, Csebisev-egyenlőtlenséggel számolva 2 pont szerezhető.

3. Egy számítógép felvett teljesítménye egyenletes eloszlást követ, ezért várható értéke és szórása:

$$P_1 = 200 \text{ W}, \quad \sigma_1 = \frac{\Delta P_1}{\sqrt{3}} = 11.55 \text{ W} \quad (12)$$

$N_1 = 144$ gép teljesítménye összegének várható értéke és szórása:

$$\hat{P} = N_1 P_1 = 28.8 \text{ kW}, \quad \sigma = \sqrt{N_1} \sigma_1 = 138.56 \text{ W} \quad (13)$$

A teljesítmények összege a centrális határeloszlás-tétel értelmében normális eloszlású lesz. Ha azt keressük, hogy milyen értéket nem halad meg $p = 99\%$ valószínűséggel az eredő teljesítmény, akkor egyoldalú konfidenciaintervallumot keresünk, hiszen egy adott értéknél kisebb teljesítmény nem probléma. Másképpen fogalmazva: az a kérdés, hogy az eredő teljesítmény milyen értéknél lesz $1 - p = 1\%$ valószínűséggel nagyobb. Az egyenlőtlenség az alábbi:

$$P[P > \hat{P} + \Delta P] = 1 - p \quad (14)$$

ahol:

$$\Delta P = z_{1-p} \sigma = z_{0.01} \sigma = 322.85 \text{ W} \quad (15)$$

Így a kérdéses maximális teljesítmény:

$$P_{\max,1} = \hat{P} + \Delta P = 29.123 \text{ kW} \quad (16)$$

(2 pont)

Amennyiben adott a teljesítmény, amelyet az eredő teljesítményfelvétel nem haladhat meg, ebből kell kifejezni a gépek számát. Az – egyelőre ismeretlen – N_2 számítógép teljesítményfelvételének várható értéke és szórása:

$$P(N_2) = N_2 P_1, \quad \sigma(N_2) = \sqrt{N_2} \sigma_1 \quad (17)$$

A maximális teljesítmény kifejezése:

$$P_{\max,2} = N_2 P_1 + z_{0.01} \sqrt{N_2} \sigma_1 \quad (18)$$

Ez $\sqrt{N_2}$ -re egy másodfokú egyenlet:

$$N_2 P_1 + z_{0.01} \sqrt{N_2} \sigma_1 - P_{\max,2} = 0 \quad (19)$$

$n_2 = \sqrt{N_2}$ helyettesítéssel az egyenletet megoldva, és a triviálisan rossz gyököket kizárva kapjuk, hogy:

$$n_2 = \frac{-z_{0.01} \sigma_1 + \sqrt{z_{0.01}^2 \sigma_1^2 + 4 P_1 P_{\max,2}}}{2 P_1} = 12.804 \quad (20)$$

Tehát a bekapcsolható számítógépek maximális száma:

$$N_2 = [n_2^2] + 1 = 148 \quad (21)$$

ahol $[.]$ egészrészképzést jelent. (2 pont)