

Méréstechnika házi feladat 5. Megoldás

2019. tavasz

1. A t_n időpontokban mintavételezett jel időfüggvénye a következő:

$$x(n) = A \sin(2\pi f_x t_n + \varphi) = A \sin\left(2\pi \frac{f_s}{2} n \frac{1}{f_s} + \varphi\right) = A \sin(n\pi + \varphi) \quad (1)$$

A jelet tehát a $0, \pm \frac{1}{f_s}, \pm 2\frac{1}{f_s}, \dots$ helyeken mintavételezzük. A mintavételezett értékek:

$$x(n) = \begin{cases} A \sin(\varphi), & \text{ha } n = 2k \\ -A \sin(\varphi), & \text{ha } n = 2k + 1 \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Tehát pl. $\varphi = 0 + k\pi$ esetén a mintavételi értékek zérusok (ekkor a szinuszjel nullátmeneteit mintavételezzük), $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ esetén a maximumhelyeken mintavételezzük, azaz $\pm A$ értékeket kapunk. (1 pont)

A jel effektív értékének becslője a képletbe helyettesítve:

$$\hat{X}_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^2(i)} = \sqrt{\frac{A^2}{N} \sum_{i=1}^N \sin^2(\varphi)} = A |\sin(\varphi)| \quad (3)$$

Tehát pl. $\varphi = 0 + k\pi$ esetén az effektívérték-mérés eredménye zérus, $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ esetén A . Más φ értékekre a $0 < \hat{X}_{\text{eff}} < A$ tartományban kapunk értékeket. Figyeljük meg, hogy a végeredmény független N értékétől, és az sem szükséges, hogy N kellően nagy legyen! (2 pont)

Ha a jel frekvenciája kissé eltér $\frac{f_s}{2}$ -től, a mintavételezett jel így írható fel:

$$x(n) = A \sin\left[2\pi \left(\frac{f_s}{2} + df\right) n \frac{1}{f_s} + \varphi\right] = A \sin\left(n\pi + 2\pi \frac{df}{f_s} n + \varphi\right) = A \sin(n\pi + \varepsilon n + \varphi) = A \sin(n\pi + \alpha(n)) \quad (4)$$

ahol $df \ll f_s$ jelöli a kicsiny frekvenciaeltérést. Ezt úgy írhattuk fel, mint kicsiny fázistolást, amely időben lineárisan nő, így végeredményben a mintavételezett jel lassan „bejárja” a teljes szinuszjelet. A φ kezdőfázis csak a bejárás kezdőpontját változtatja meg.

Az effektív érték számítására szolgáló összefüggés a minták négyzetösszegét egy fix hosszúságú ablakban képi, a mérés eredménye attól függ, hogy „hol tart” a szinuszjel bejárása az N minta vételezése során. Ennek megfelelően:

$$\hat{X}_{\text{eff}} \approx \begin{cases} 0, & \text{ha } \alpha(n) \approx 0 \\ A, & \text{ha } \alpha(n) \approx \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (5)$$

(2 pont)

Természetesen $N \rightarrow \infty$ esetén a teljes szinuszjelet bejárjuk, ezért $\hat{X}_{\text{eff}} = X_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$, de ez nem reális, mert $N \rightarrow \infty$ esetén a mérési idő is végtelenhez tart.

2. A jel frekvenciája $f_x = 50$ Hz, és mivel a jelalak a feladat szerint páratlan függvény, ennek páratlan felharmonikusai jelennek meg, azaz komponensek lesznek $f = 50, 150, 250, \dots$ Hz frekvencián, egészen a mintavételi frekvencia feléig. Mivel a DFT az $f = 0$ frekvenciához tartozó komponenst is számolja, a szükséges felbontás:

$$\Delta f_{\text{DFT}} = 50 \text{ Hz} \quad (6)$$

Ebből a szükséges mintaszám:

$$N = \frac{f_s}{\Delta f_{\text{DFT}}} = 200 \quad (7)$$

(1 pont)

Ha az USA-ban is akarjuk használni (tehát mindkét helyen), 50 Hz és 60 Hz felharmonikusait is hibamentesen kell mérni, ehhez

$$\Delta f'_{\text{DFT}} = 10 \text{ Hz} \quad (8)$$

felbontás szükséges. Ebből a mintaszám:

$$N' = \frac{f_s}{\Delta f_{\text{DFT}}} = 1000 \quad (9)$$

(1 pont)

Mivel a DFT a zérus frekvenciához tartozó összetevőt is becsli, az ofszethiba pedig egy zérus frekvenciájú (DC) komponens, ezért az AC komponensek mérésében nem okoz hibát az ofszethiba. Amennyiben a hálózati feszültség egyenkomponensét keressük, természetesen rendszeres hibát okoz az ofszethiba. (1 pont)

Amennyiben a hálózati feszültség frekvenciája eltér a névlegestől, fellép a tetőzés és a szivárgás jelensége. A hibát a „diszkrét sinc” karakterisztikával lehet becsülni. Mivel a jel páratlan függvény, a példában megadott $f_k = 100 \text{ Hz}$ frekvencián és közvetlen közelében nincs a jelnek komponense, a névleges spektrumérték zérus. Ott kizárólag a más frekvenciákról „beszivárgó” komponensek jelennek meg. Legnagyobb amplitúdóval a közeli, 50 Hz-es és 150 Hz-es komponensek szivárognak be. Ha a hálózati frekvencia a névlegestől csak kis mértékben tér el (a példában ez az eltérés $\Delta f = 20 \text{ mHz}$), az $f_k = 100 \text{ Hz}$ -en megjelenő komponens igen kicsiny, hibajellegű komponens lesz. Mivel a hálózati jel alapvetően szinuszos, a felharmonikusok is hibajellegű mennyiségek, ezért a felharmonikusok hatására $f_k = 100 \text{ Hz}$ -en megjelenő komponens elhanyagoljuk. Így viszont a diszkrét sinc ismeretében könnyen számítható a kérdéses amplitúdó:

$$|X_{100}| = A_{50} \left| \frac{\sin\left(\frac{N\pi}{f_s}(f_k - \tilde{f}_x)\right)}{N \sin\left(\frac{\pi}{f_s}(f_k - \tilde{f}_x)\right)} \right| \cong A_{50} \cdot 10^{-4} \quad (10)$$

ahol A_{50} jelöli az 50 Hz-hez tartozó komponens amplitúdóját, $\tilde{f}_x$ pedig a névlegestől eltérő hálózati frekvenciát. A képletbe akár $\tilde{f}_x = 50.02 \text{ Hz}$, akár $\tilde{f}_x = 49.98 \text{ Hz}$ helyettesíthető, az eredmény nagy pontossággal megegyezik. Hasonlóan kicsi az eltérés, ha N helyett N' -vel számolunk. (2 pont)