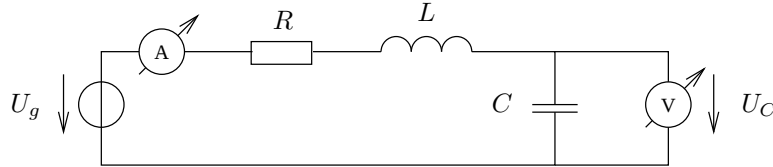


Méréstechnika házi feladat 4. Megoldás

2018. tavasz

1. A mérési elrendezés az alábbi ábrán látható:



Az áramkörben folyó áram az alábbi:

$$I = \frac{U_g}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{U_g}{R + j\omega L - j/\omega C} \quad (1)$$

A fenti kifejezésből látszik, hogy az áram akkor maximális, ha:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (2)$$

Ebből a maximális áram, illetve a kapacitás értéke:

$$I_{\max} = \frac{U_g}{R}, \quad C = \frac{1}{\omega^2 L} \quad (3)$$

(2 pont)

A kapacitáson eső feszültség az eddigiek behelyettesítésével:

$$U_C = I_{\max} \frac{1}{j\omega C} = \frac{U_g \omega L}{jR} = \frac{U_g}{j} Q \quad (4)$$

ahol Q éppen a tekercs jósági tényezője. Ezek után a jósági tényező kifejezése:

$$Q = \left| \frac{U_C}{U_g} \right| = \frac{U_{C,\text{eff}}}{U_{g,\text{eff}}} = 5 \quad (5)$$

(1 pont)

Megjegyzés: A példában megadott adatokkal $U_C > U_g$. Ez azért lehetséges, mert a kapacitás állításával az RLC -tag rezonanciafrekvenciáját a gerjesztés frekvenciájára állítottuk. Rezonancia esetén a tekercsen és a kondenzátoron azonos nagyságú, de ellentétes irányú feszültség van.

2. Feszültség-összehasonlítás esetén a mért impedancia abszolút értéke:

$$|Z| = R_N \frac{U_X}{U_N} = 13 \, \Omega \quad (6)$$

A komplex impedancia kifejezése a mért értékekkel és a helyettesítőkép elemeivel:

$$Z = |Z|e^{j\varphi} = |Z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = R + j\omega L \quad (7)$$

ahol $\omega = 2\pi f$, a példában megadott érték. Ebből:

$$\begin{aligned} R &= |Z| \cos \varphi = 5 \, \Omega \\ L &= \frac{|Z| \sin \varphi}{\omega} = 12 \, \text{mH} \end{aligned} \quad (8)$$

(1 pont)

A hibaszámítás első lépése annak vizsgálata, hogy R és L relatív hibája hogyan függ a fázismérés hibájától. Formálisan írható, hogy:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta R}{R} &= \frac{\Delta|Z|}{|Z|} + \frac{\Delta \cos \varphi}{\cos \varphi} \\ \frac{\Delta L}{L} &= \frac{\Delta|Z|}{|Z|} + \frac{\Delta \omega}{\omega} + \frac{\Delta \sin \varphi}{\sin \varphi}\end{aligned}\quad (9)$$

A feladat nem foglalkozik a feszültségmérés és a frekvencia hibájával, ezért azokat nullának lehet tekinteni. A szögfüggvények φ hibájától való függését behelyettesítve, és a worst case hibaösszegzés miatt az előjelet elhagyva:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta R}{R} &= \tan \varphi \Delta \varphi \\ \frac{\Delta L}{L} &= \cot \varphi \Delta \varphi\end{aligned}\quad (10)$$

A fázistolás kifejezése a következő:

$$\varphi = 2\pi \frac{\tau}{T_x} \quad (11)$$

ahol τ és T_x rendre a két jel pozitív nullátmenetei közötti időintervallum és a méréshez alkalmazott szinuszos jel periódusideje. Ennek hibaanalízise a következő:

$$\frac{\Delta \varphi}{\varphi} = \frac{\Delta \tau}{\tau} + \frac{\Delta T_x}{T_x} = \frac{1}{\tau f_0} + \frac{\Delta f_0}{f_0} \quad (12)$$

Mivel a periódusidőt ismertnek tételeztük fel, annak hibája zérus, τ mérésének hibája pedig a kvantálási hiba és az órajel hibájának összege. A fázismérés abszolút hibája tehát:

$$\Delta \varphi = \varphi \left(\frac{1}{\tau f_0} + \frac{\Delta f_0}{f_0} \right) = 0.0101 \text{ rad} \quad (13)$$

ahol τ -t a (11) egyenletből fejezhetjük ki a névleges érték alapján.

(1 pont)

Ezt most már a (10) egyenletbe helyettesíthetjük:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta R}{R} &= 2.43\% \\ \frac{\Delta L}{L} &= 0.42\%\end{aligned}\quad (14)$$

(2 pont)

Amennyiben a műszer méri a periódusidőt is, számításba kell venni a periódusidő-mérés hibáját is. Elsőként a fázismérés hibáját számíthatjuk ki újra. A fázismérés hibájának (12) kifejezésében most $\frac{\Delta T_x}{T_x} \neq 0$, viszont kiesik $\frac{\Delta f_0}{f_0}$, mert a számlálóban és a nevezőben is megjelenik. Ezzel a fázismérés új hibája:

$$\frac{\Delta \varphi'}{\varphi} = \frac{\Delta \tau}{\tau} + \frac{\Delta T_x}{T_x} = \frac{1}{\tau f_0} + \frac{1}{T_x f_0} \quad (15)$$

Az abszolút fázishiba tehát:

$$\Delta \varphi' = \varphi \left(\frac{1}{\tau f_0} + \frac{1}{T_x f_0} \right) = 0.0119 \text{ rad} \quad (16)$$

(1 pont)

A továbbiakban R és L hibáját külön kezeljük.

Az R ellenállás hibája (9) szerint csak a fázismérés hibájától függ, ezért közvetlenül írható, hogy:

$$\frac{\Delta R}{R} = \tan \varphi \Delta \varphi' = 2.85\% \quad (17)$$

Az L induktivitás hibájának felírásához tekintsük újra a (8) kifejezést! Látszik, hogy L függ ω -tól, azaz f -től is, amelynek relatív hibája T_x relatív hibájának -1 -szerese. A hibakomponensek előjelét megtartva a következő írható:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta |Z|}{|Z|} + \frac{\Delta \sin \varphi}{\sin \varphi} - \frac{\Delta \omega}{\omega} = \cot \varphi \Delta \varphi + \frac{\Delta T_x}{T_x} \quad (18)$$

Az impedancia abszolút értéke mérésének hibája továbbra is zérus. Vegyük észre, hogy $\Delta \varphi$ hibájában komponensként megjelenik $\frac{\Delta T_x}{T_x}$, ezért az induktivitás mérésének hibáját nem fejezhetjük ki külön φ és külön T_x hibája abszolút értékének összegeként. A τ mérésétől és a T_x mérésétől függő komponenseket kell külön kezelni és a komponensek abszolút értékét venni. Bonyolítja a helyzetet, hogy ω mérésének hibájában megjelenik az órajel hibája, ezzel szemben a fázismérésben nem, a fenti gondolatmenet alapján. Az induktivitás mérésének hibája tehát:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta f_0}{f_0} + (1 - \cot \varphi \cdot \varphi) \frac{\Delta T_x}{T_x} + \cot \varphi \cdot \varphi \frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{\Delta f_0}{f_0} + (1 - \cot \varphi \cdot \varphi) \frac{1}{T_x f_0} + \cot \varphi \cdot \varphi \frac{1}{\tau f_0} = 0.51\% \quad (19)$$

Kihasználtuk, hogy $(1 - \cot \varphi \cdot \varphi) > 0$.

(1 pont)

Az első esetben a frekvenciát, azaz a periódusidőt ismertnek feltételeztük, azaz úgy számoltunk, hogy az a névleges értéket nulla hibával valósítja meg. Ez lehet helyes, ha a frekvenciát egy a mi mérőrendszerünknel lényegesen pontosabb generátor valósítja meg, de lehet helytelen is, ez esetben számolni kellett volna ennek hibájával. Mivel azonban nem számoltunk, kisebb hibát kaptunk, mint a második esetben, amikor mind a periódusidő, mind az időintervallum mérése során keletkezik kvantálási hiba.

A második módszer tehát kiküszöböli a generátor rendszeres hibáját, és jelentős mértékben az órajel hibáját is (amely a fázistól függően jelentős hibát eredményezhet az első esetben). Ezáltal látszólag mindent megtettünk a korrekt mérés érdekében. A probléma az, hogy az impedanciát a generátor által kiadott, névlegestől eltérő frekvencián mértük, tehát nem az eredeti feladatot hajtottuk végre. Az, hogy ez a mérésben jelentős hibát okoz-e, attól függ, hogy az adott impedancia milyen $R(f)$, illetve $L(f)$ karakterisztikával rendelkezik. Ha az impedancia jól modellezhető soros RL -képpel (pl. légmagos tekercs), ezeknek a paramétereknek kicsi a frekvenciafüggése, és a generátorfrekvencia hibajellegű eltérése esetén kicsi a hiba. Ha azonban mást mérünk (pl. vasmagos tekercset), precíziós mérések esetén gondolni kell erre a problémára.

Röviden összefoglalva:

1. Az első esetben nem számoltunk $\frac{\Delta f}{f}$ -fel, ami rendszeres hibát okoz a mérésben.
2. Ha $\frac{\Delta f}{f}$ jelentős, a második eset kedvezőbb, mert bár a mérésnél kvantálási hiba lép fel, annak mértéke kézben tartható.
3. Bár a második mérés kiküszöböli a frekvenciahibát, az impedancia paramétereit nem a kívánt frekvencián adja vissza, amely erősen frekvenciafüggő R és L esetén okoz érdemi hibát.

(1 pont)