

# Méréstechnika házi feladat 3. Megoldás

2018. tavasz

1. A tiszta koszinuszos jelet írjuk fel általánosan, majd adjuk meg komplex alakban:

$$x_0(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \quad (1)$$

A komplex írásmód egyrészt illeszkedik a spektrumszámításhoz, másrészt könnyen figyelembe vehető tetszőleges kezdőfázisú szinuszos jel. (Szinuszjel esetén  $\varphi = -\pi/2$ .) Ezzel az írásmóddal megmutatható, hogy a kialakuló spektrumkép fázisfüggetlen. A megadott  $x(t)$  jel a fent megadott jel hatványozásával állítható elő (az amplitúdó nem változik). Általánosan  $x(t)$  a következőképpen írható fel:

$$x(t) = A \left( \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right)^a = \frac{A}{2^a} \sum_{k=0}^a \binom{a}{k} e^{j[(a-2k)\omega t + (a-2k)\varphi]} \quad (2)$$

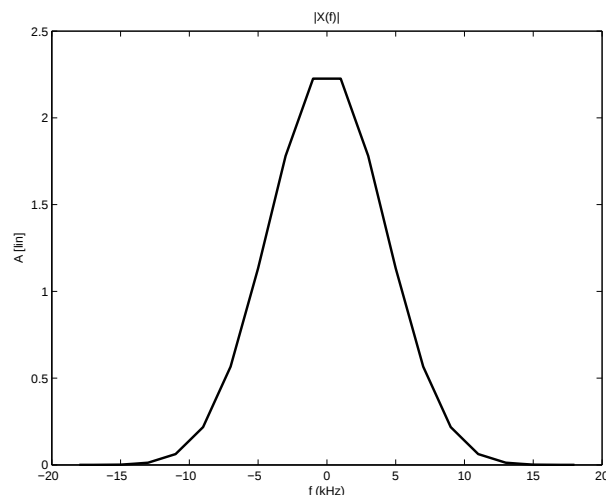
$a$  értékének behelyettesítésével látszik, hogy a legmagasabb komponens az  $a$ -adik. Ha  $a$  páros, csak páros komponensek vannak jelen (beleértve a DC-t is), ha  $a$  páratlan, csak páratlanok. Azaz  $a = 18$  esetén  $0, 2f, 4f$  stb.;  $a = 17$  esetén  $f, 3f$  és  $5f$  stb. frekvenciájú komponensek jelennek meg a kimeneten. Ez azt is jelenti, hogy az összeg két tagjának spektrumkomponensei nem kerülnek egymásra, összegzésük nem igényel további műveletet.

A DC és az egyes exponenciálisok amplitúdóit pozitív frekvenciákra az alábbi vektor tartalmazza:

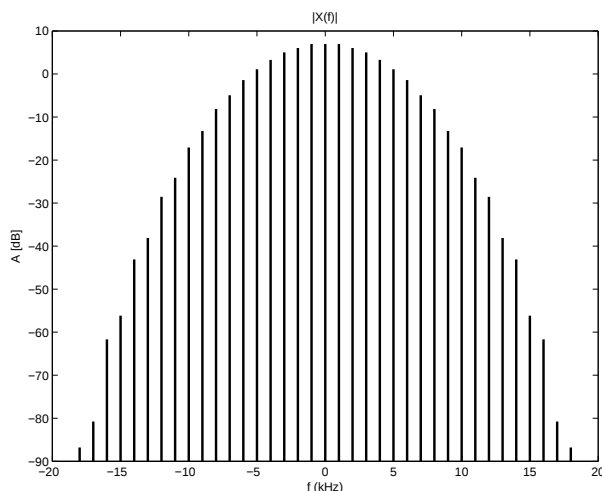
$$X(f) = \begin{bmatrix} 6.9 & 6.9 & 6.0 & 5.0 & 3.3 & 1.1 & -1.4 & -4.9 & -8.1 & -13.2 \\ -17.1 & -24.1 & -28.6 & -38.1 & -43.1 & -56.2 & -61.7 & -80.8 & -86.8 & \text{dBV} \end{bmatrix} \quad (3)$$

(2 pont)

Az alábbi ábrán láthatjuk a kialakult spektrumképet:



Ugyanez logaritmikus léptékben:



(1 pont)

Mivel a hatványozás felharmonikusokat eredményez, továbbá az alapharmonikus is szerepel a spektrumban, ezért a periódusidő:

$$T = 1/f_0 = 1 \text{ ms} \quad (4)$$

Az egyszerű középérték a zérus frekvenciájú komponens amplitúdója, azaz

$$U_0 = 2.2256 \text{ V} \quad (5)$$

(1 pont)

Az effektív érték komponensenként integrálás nélkül számítható: komplex exponenciálisként az effektív érték az amplitúdó, valós szinuszos komponensként az amplitúdó  $\sqrt{2}$ -ed része. A jel effektív értékének számításához ezeket négyzetesen kellett összegezni, majd az összegből gyököt vonni. A komplex amplitúdókkal:

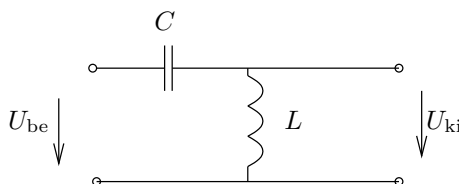
$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\sum_{k=-a}^a X_k^2} = 6.2110 \text{ V} \quad (6)$$

(1 pont)

*Megjegyzés.*

Az effektív érték kiszámításához a magasabb frekvenciás összetevők elhanyagolhatók. Az elhanyagoláshoz felhasználhatjuk, hogy a komponensek amplitúdói formálisan a binomiális eloszlás valószínűségeivel arányosak, és  $a$  már elég nagy ahhoz, hogy az együtthatók közelítően normális eloszlást mutatnak, azaz a figyelembe veendő együtthatók száma a szórás háromszorosa. Jelen esetben ez kb. 12 együtthatót jelent.

**2.** A szűrő az alábbi ábrán látható:



(1 pont)

Az átviteli függvény az alábbi:

$$W_1(s) = \frac{s^2 LC}{1 + s^2 LC} \quad (7)$$

A Bode-diagram felrajzolásához és a továbbiak kedvéért érdemes kifejezni a sajátfrekvenciát:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 0.5505 \text{ krad/s} \quad (8)$$

A Bode amplitúdódiagram töréspontja  $\omega_0$ , ez alatt az aszimptota meredeksége +40 dB/dekád, felette zérus. Mivel a csillapítás zérus, az átviteli karakterisztika  $\omega_0$ -ban végtelen.

(1 pont)

Az egyes elemek veszteségét soros helyettesítőképpel vehetjük figyelembe. (Használható párhuzamos modell is, az átviteli karakterisztikán nem változtat, de a levezetések kevésbé áttekinthetők.) Mivel a két veszteségi tényező azonos, és  $\omega_0$ -ban adott, ezért írható, hogy:

$$D = R_1 \omega_0 C = R_2 \frac{1}{\omega_0 L} \quad (9)$$

ahol  $R_1$  és  $R_2$  rendre a kondenzátorral és a tekercsel sorosan kapcsolódó veszteségi ellenállás.  $\omega_0$  (8) kifejezését behelyettesítve azt kapjuk, hogy:

$$R_1 = R_2 = R = D \sqrt{\frac{L}{C}} = 41.29 \text{ m}\Omega \quad (10)$$

Ezek után az átviteli függvény az ellenállásokkal és a veszteségi tényezővel is felírva:

$$W_2(s) = \frac{s R_2 C + s^2 LC}{1 + s C (R_1 + R_2) + s^2 LC} = \frac{s R C (1 + s L / R)}{1 + s 2 C R + s^2 LC} = \frac{s D \sqrt{LC} (1 + s \sqrt{LC} / D)}{1 + s 2 D \sqrt{LC} + s^2 LC} \quad (11)$$

Látszik, hogy a kifejezésben  $D$  a csillapítási tényező szerepét tölti be. A számláló alapján megállapítható két új törésponti körfrekvencia:

$$\omega_{c,1} = \frac{\omega_0}{D} = 0.1101 \text{ Mrad/s}, \quad \omega_{c,2} = \omega_0 D = 2.7524 \text{ rad/s} \quad (12)$$

Mivel  $D \ll 1$ ,  $\omega_{c,1} \gg \omega_0$  és  $\omega_{c,2} \ll \omega_0$ . A számláló tehát két tényezőből áll, az első tényezőnek nincs töréspontja, meredeksége +20 dB/dekád, átvitelének abszolút értéke  $\omega_{c,1}$  körfrekvencián egységnyi. A második tényező meredeksége  $\omega_{c,2}$  alatt zérus, felette +20 dB/dekád. A számláló eredő erősítése  $\omega_0$  körfrekvencián éppen egységnyi. A nevező alapján megállapítható karakterisztika az eredetitől annyiban tér el, hogy erősítése a sajátfrekvencián nem végtelen. Az erősítésnek  $\omega_r$  körfrekvencián maximuma van, és itt az erősítés:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2} \cong \omega_0, \quad |W_2|_{\max} = \frac{1}{2D\sqrt{1 - D^2}} \cong \frac{1}{2D} = 40 \text{ dB} \quad (13)$$

(2 pont)

Az  $\omega_{c,2}$  törésponti frekvencia azt eredményezi, hogy az eredő karakterisztika meredeksége ez alatt csak +20 dB/dekád.

Az  $R_g$  generátorellenállás sorosan kapcsolódik a kondenzátor  $R_1$  veszteségi ellenállásával, és mintegy megnöveli azt. Tehát az átviteli függvényben az  $R_3 = R_1 + R_g$  ellenállással kell számolnunk:

$$W_3(s) = \frac{s R C (1 + s L / R)}{1 + s C (R + R_3) + s^2 LC} = \frac{s D \sqrt{LC} (1 + s \sqrt{LC} / D)}{1 + s 2 D' \sqrt{LC} + s^2 LC} \quad (14)$$

Jól látható módon ez a változás a számlálót nem befolyásolja, csak a nevező csillapítása növekszik meg az alábbi módon:

$$D' = D + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} R_g \approx 3 \quad (15)$$

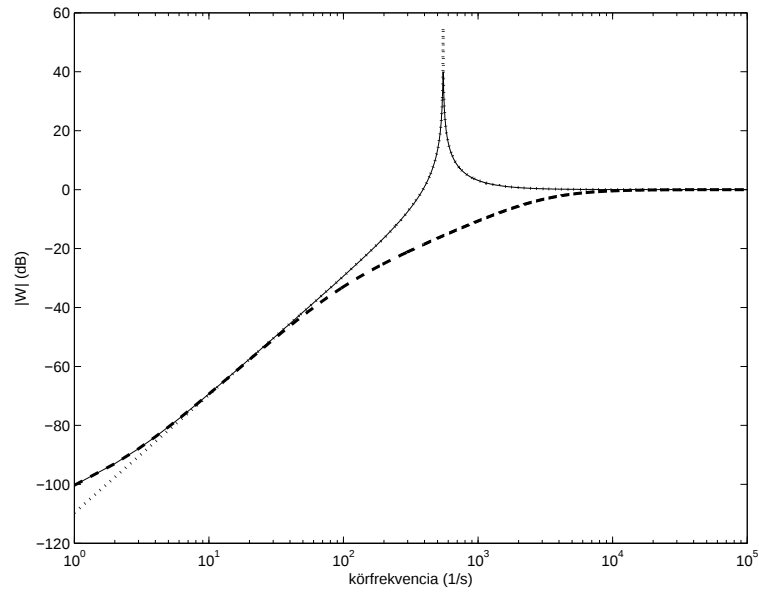
Ez jelentős csillapítás, amely mellett a másodfokú alaptag szétesik két elsőfokú szorzatára, azaz a Bode-diagramon két újabb töréspont jelenik meg. A nevező gyökeit megkeresve:

$$\omega_{c,3} = 93.37 \text{ rad/s}, \quad \omega_{c,4} = 3.2455 \text{ krad/s} \quad (16)$$

Az  $\omega_{c,3}$  töréspont felett a meredekség már csak  $+20$  dB/dekád, és  $\omega_{c,4}$  felett lesz zérus a meredekség, azaz az  $\omega_0$  töréspont „szétesik” két szakaszra.

(1 pont)

A fentieket összefoglalóan láthatjuk az alábbi ábrán:



A pontozott vonal az ideális, a folytonos a veszteséges elemekhez tartozó, a szaggatott pedig a generátorellenállást is figyelembe vevő átviteli karakterisztika. Érthető okokból a végtelen átvitelt nem tudjuk ábrázolni.

*Megjegyzés.*

Amennyiben a generátorellenállás figyelembevételkor nem térünk át két valós elsőfokú alaptagra, hanem továbbra is másodfokúként kezeljük a nevezőt, és az átvitelt a (13) egyenlet szerint közelítjük, azaz a sajátfrekvencián vett átvitelt a veszteségi tényezőből számítjuk:

$$|W_3|_{\max} \cong \frac{1}{2D'} = -15.7 \text{ dB} \quad (17)$$

a valódi karakterisztika jó közelítését kapjuk, csak az újabb töréspontok nem ismerhetők fel.