

Méréstechnika házi feladat 2. Megoldás

2018. tavasz

1. Az egyenletes eloszlás következtében a tömeg és a hosszúság mérésének standard bizonytalansága:

$$u(m) = \frac{\Delta m}{\sqrt{3}} = \frac{h_m m}{\sqrt{3}} = 1.4434 \text{ g}, \quad u(l) = \frac{\Delta l}{\sqrt{3}} = \frac{h_l l}{\sqrt{3}} = 5.7735 \text{ mm} \quad (1)$$

Ez B típusú standard bizonytalanság, de mivel nem áll rendelkezésre több mérési eredmény, ez a teljes bizonytalansággal megegyezik.

A tehetetlenségi nyomaték kifejezése, illetve becslője:

$$\Theta = \frac{1}{3}ml^2, \quad \hat{\Theta} = \frac{1}{3}\hat{m}\hat{l}^2 = 666.67 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2 \quad (2)$$

Az érzékenységek az alábbiak:

$$c_m = \frac{\partial \Theta}{\partial m} = \frac{1}{3}l^2, \quad c_l = \frac{\partial \Theta}{\partial l} = \frac{2}{3}ml \quad (3)$$

A tehetetlenségi nyomaték standard, illetve kiterjesztett bizonytalansága:

$$u(\Theta) = \sqrt{c_m^2 u^2(m) + c_l^2 u^2(l)}, \quad \Delta \Theta = ku(\Theta) = 86.07 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2 \quad (4)$$

ahol $k = 2$. Ezzel a tehetetlenségi nyomaték mérésének eredménye:

$$\Theta = \hat{\Theta} \pm \Delta \Theta = (666.67 \pm 86.7) \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2 \quad (5)$$

(1 pont)

A felfüggesztett rúd mint inga lengésideje a következő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{mgs}} \quad (6)$$

ahol s a felfüggesztés és a tömegközéppont távolsága, jelen esetben $s = l/2$. Érdemes a tehetetlenségi nyomaték kifejezését behelyettesíteni, így az összefüggés egyszerűsödik. Egyúttal a lengésideő becslője is felírható:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}, \quad \hat{T} = 2\pi \sqrt{\frac{2\hat{l}}{3g}} = 0.7325 \text{ s} \quad (7)$$

A kifejezésből kiesett m , azaz a tömeg nem, ezáltal mérésének hibája sem befolyásolja a lengésideőt, illetve annak hibáját. A lengésideő kifejezésének l -re vonatkozó érzékenysége eltér az előzőtől:

$$c'_l = \frac{\partial T}{\partial l} = \frac{2\pi}{\sqrt{6lg}} \quad (8)$$

A lengésideő standard, illetve kiterjesztett bizonytalansága:

$$u(T) = c'_l u(l), \quad \Delta T = ku(T) = 0.02115 \text{ s} \quad (9)$$

ahol $k = 2$. Ezzel a lengésideő mérésének eredménye:

$$T = \hat{T} \pm \Delta T = 0.7325 \pm 0.02115 \text{ s} \quad (10)$$

(2 pont)

Megjegyzés.

Ha a lengésszám (6) kifejezésébe nem írjuk be a tehetetlenségi nyomaték képletét, látszólag 3 mennyiség bizonytalansága határozza meg T bizonytalanságát, és a tehetetlenségi nyomatékre kapott bizonytalansággal számolva a valóságosnál nagyobb bizonytalanságot kapnánk. Az egyszerűsítés nemcsak a kifejezést teszi egyszerűbbé, hanem feloldja azt, hogy Θ , m , l nem független mennyiségek, így ezek bizonytalansága nem vehető tekintetbe a szokásos módon.

2. Vizsgálatainkban arra keresünk választ, hogy az éppen feltett kérdésben szereplő változó adott határértéknél (szignifikanciaszintnél) kisebb vagy nagyobb valószínűséggel veszi fel ezt az értéket. A feladatkiírás szerint feltételezhető, hogy a havas napok eloszlása normális, tehát a származtatott változó eloszlása ezzel lesz kapcsolatban.

Az első kérdés arra vonatkozik, hogy *egyetlen új adat* milyen valószínűséggel tartozik az előző adatok alapján meghatározott eloszláshoz. Legyen az új adat y , ekkor a

$$t = \frac{y - \hat{\mu}}{s} \quad (11)$$

változó eloszlása Student-t eloszlás. Részletesebb analízissel megmutatható, hogy

$$t = \sqrt{\frac{N-1}{N}} t_{N-1} \cong t_{N-1} = t_{92} \cong z \quad (12)$$

Mivel $N = 93$, a gyök alatti kifejezés jó közelítéssel egységy, továbbá a Student-t eloszlás a standard normális eloszláshoz tart. Így végeredményben az a kérdés, hogy egy konkrét új adatra (a havas napok száma 1994-ben, jelölje ezt y_{94}) kiszámított t_{94} értéket milyen valószínűséggel vesz fel az eloszlás. A várható érték és a szórás becslője:

$$\hat{\mu} = m_{93} = \frac{1}{93} \sum_{i=1}^{93} y_i = 35.30 \text{ nap}, \quad s_{93} = \sqrt{\frac{1}{92} \sum_{i=1}^{93} (y_i - m_{93})^2} = 12.19 \text{ nap} \quad (13)$$

Az ezekből számított érték:

$$t_{94} = \frac{y_{94} - m_{93}}{s_{93}} = 1.3369 < z_{0.05} = 1.64 \quad (14)$$

Ennek alapján az 1994-ben regisztrált havas napok száma nem tér el szignifikánsan ($p < 5\%$) a korábbi években mért adatoktól.

(1 pont)

A fenti gondolatmenet egyszerűsítve és a konfidenciaintervallum kiszámítására vonatkozóan szerepelt a tananyagban. Akkor a fenti közelítésnek azt az interpretációját adtuk, hogy nagy mintaszám mellett az átlag és a tapasztalati szórás a várható értéket és a szórást pontosan megadja, ez esetben a (11) változó standard normális eloszlású.

A következő két kérdés két csoport összehasonlításával foglalkozik. Az a kérdés, hogy a *mérési adatok két csoportja* milyen valószínűséggel tartozik azonos eloszláshoz. A probléma meghaladja a tananyag kereteit, a válasz megtalálható pl. itt: https://hu.wikipedia.org/wiki/Kétmintás_t-próba

A megoldáshoz feltételezzük, hogy a két csoport szórása megegyezik. A megadott linken szerepel, hogy ehhez a tapasztalati szórásokra vonatkozó *F-eloszlással* lehet próbát végezni, illetve *Welch-próba* esetén nem kell feltételeznünk a szórások azonosságát. Emlékeztetülül: a szórások egyezése nem jelenti a tapasztalati szórások egyezését, hiszen a tapasztalati szórásnégyzet valószínűségi változó, eloszlása χ^2 -eloszlás.

A vizsgálandó valószínűségi változó ebben az esetben:

$$t = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\sqrt{(N_1 - 1)s_1^2 + (N_2 - 1)s_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{N_1 N_2 (N_1 + N_2 - 2)}{N_1 + N_2}} = t_{N_1 + N_2 - 2} \quad (15)$$

Figyelembe véve, hogy a példában $N_1 = N_2 = N = 10$, továbbá $\hat{\mu}_1 = m_1$, $\hat{\mu}_2 = m_2$, azaz a várható értéket az átlaggal becsüljük:

$$t = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{(N - 1)(s_1^2 + s_2^2)}} \cdot \sqrt{\frac{N(2N - 2)}{2}} = t_{2N - 2} \quad (16)$$

A szabadsági fokok száma tehát $2N - 2 = 18$. A továbbiakban úgy járunk el, mint az első esetben.

A század első és utolsó évtizedét rendre 1-es és 10-es indexszel jelölve:

$$\begin{aligned} m_1 &= 34.0 \text{ nap}, & s_1 &= 8.165 \text{ nap} \\ m_{10} &= 32.4 \text{ nap}, & s_{10} &= 10.97 \text{ nap} \end{aligned} \quad (17)$$

Behelyettesítve :

$$t_{1,10} = \frac{m_1 - m_{10}}{\sqrt{(N-1)(s_1^2 + s_{10}^2)}} \cdot \sqrt{\frac{N(2N-2)}{2}} = 0.3701 < t_{18;0.05} = 1.734 \quad (18)$$

Ennek alapján az utolsó tíz évben regisztrált havas napok száma nem tér el szignifikánsan ($p < 5\%$) az első tíz évben mért adatoktól.

(3 pont)

Az ötvenes éveket és a század utolsó évtizedét rendre 6-os és 10-es indexszel jelölve (az ötvenes évek ugyanis a 6. évtized):

$$\begin{aligned} m_6 &= 45.0 \text{ nap}, & s_6 &= 14.71 \text{ nap} \\ m_{10} &= 32.4 \text{ nap}, & s_{10} &= 10.97 \text{ nap} \end{aligned} \quad (19)$$

Behelyettesítve :

$$t_{6,10} = \frac{m_6 - m_{10}}{\sqrt{(N-1)(s_6^2 + s_{10}^2)}} \cdot \sqrt{\frac{N(2N-2)}{2}} = 2.1714 > t_{18;0.05} = 1.734 \quad (20)$$

Ennek alapján az utolsó tíz évben regisztrált havas napok száma szignifikánsan ($p < 5\%$) kevesebb, mint az ötvenes években mért értékek.

(1 pont)

Ha azonban a szignifikanciaszintet alacsonyabban húzzuk meg ($p < 1\%$), akkor $t_{18;0.01} = 2.552$, azaz az eltérés ezen a szinten már nem szignifikáns! Ez a kiértékelés jól mutatja, hogy a vizsgálat eredményét nemcsak a matematikai eljárás, hanem a vizsgálatot végző személy döntése is befolyásolja.

A mérési adatokra illesztendő polinom fokszáma nem volt megadva, ezt a feladat megoldójára bíztuk. Érdemes több lehetőséget is kipróbálni. Az alábbiakban nulladfokú, elsőfokú, másodfokú polinomok levezetését adjuk meg, illusztrációként grafikusán megadjuk a harmadfokú polinomot is. Az illesztések során minden esetben négyzetes költségfüggvényt alkalmazunk:

$$C = \sum_{n=1}^N (y_n - P_K(x_n))^2 \quad (21)$$

ahol $N = 100$ a mért adatok száma, y_n az egyes években mért havas napok száma, $P_K(x)$ pedig az illesztett K -adfokú polinom. Ennek a költségfüggvénynek a minimumát keressük. Jelölje a polinom együtthatóit p_k , ekkor a minimum az alábbiak szerint határozható meg:

$$\frac{\partial C}{\partial p_k} = 0, \quad k = 0 \dots K \quad (22)$$

Másképpen:

$$\text{grad}(C) = \mathbf{0} \quad (23)$$

Ez lineáris egyenletrendszer $\mathbf{p}$ -re, amelyet elsőnél magasabb fokú esetben az együtthatómátrix invertálásával célszerű megoldani.

Az adott feladat esetében az évek közvetlenül is behelyettesíthetők x_n helyébe. Ez azonban numerikusan kedvezőtlen, érdemes az értékekből 1900-at levonni, és az $1 \dots 100$ változók felett kiértékelni a polinomokat.

- Nulladfokú polinom. Ez esetben konstanszt illesztünk, amely nem más, mint a 100 adat átlaga:

$$P_0 = m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n = 35.12 \text{ nap} \quad (24)$$

- Elsőfokú polinom. Az előadáson megismert levezetéssel:

$$P_1(1) = \frac{N \sum_{n=1}^N y_n x_n - \sum_{n=1}^N x_n \sum_{n=1}^N y_n}{N \sum_{n=1}^N x_n^2 - \left(\sum_{n=1}^N x_n \right)^2} = -0.06726 \frac{\text{nap}}{\text{év}} \quad (25)$$

$$P_1(2) = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^N y_n - P_1(1) \sum_{n=1}^N x_n \right] = 38.52 \text{ nap}$$

- Másodfokú polinom. A gradiens kiértékelése az alábbi egyenletrendszerre vezet:

$$\mathbf{D}\mathbf{p} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{D}_{ij} = \sum_{n=1}^N x_n^{[(3-i)+(3-j)]}, \quad \mathbf{d}_i = \sum_{n=1}^N y_n x_n^{(3-i)}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (26)$$

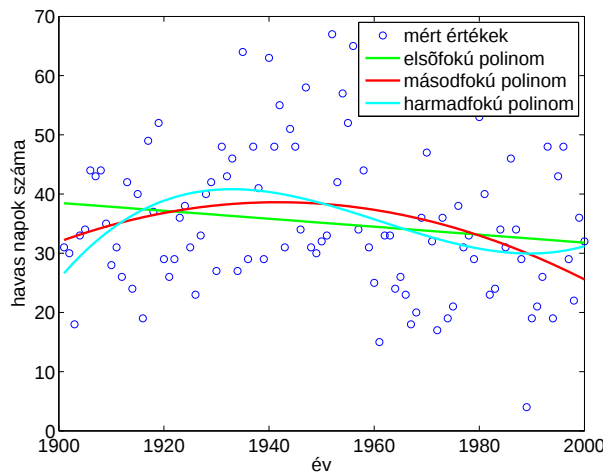
Az egyenletrendszer megoldása adja a kérdéses együtthatókat:

$$\mathbf{p} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{d} \quad (27)$$

A konkrét értékek:

$$P_2(1) = -0.003842 \frac{\text{nap}}{\text{év}^2}, \quad P_2(2) = 0.3208 \frac{\text{nap}}{\text{év}}, \quad P_2(3) = 31.92 \text{ nap} \quad (28)$$

A görbeillesztés eredménye az alábbi ábrán látható.



A konstanszt az áttekinthetőség kedvéért nem rajzoltuk be. Az elsőfokú polinom egy enyhe csökkenő tendenciát mutat, a másodfokú követi azt a változást, amelyet az adatokon láthatunk, hogy a múlt század közepén megnőtt a havas napok száma. A harmadfokú polinom a kezdeti növekedés, majd csökkenés után a század végére növekvő tendenciát mutat.

Melyik interpretáció a helyes?

Elsőként kérdés, hogy miért nem illesztünk magasabb fokú polinomot (negyedfokút, tizedfokút, vagy még magasabb fokút)? A 100 pontra 99-edfokú polinom nulla hibával illeszthető (a 100 pont egyértelműen meghatározza a 99-edfokú polinomot). Miért nem alkalmazzuk ez utóbbit? Azért, mert ezzel nem kaptunk volna több információt, mint magukkal az adatokkal. Ilyen magas fokszám akkor indokolt, ha *interpolációs* feladatot oldunk meg, azaz a pontok között szeretnénk tudni egy függvény viselkedését. Jelen esetben nem erről van szó, inkább a trendeket szeretnénk vizsgálni.

A trendek az alacsonyabb fokszámú polinom segítségével elemezhetők. Segítség lehet, ha ismert a fizikai effektus, és ennek alapján becsülhető, hogy hányadfokú polinom illik az adatokra, amelyek azonban a zaj miatt szóródnak. Ez esetben természetesen más függvény (pl. szinuszos függvény) is illeszthető, és a feladatot arra kell megoldani. Mivel itt ilyen effektus nem ismert, polinomból indultunk ki.

Az elsőfokú polinom jól mutat egy trendet, de látszik, hogy a csekély negatív meredekség az adatok nagy szórása mellett mutatható ki. A kiértékelésbe itt be kell kapcsolni az előző számítás eredményét: bár a század elejéhez képest a végére az egyenes illesztése csökkenést mutat, az eltérés nem szignifikáns.

A másod- és harmadfokú polinom a század végére ellentétes tendenciát mutat: a másodfokú polinom szerint a csökkenés folytatódik, míg a harmadfokú szerint újra növekszik a havas napok száma. Ezzel elérkeztünk oda, hogy az illesztett görbék az adatok által meghatározott intervallumon kívül is mutatnak összefüggést az x és y értékek között, azaz *extrapolálni* lehet. Jelen esetben pl. jóslhatunk arra vonatkozóan, hogy a XXI. század elején hogyan alakul a havas napok száma. (Mivel már van 17 pontunk, a jóslat ellenőrizhető is.) Az extrapolációval azonban vigyázni kell, mert a polinom viselkedését az intervallumtól nagyobb távolságban a legmagasabb hatvány határozza meg: néhány évtized múlva a másodfokú polinom szerint nulla, sőt negatív számú havas nap lesz, míg a harmadfokú szerint az évi 365 napot is meghaladja. Mindkettő nyilvánvalóan téves, de a közeli pár évre érvényes lehet. Minél magasabb fokszámú a polinom, annál könnyebben divergál, ezért is „szeretik” az egyenes illesztését, amely kisebb kockázatot jelent.

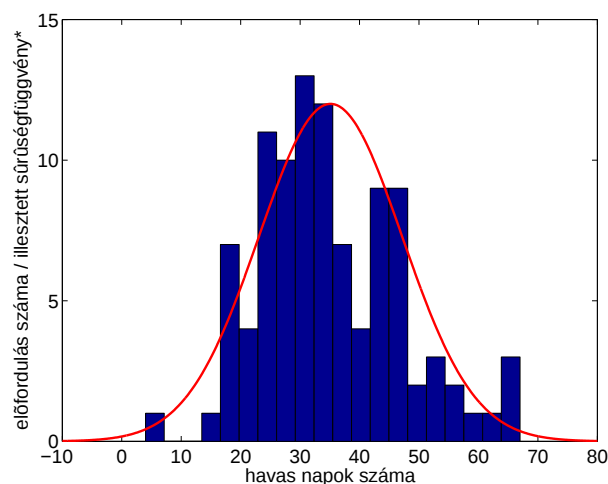
(2 pont)

Kiegészítések, megjegyzések.

1. A példa kiírásában leszögeztük, hogy az adatok normális eloszlást követnek. Precíz vizsgálat esetén ezt ellenőrizni is kell, a normalitás vizsgálatára sokféle tesztet kidolgoztak. Nem elvetendő ugyanakkor az adatok vizuális ellenőrzése sem. Az összes mérési adat alapján számított átlag és tapasztalati szórás:

$$\hat{\mu} = m = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} y_i = 35.12 \text{ nap}, \quad \hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{1}{99} \sum_{i=1}^{100} (y_i - m)^2} = 12.06 \text{ nap} \quad (29)$$

A nagyszámú adat miatt tekinthetjük úgy, hogy a várható érték és a szórás pontos becslőjét számítottuk ki. (Érdekes az átlagot és a szórást a (13) értékekkel összevetni, az eltérés csekély.) A várható érték és a szórás alapján felrajzolható a sűrűségfüggvény, amelyet az alábbi ábrán a mért értékek hisztogramjába rajzoltunk be:



A sűrűségfüggvényt természetesen függőleges tengely mentén felskáláztuk, hogy a hisztogrammal jól összevethető legyen, így a görbe alatti terület nem egységnyi. Az illeszkedés elfogadható. Érdekes megfigyelni, hogy a mért értékek milyen intervallumba esnek, és az illesztett sűrűségfüggvény milyen intervallumot jelöl

ki. Mivel a havas napok száma nem lehet negatív, a nulla elvi határnak tekinthető, és ez most majdnem pontosan a háromszoros szórásnál helyezkedik el. Tehát elenyésző a valószínűsége az illesztett normális eloszlás szerint is, hogy negatív számú havas nap forduljon elő, ami megnyugtató.

Jól mutatja a példa azt is, hogy a feltételezett eloszlás csak egy modell. A normális eloszlás (akármilyen, a fentnél jobb egyezés esetén is) megenged negatív értékeket és 365-nél nagyobb értékeket is, még ha a valószínűség csekély is. Számunkra az a lényeges, hogy a mért értékek intervallumában az illeszkedés megfelelő.

2. A szignifikanciavizsgálatnál az egyoldalú konfidenciaintervallumnál megismert eljárást alkalmaztuk, ugyanis csak az egyik irányban való eltérés valószínűségét kerestük.
3. Az ötvenes évek 1951-től 1960-ig tartottak. Ez jól látszik, ha az 1901-től 2000-ig tartó éveket tízes csoportokba rendezzük, mert akkor egy csoport első tagja mindig 1-esre végződő év. Végző soron ez összefügg azzal, hogy a századok hivatalosan az 1-es évben kezdődnek és a következő kerek 100-asban fejeződnek be.