

Méréstechnika házi feladat 1. Megoldás

2017. tavasz

1. A mérés megtervezését meg kell előzzé a specifikáció elemzése, továbbá néhány hibaforrás számbavétele, mert ezek alapján néhány megoldás eleve elvethető.

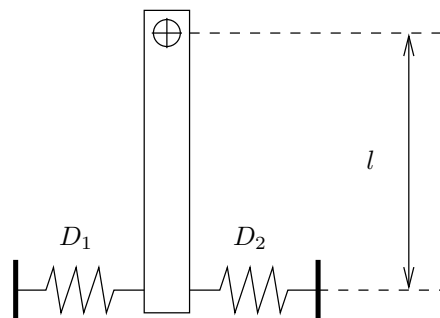
A specifikációból következő első következtetések az alábbiak:

1. Mivel az ajtó nem vehető le, tömege nem mérhető meg. Ez kizárja a definíció alapján (tömeg, geometriai méretek) történő mérést.
2. Az ajtó nem tekinthető állandó keresztmetszetű, homogén tömegeloszlású merev testnek. Ez nemcsak a definíció szerinti mérést nehezíti meg, hanem más mérési módszerek alkalmazhatóságát is szűkíti.

Világos, hogy az ajtó mozgása, mozgatása révén jutunk a tehetetlenségi nyomatékhoz. Az itt előforduló hibakomponensek a következők:

1. A mérésben bizonyosan hibát fog okozni a zsanérok súrlódása. Ezt kenőanyag alkalmazásával jelentősen csökkenthetjük.
2. Amennyiben a mérés során az ajtó egyes részei „viszonylag” nagy sebességre gyorsulnak fel, számítani kell a közegellenállás csillapító hatására, amely sebességfüggő hibát okoz. Kiküszöbölése a specifikáció értelmében nem lehetséges (pl. nem mérhetünk vákuumban).
3. Amennyiben állandó nyomatékkal kívánjuk az ajtó szöggyorsulását elérni, gondolni kell rá, hogy a nyomaték szögfüggő lehet.
4. Amennyiben rugalmas vagy rugalmatlan ütközéssel adunk át mozgásmennyiséget (és egyúttal energiát) az ajtónak, gondolni kell rá, hogy az ütközések sajnos messze nem lesznek ideálisak.

Egy jó megoldás lehet az ajtót ismert állandójú rugókhöz kötni, a rugók másik végét pedig rögzíteni az alábbi ábra szerint:



Az ajtót kis amplitúdójú rezgésbe kell hozni, és mérni a rezgés periódusidejét. A rezgés saját-körfrekvenciája a következő lesz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}} \quad (1)$$

ahol D^* a torziós rugóállandó, a rugóállandókból egyszerűen számítható:

$$D^* = l^2(D_1 + D_2) \quad (2)$$

Két rugót azért feltételeztünk, mert a rugók általában vagy csak húzásra, vagy csak nyomásra készülnek, de ez nem tartozik a megoldás elvi alapjaihoz. Figyelembe véve, hogy $\omega_0 = 2\pi/T$, a T periódusidő mérése után a tehetetlenségi nyomaték kifejezése:

$$\Theta = \frac{l^2 T^2}{4\pi^2} (D_1 + D_2) \quad (3)$$

A rugóállandókat úgy kell megválasztani, hogy a frekvencia ne legyen túl nagy, ugyanis ekkor az egyensúlyi helyzet környezetében az ajtó sebessége nagy lenne, és ezzel a közegellenállás csillapító hatása is.

A mérésben véletlen hibát okozhat a geometriai adatok és a rugóállandók pontatlan ismerete, valamint az időmérés hibája. Ugyanakkor ezek a komponensek feltehetően elmaradnak a súrlódás és a közegellenállás okozta rendszeres hibától. A ténylegesen mért frekvencia a rezonanciafrekvencia lesz:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (4)$$

ahol ζ a csillapítási együttható. Kis csillapítás esetén $\omega_r \approx \omega_0$, ezért a közelítés jogos. Ha korrigálni akarjuk ezt a rendszeres hibát, meg kell mérni a csillapítást, amelyet a rezgés lecsengési idejének (amplitúdójának nullához tartása) mérése után becsülhetünk.

(4 pont)

Pontozás. A feladatra több, elvileg is különböző megoldás adható. A specifikációt nem teljesítő megoldások nulla pontot érnek. A fentitől különböző megoldások attól függően kapnak rész- vagy teljes pontszámot, hogy az előzetesen felsorolt hibaforrásokat mennyire tudják kiküszöbölni, illetve a kidolgozás (képletek, hibaforrások elemzése) mennyire teljes.

2. Az impedancia kifejezése:

$$Z = R + j\omega L, \quad \omega = 2\pi f \quad (5)$$

A megadott adatok alapján:

$$|Z| = 377.00 \, \Omega, \quad \varphi = 1.5654912 \quad (6)$$

(1 pont)

A fázisszöget a későbbiek kedvéért szokatlanul sok tizedesjegyre adtuk meg. Mivel

$$Z = |Z|[\cos \varphi + j \sin \varphi] = R + j\omega L \quad (7)$$

Az ellenállás kifejezése az ellenőrzéshez:

$$R = |Z| \cos \varphi \quad (8)$$

Néhány értelmesnek tűnő kerekített szögeértékre a fenti kifejezést kiértékelve az alábbiakat kapjuk:

φ	$R \, (\Omega)$
1.57	0.3002
1.565	2.1852
1.5655	1.9967

Az első ellenállásérték használhatatlanul rossz, a második jobb, de még az is jelentős hibával közelíti az eredeti értéket. Az utolsó már jó, igen kis hibával visszaadja a $2 \, \Omega$ -ot. Ehhez a szöget 5 tizedes pontossággal kellett megadni. (Ehhez kis szerencsére is szükség volt, mert a kerekítés csak igen kis hibát eredményez a szög értékében.) (1 pont)

A magyarázat az, hogy $\varphi = \pi/2$ közelében a (8) kifejezés nagyon érzékeny φ -re:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta |Z|}{|Z|} + \tan \varphi \Delta \varphi \quad (9)$$

Tehát $|Z|$ -ot annyi tizedesre kell megadni, amennyire R -et ismerni szeretnénk, de mivel az adott szög mellett $\tan \varphi \approx 188$, φ -t több mint 2 nagyságrenddel pontosabban kell megadni. (1 pont)

3. A Stefan–Boltzmann-törvény alapján a feketetest sugárzása:

$$P = \sigma T^4 \quad (10)$$

ahol T a feketetest abszolút hőmérséklete kelvinben. Mivel azonban a környezet is sugároz a feketetestre, ezt is figyelembe véve a kiáramlott teljesítmény:

$$P = \sigma(T^4 - T_0^4) \quad (11)$$

ahol T_0 a környezet abszolút hőmérséklete kelvinben. (1 pont)

A fenti egyenletet kifejtve:

$$P = \sigma T^4 - \sigma T_0^4 \quad (12)$$

A feladat nyilván a mérési pontokra a fenti egyenletnek megfelelő görbe illesztése. Ez azonban nem oldható meg egyszerűen egy $f(x) = ax^4 + b$ egyenletű görbe illesztésével, mert a és b nem független. A problémát az illesztési feladat pontosításával oldhatjuk meg. Általánosan tekintsük az

$$y = a(x^n + b) = ax^n + ab \quad (13)$$

illesztendő függvényt, ahol b ismert, és egyedül a -t kell optimalizálni. Ehhez a szokásos módon a négyzetes költségfüggvényt felírva a következőt kapjuk:

$$C = \sum_{i=1}^N (ax_i^n + ab - y_i)^2 \quad (14)$$

Ennek minimuma van, ha

$$\frac{\partial C}{\partial a} = 0 \quad (15)$$

Ennek megoldása:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^n y_i + b \sum_{i=1}^N y_i}{b^2 N + \sum_{i=1}^N x_i^{2n} + 2b \sum_{i=1}^N x_i^n} \quad (16)$$

A hőmérsékleti sugárzás esetére alkalmazva:

$$a = \sigma, \quad b = T_0^4, \quad n = 4, \quad x = T, \quad y = P \quad (17)$$

Tehát:

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^N T_i^4 P_i + T_0^4 \sum_{i=1}^N P_i}{T_0^8 N + \sum_{i=1}^N T_i^8 + 2T_0^4 \sum_{i=1}^N T_i^4} = 1.2529 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \quad (18)$$

(2 pont)

Megjegyzés. A mérési adatok pontatlansága miatt az állandóra vonatkozó mérés igen jelentős hibájú. A helyes érték: $\sigma = 5.6697 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$.