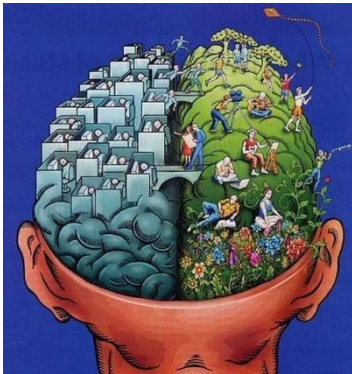




Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Méréstechnika és Információs rendszerek Tanszék

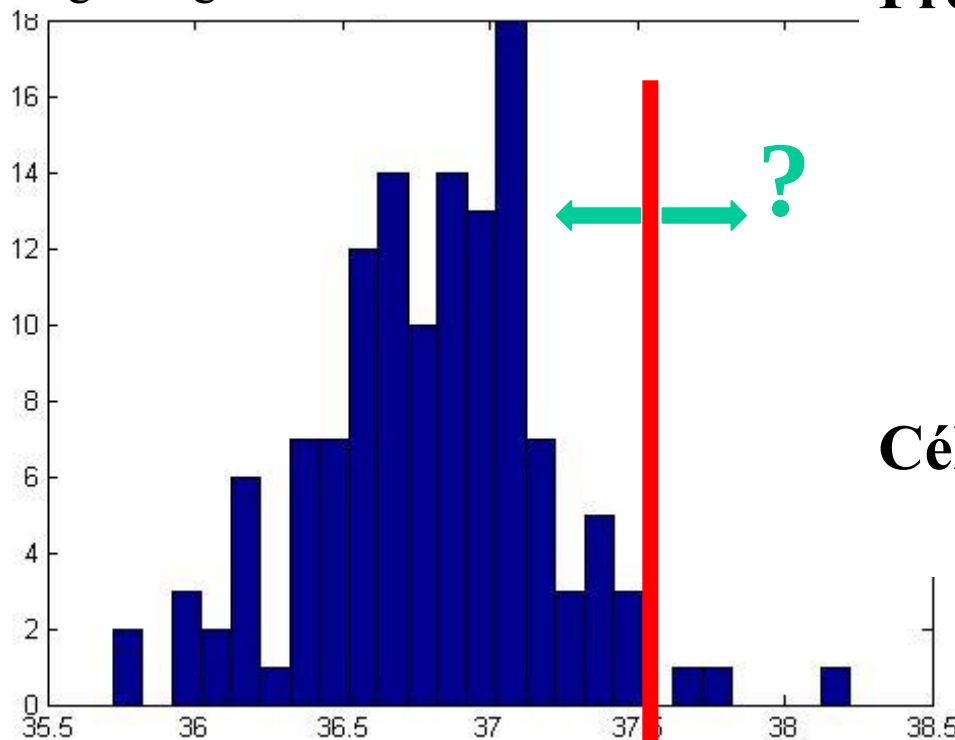


Döntés, hibák, költségek

Előadó: Dr. Hullám Gábor

Előadás anyaga: Dr. Dobrowiecki Tadeusz
Dr. Pataki Béla

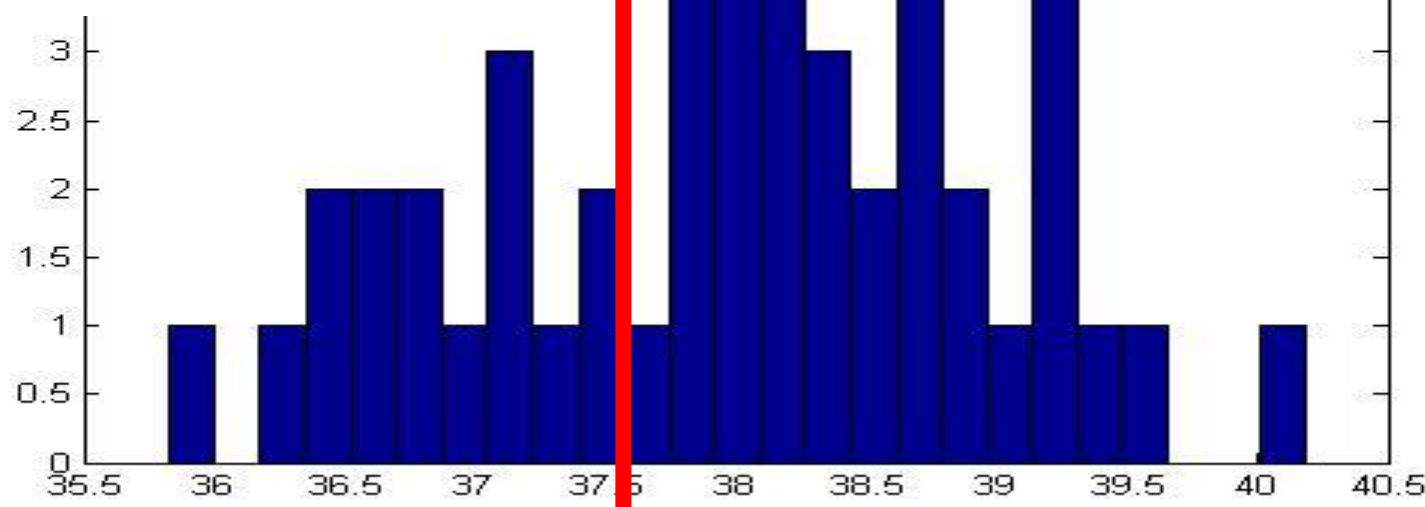
Egészséges emberek testhőmérséklete



Probléma: döntést kell hoznunk, egy numerikus paraméter értéke alapján arról, hogy milyen esettel állunk szemben. (pl. testhőmérséklet alapján, hogy egészséges vagy beteg?)

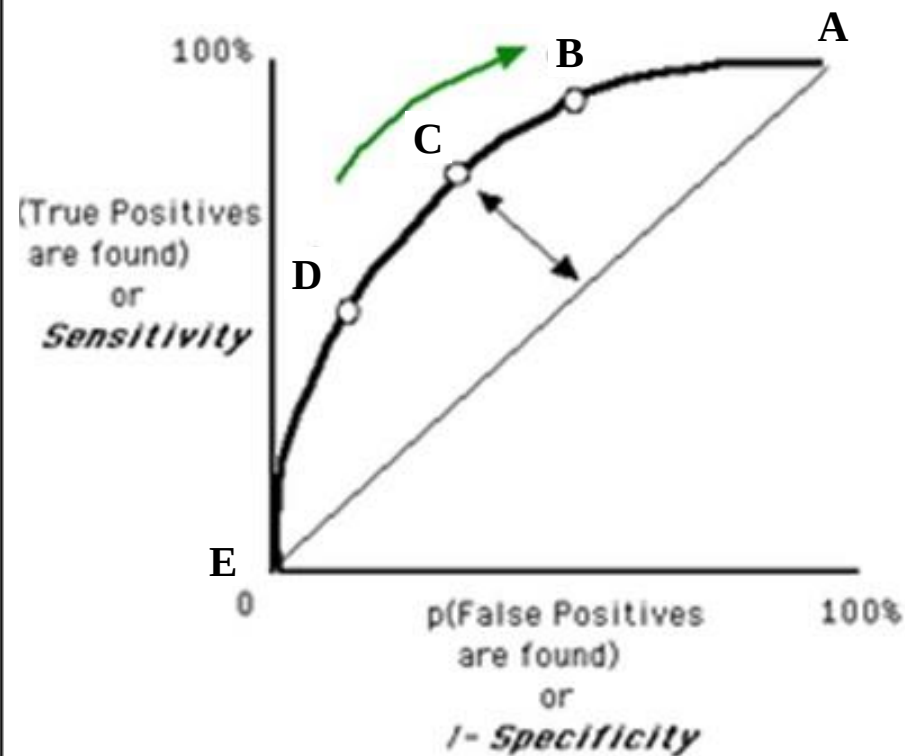
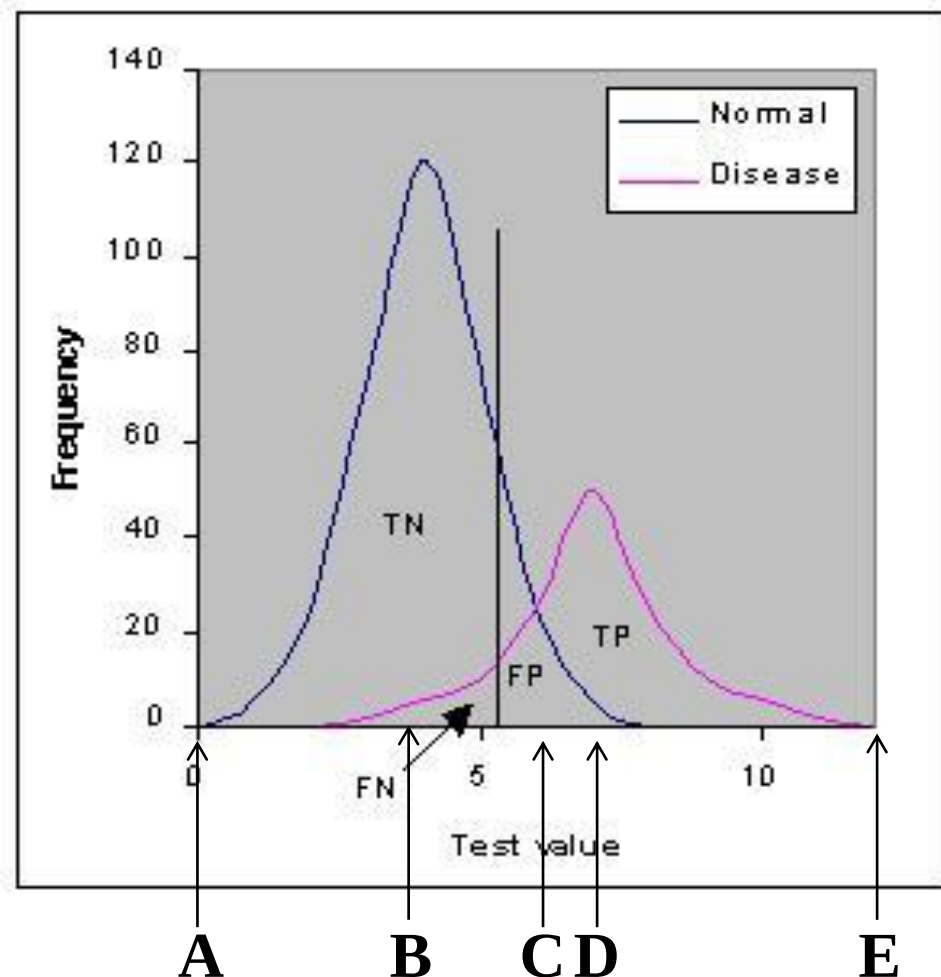
Cél: rájönni, mi a teszt (optimális) küszöb értéke.

Beteg emberek testhőmérséklete



ROC: Vevő működési karakterisztika

Receiver Operating Characteristic



A küszöb fölött betegnek tekintjük, alatta egészségesnek

Hiba (confusion) mátrix

true positive rate (**TPR**)

$$\text{TPR} = \text{TP}/P = \text{TP} / (\text{TP} + \text{FN})$$

false positive rate (**FPR**)

$$\text{FPR} = \text{FP}/N = \text{FP} / (\text{FP} + \text{TN})$$

ROC: Vevő működési
karakterisztika

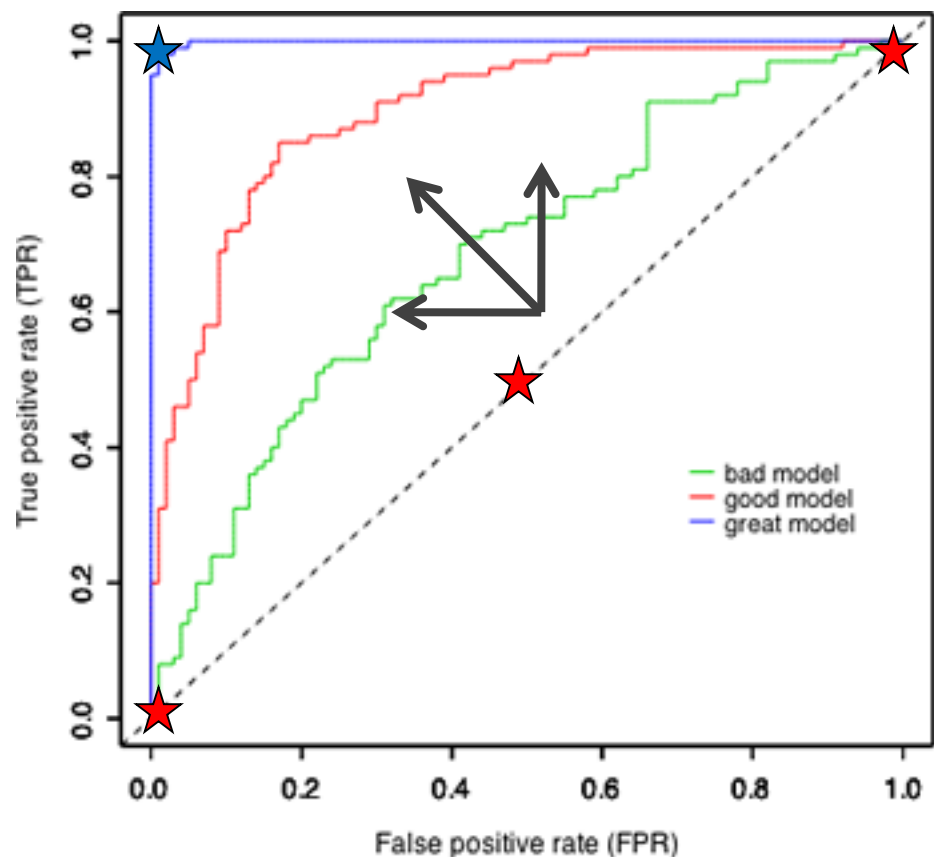
**Receiver Operating
Characteristic (curve)**

AUC: Görbe alatti terület
Area Under Curve

Döntés

Tények

	Tények	
	Beteg	Egész- séges
Beteg	TP	FP
Egész- séges	FN	TN



Mi a helyzet, ha a tévedéseknek különböző a költsége?

1. típusú hiba hamis negatív (FN)

- azt hisszük egészséges (H_0), pedig beteg (T_1)
- azt hisszük barát pedig ellenség

költség: C_{01} (későn vesszük észre a bajt,
bonyolult műtét vagy kezelés kell, azt hittük barát,
pedig ellenség és lebombázza a hidat/gyárat)

2. típusú hiba hamis pozitív (FP)

- azt hisszük beteg (H_1), pedig egészséges (T_0)
- azt hisszük ellenség pedig barát

költség: C_{10} (feleslegesen kezeljük vagy vizsgáljuk az
egészségest, a baráti gépet lelőjük vagy
vadászpilótákat ezt-azt küldünk rá)

legtöbbször a hamis negatív a rosszabb: $C_{01} \gg C_{10}$

Ráadásul a helyes döntéseknek is van költsége!

valós negatív (TN)

- azt hisszük egészséges (H_0), valóban az (T_0)
- azt hisszük barát, és tényleg

költség: C_{00} vizsgálatot kell végeznünk

- orvosi szűrés, program teszt, katonai radar

valós pozitív (TP)

- azt hisszük beteg (H_1), valóban az (T_1)
- azt hisszük ellenség, és tényleg

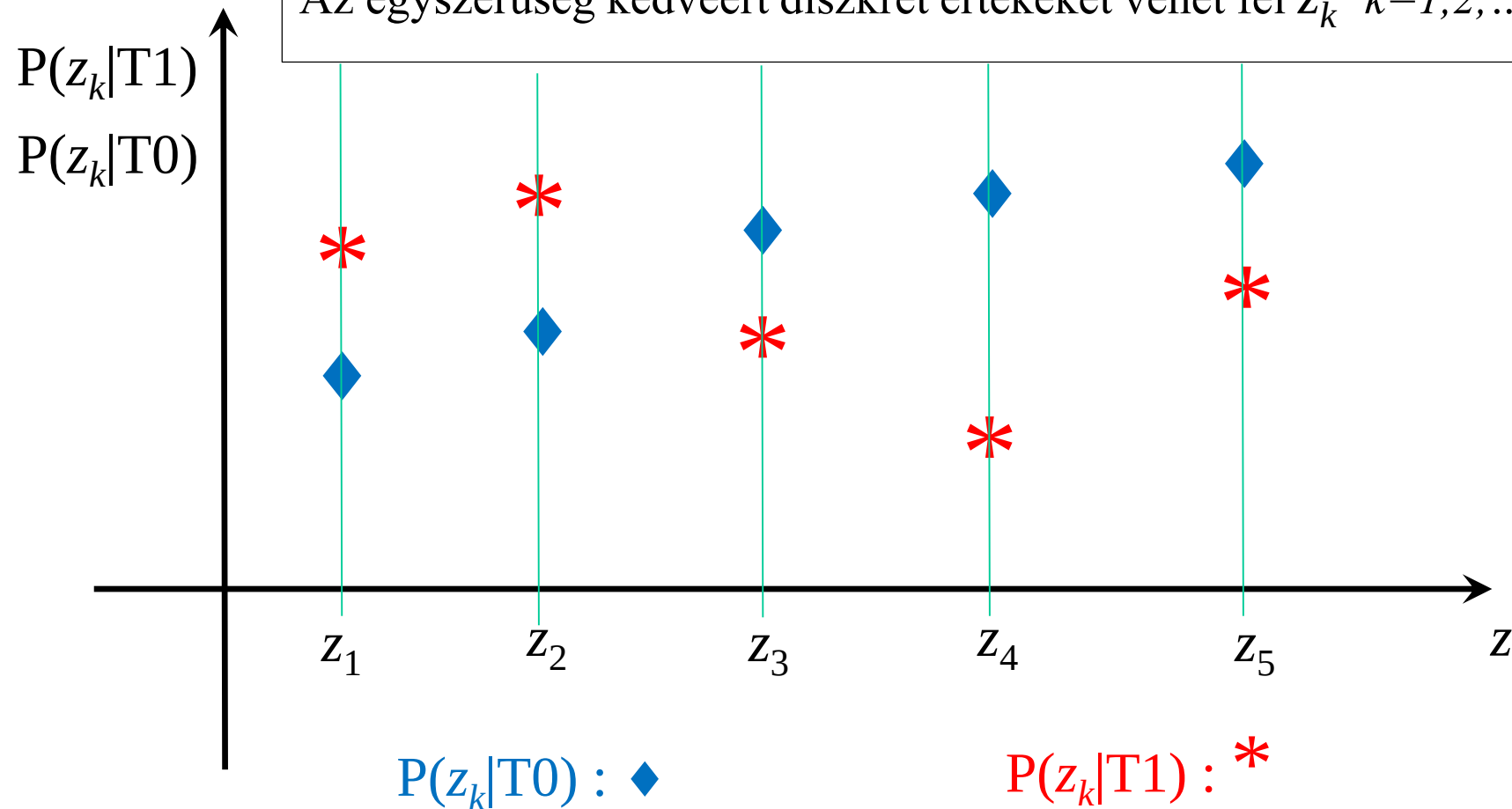
költség: C_{11} vizsgálatot kell végeznünk + kezelniük kell

- orvosi szűrés, program teszt, katonai radar
+ kezelés, légvédelmi rakéta, hibajavítás

tehát négyféle költség befolyásolja a döntést:

C_{00} , C_{11} , C_{01} , C_{10}

Skalár mért vagy származtatott paraméter, ami alapján döntünk : z
Az egyszerűség kedvéért diszkrét értékeket vehet fel $z_k \quad k=1,2,\dots,K$



Hogyan becsülhetjük meg ezeket az arányokat?

Egy tesztet végzünk (vagy az eddigi adatokból összegyűjtünk egy megfelelően nagy mintát).

Tudnunk kell, hogy milyen arányban produkálják a negatív és pozitív esetek az egyes lehetséges z értékeket.

Ezért tesztelünk N_T esetet, ezek közül N_N tartozik a negatív, N_P a pozitív csoportba ($N_N + N_P = N_T$)

Fontos: a tesztben sokszor nem ugyanaz a negatív és pozitív esetek aránya, mint a teljes népességben (utóbbiak később: P0 és P1).

k	1	2	3	4	5	Σ
z_k	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	
z_k -t produkál az negatív esetek közül	N_{N1} (pl. 1200)	N_{N2} (pl. 3100)	N_{N3} (pl. 4500)	N_{N4} (pl. 2700)	N_{N5} (pl. 1820)	$N_{N1} + N_{N2} + \dots$ $\dots + N_{N5} =$ $= N_N$ ($N_N = 13320$)
$P(z_k T0)$	$\frac{N_{N1}}{N_N} \left(= \frac{1200}{13320} \right)$	$\frac{N_{N2}}{N_N}$	$\frac{N_{N3}}{N_N}$	$\frac{N_{N4}}{N_N}$	$\frac{N_{N5}}{N_N}$	1
z_k -t produkál a pozitív esetek közül	N_{P1}	N_{P2}	N_{P3}	N_{P4}	N_{P5}	$N_{P1} + N_{P2} + \dots$ $\dots + N_{P5} =$ $= N_P$
$P(z_k T1)$	$\frac{N_{P1}}{N_P}$	$\frac{N_{P2}}{N_P}$	$\frac{N_{P3}}{N_P}$	$\frac{N_{P4}}{N_P}$	$\frac{N_{P5}}{N_P}$	1

Ha a populáció N elemű, és ebből a negatívok aránya $P_0 = \frac{N_0}{N}$, akkor a negatív esetek száma $N_0 = P_0 \cdot N$.

Az N_0 negatív esetből z_k értéket produkál $N_0 \cdot P(z_k|T0)$ eset.

A pozitív esetek aránya $P_1 = \frac{N_1}{N}$, akkor a pozitív esetek száma $N_1 = P_1 \cdot N$.

Az N_1 pozitív esetből z_k értéket produkál $N_1 \cdot P(z_k|T1)$ eset.

Ha úgy döntünk, hogy z_k esetén pozitívnak véleményezzük az ismeretlen esetet, akkor a költségünk:

$$\begin{aligned} K1 &= C_{10} \cdot N_0 \cdot P(z_k|T0) + C_{11} \cdot N_1 \cdot P(z_k|T1) = \\ &= C_{10} \cdot P_0 \cdot N \cdot P(z_k|T0) + C_{11} \cdot P_1 \cdot N \cdot P(z_k|T1) \end{aligned}$$

Ha úgy döntünk, hogy z_k esetén negatívnak véleményezzük az ismeretlen esetet, akkor a költségünk:

$$\begin{aligned} K2 &= C_{00} \cdot N_0 \cdot P(z_k|T0) + C_{01} \cdot N_1 \cdot P(z_k|T1) = \\ &= C_{00} \cdot P_0 \cdot N \cdot P(z_k|T0) + C_{01} \cdot P_1 \cdot N \cdot P(z_k|T1) \end{aligned}$$

A kérdés tehát az, hogy melyik esetben kisebb a költség?

Ha $K_1 < K_2$ azaz

$$C_{10} \cdot P_0 \cdot N \cdot P(z_k|T0) + C_{11} \cdot P_1 \cdot N \cdot P(z_k|T1) < C_{00} \cdot P_0 \cdot N \cdot P(z_k|T0) + C_{01} \cdot P_1 \cdot N \cdot P(z_k|T1)$$

átrendezve:

$$(C_{10} - C_{00}) \cdot P_0 \cdot N \cdot P(z_k|T0) < (C_{01} - C_{11}) \cdot P_1 \cdot N \cdot P(z_k|T1)$$

egyszerűsítve:

$$(C_{10} - C_{00}) \cdot P_0 \cdot P(z_k|T0) < (C_{01} - C_{11}) \cdot P_1 \cdot P(z_k|T1)$$

akkor minden ilyen esetet (z_k -t produkál) **pozitívnak** vesszünk.

Ha $K_1 > K_2$, akkor minden ilyen esetet (z_k -t produkál) **negatívnak** érdemes tekinteni.

A döntésünk nagy mértékben azon múlik, hogy jól becsüljük-e meg az egyes költségeket!!!

Ha C_{01} nagy, ettől félünk, akkor egész más alakul ki, mint ha C_{10} -tól félünk, azt vesszük nagynak.

Például a jog: attól félünk jobban, hogy egy ártatlant elítélnek, vagy attól, hogy egy bűnös megússza (esetleg később újra elköveti)?

Például a terrorista kérdés: attól félünk, hogy valahogy besurran egy terrorista, vagy attól, hogy jogtalanul vádolunk valakit?

Például az egészségügy: attól félünk-e jobban, hogy valakinek nem vesszük észre a betegségét, vagy attól, hogy feleslegesen ijesztgetjük, visszarendeljük vizsgálatra?