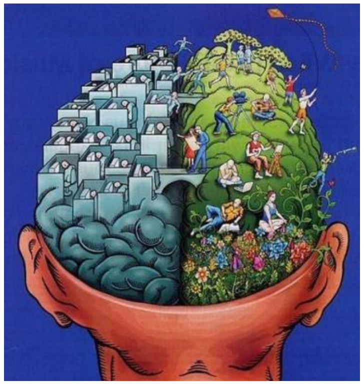
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Méréstechnika és Információs rendszerek Tanszék



Mesterséges Intelligencia - MI

Valószínűségi hálók

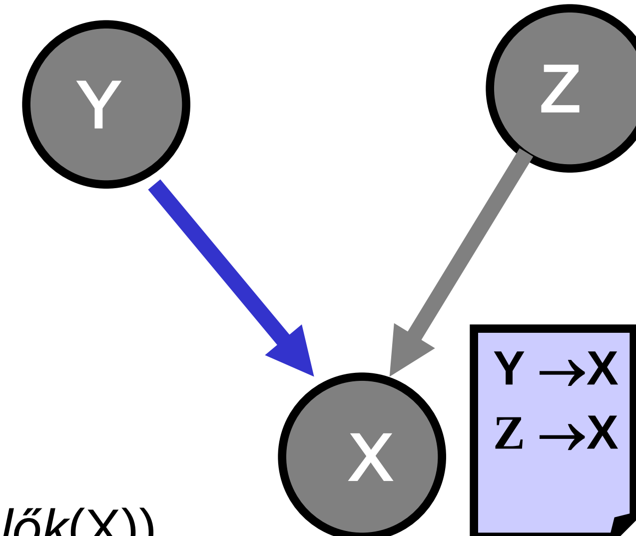
Előadó:
Hullám Gábor

Előadás anyaga:
Dobrowiecki Tadeusz

MŰEGYETEM 1782

Valószínűségi háló (Bayes-háló) → egy gráf

1. Csomópontok: valószínűségi változók egy halmaza
2. Csomópontok között: irányított élek halmaza:
   Az Y csomópontot az X csomópønttal összekötő nyíl →
   az *Y-nak közvetlen befolyása* van az *X*-re
3. Minden csomópont:
   feltételes valószínűségi tábla →
   szülők hatása a csomópontra P(X | *Szülők*(X))



4. A gráf nem tartalmaz irányított kört (= **irányított, körmentes gráf = DAG**).

Valószínűségi változó = egy állítás a problémáról

Pl. X = HMG szint magas (két érték: I/N), vagy
X = HMG szint (több érték: Magas / Közepes / Alacsony)

Példa

Otthonunkban egy új **riasztót** szereltünk fel. Ez megbízhatóan észleli a **betöréseket**, de kisebb **földrengés** esetén is jelez.
Két szomszédunk, **János** és **Mária**, megígérték, hogy **felhívnak** a munkahelyünkön, ha meghallják a riasztónkat.
János mindig felhív, ha szól a riasztó, de néha összekeveri a telefoncsörgést a riasztó csengésével és ekkor is telefonál.
Mária viszont, mivel szereti hangosan hallgatni a zenét, néha meg sem hallja a riasztót.
Mi tehát a hívások bekövetkezte vagy hiánya alapján szeretnénk megbecsülni a betörés valószínűségét.

(Bináris) változók (tények):

Betörés (megtörtént): Igen/ Nem

Földrengés (megtörtént): Igen/ Nem

Riasztás (megszólalt): Igen/ Nem

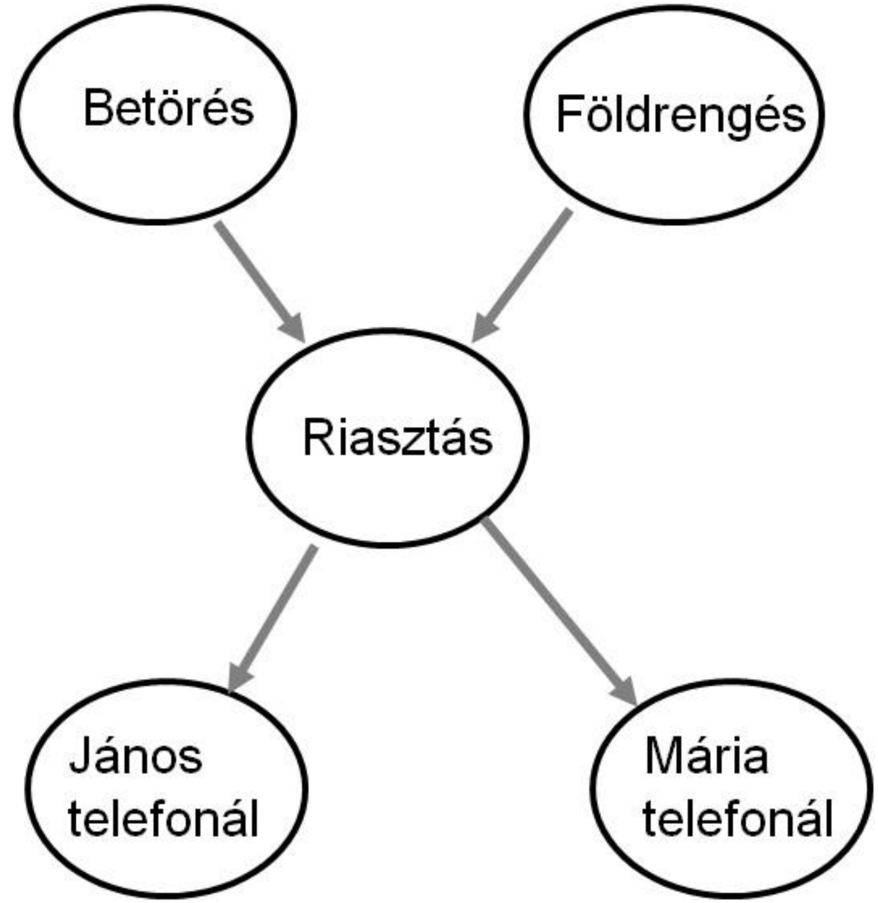
János telefonál(t-e): Igen/ Nem

Mária telefonál(t-e): Igen/ Nem

Háló topológiája = egy absztrakt tudásbázis

sok esetben érvényes marad, mivel **általános ok-okozati** folyamatokat ír le az adott problémakörben.

A betöréses háló esetén a topológia azt mutatja, hogy a betörés és a földrengés közvetlenül hat a riasztóra, befolyásolja megszólalásának valószínűségét, ellenben János vagy Mária hívásának bekövetkezése csak magán a riasztón múlik – azaz a háló tartalmazza azt a feltevést, hogy ők közvetlenül nem vesznek észre sem a betöréseket, sem a földrengéseket.



Feltételes valószínűségi tábla – FVT

minden egyes csomópontra.

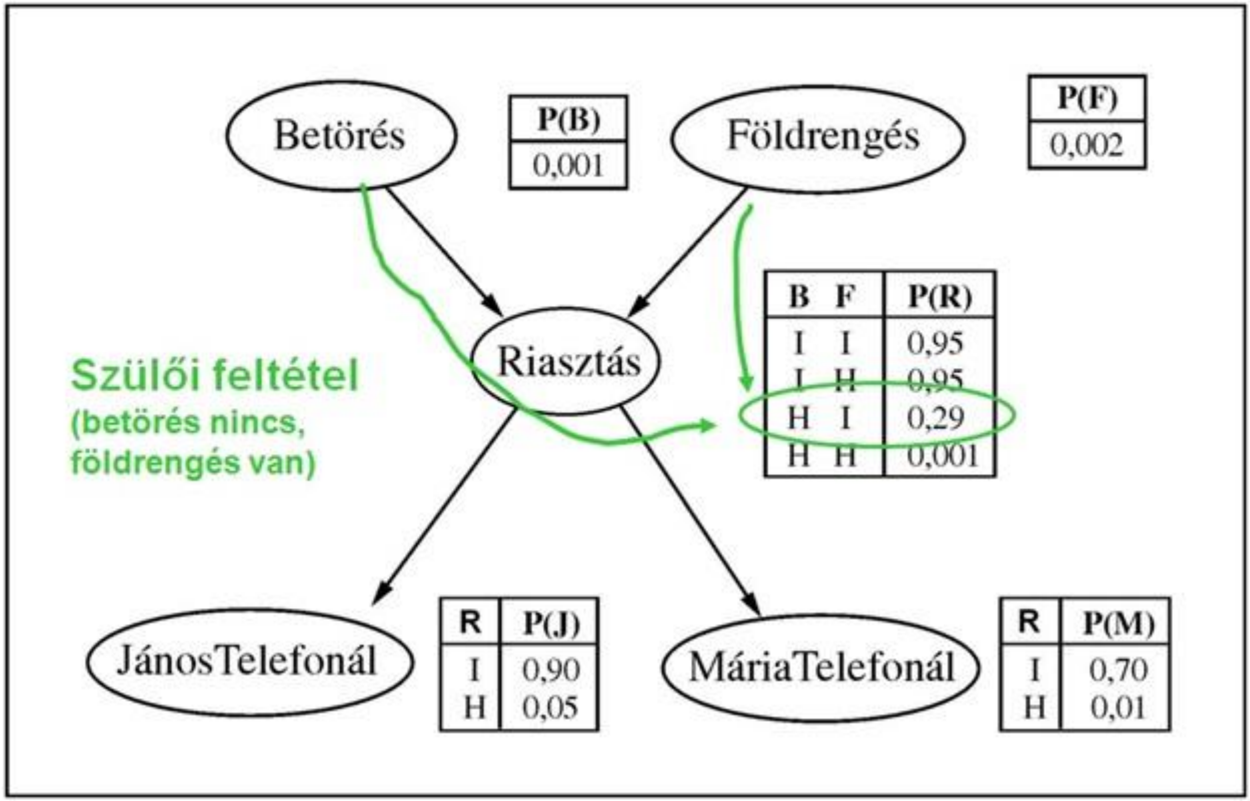
Egy sor a táblázatban az egyes csomóponti értékek feltételes valószínűsége az adott sorhoz tartozó **szülői feltétel** esetén.

Szülői feltétel: a szülő csomópontok értékeinek egy lehetséges kombinációja (**egyfajta elemi esemény a szülők között**).

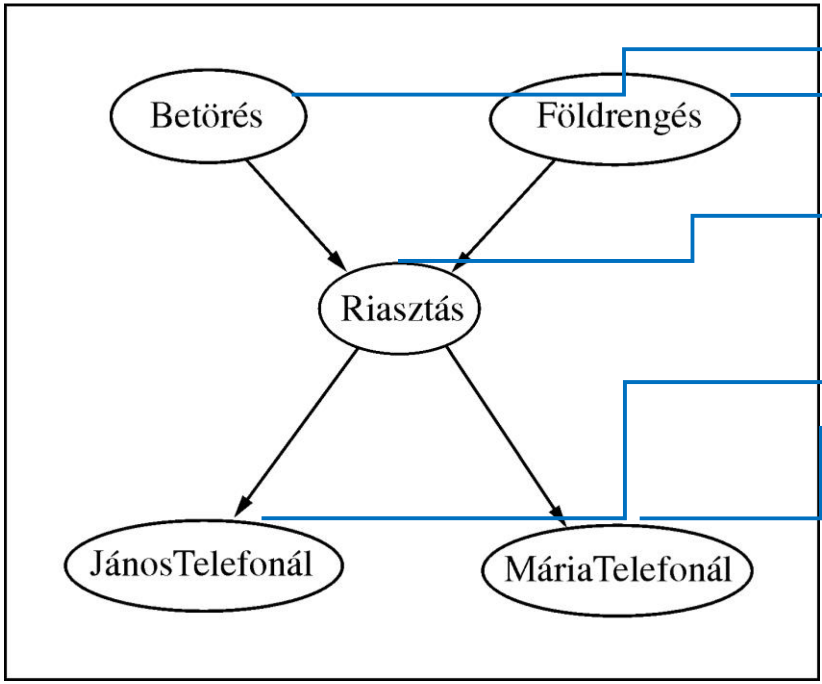
Általánosabban, ha a változó **bináris**, és ha *n* **bináris** szülője van:

2^n -1 valószínűség adható meg a feladat alapján.

Szülő nélküli csomópont – a változó egyes értékeinek a priori valószínűségei (ha bináris, akkor csak egy).



Együttes eloszlás:
5 változó
= 2^5-1 = **31 db** valószínűség



Bayes háló:
2 x 1 db a priori
\+
1 x 4 db szülői feltétel
\+
2 x 2 db szülői feltétel
= 2 + 4 + 4 = **10 db**

Elég-e?

Általános eset:

Mi van, pl. ha

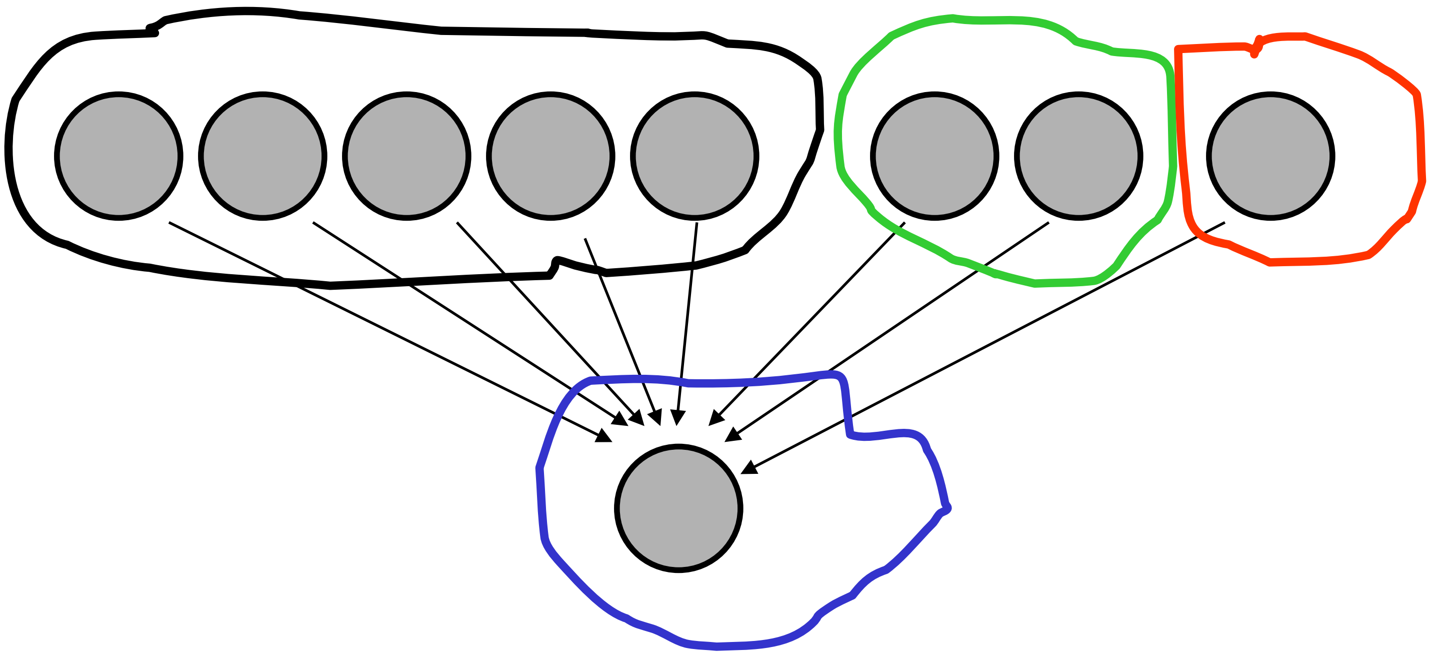
5 db szülő csomópont bináris értékű

2 db szülő csomópont 3-as értékű

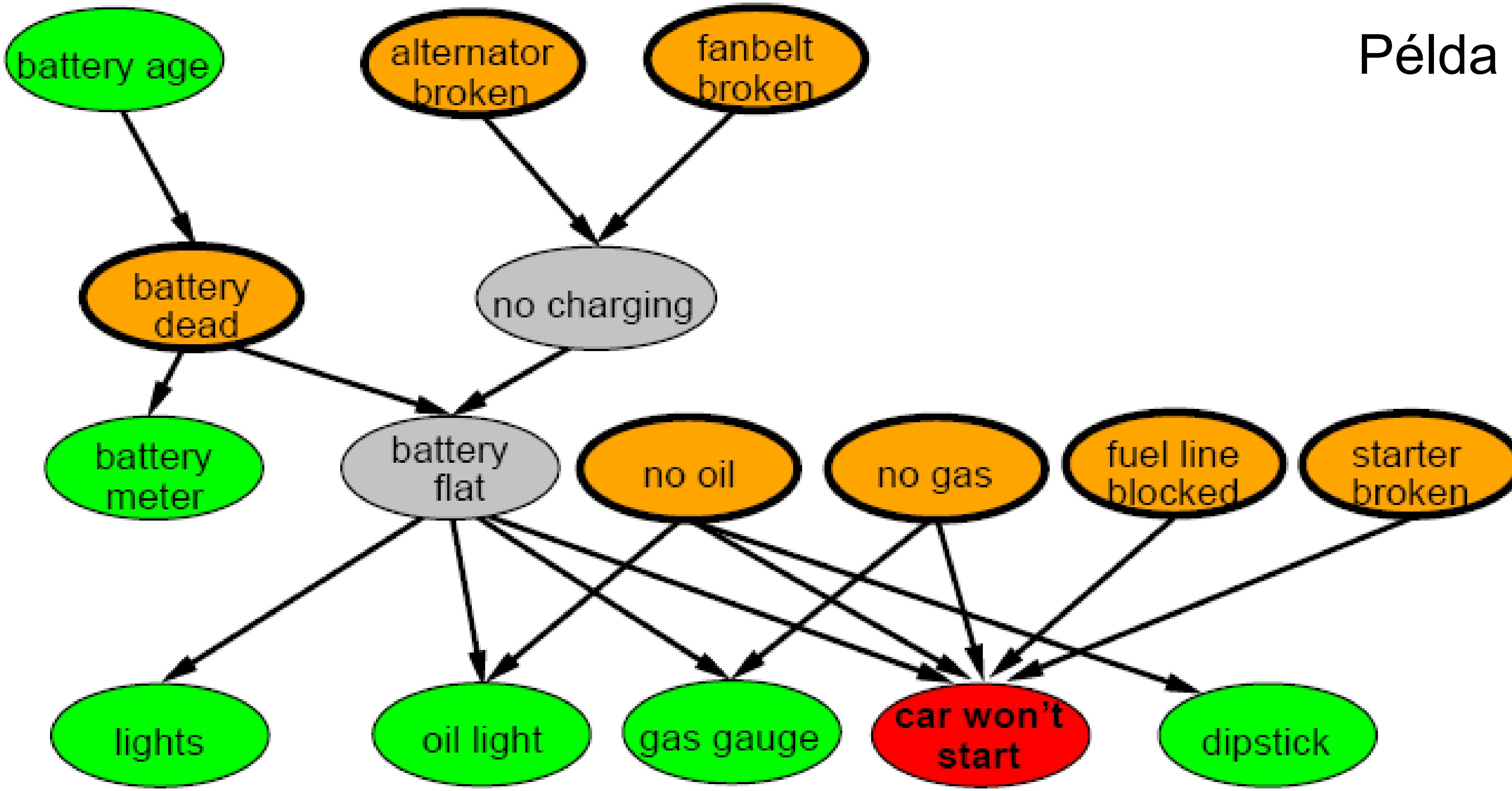
1 db szülő csomópont 4-es értékű   és

az eredmény csomópont egy 5-ös értékű

változó?

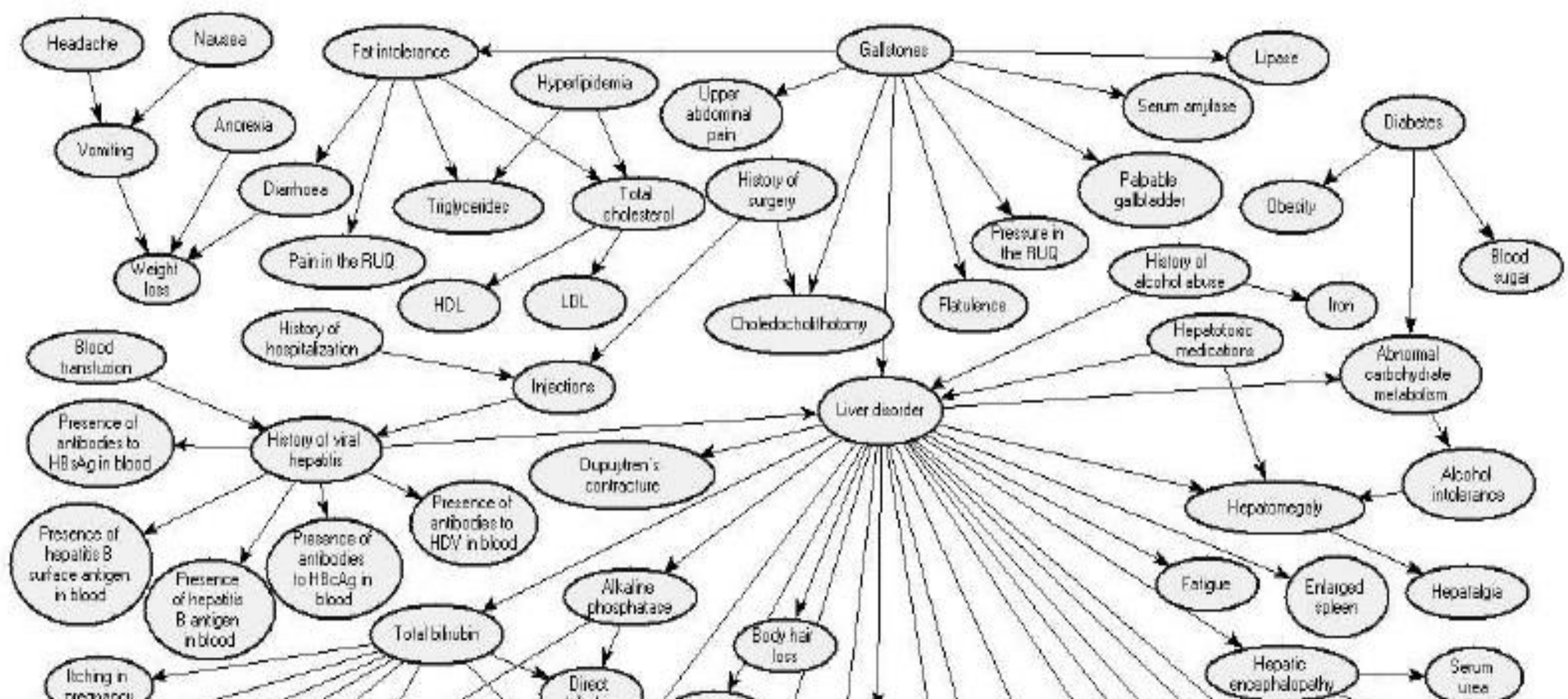


Példa



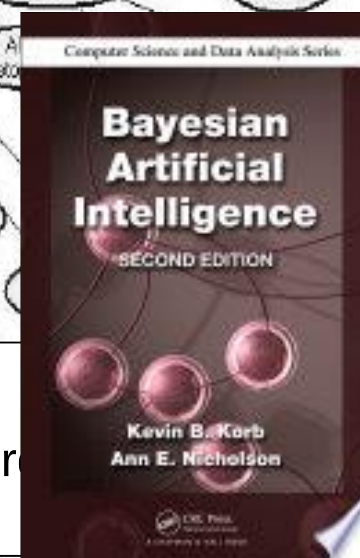
16 (bináris) változó = 2^{16}-1 = 16383 valószínűség

háló = 7 + 4 x 2 + 4 x 4 + 1 x 32 = 63 valószínűség (x 260)



Májdiagnózis

A. Onisko et al., Extension of the HEPAR II Model to Multiple-Disor
Diagnosis (2000)



Biológiai és környezeti folyamatok modellezése

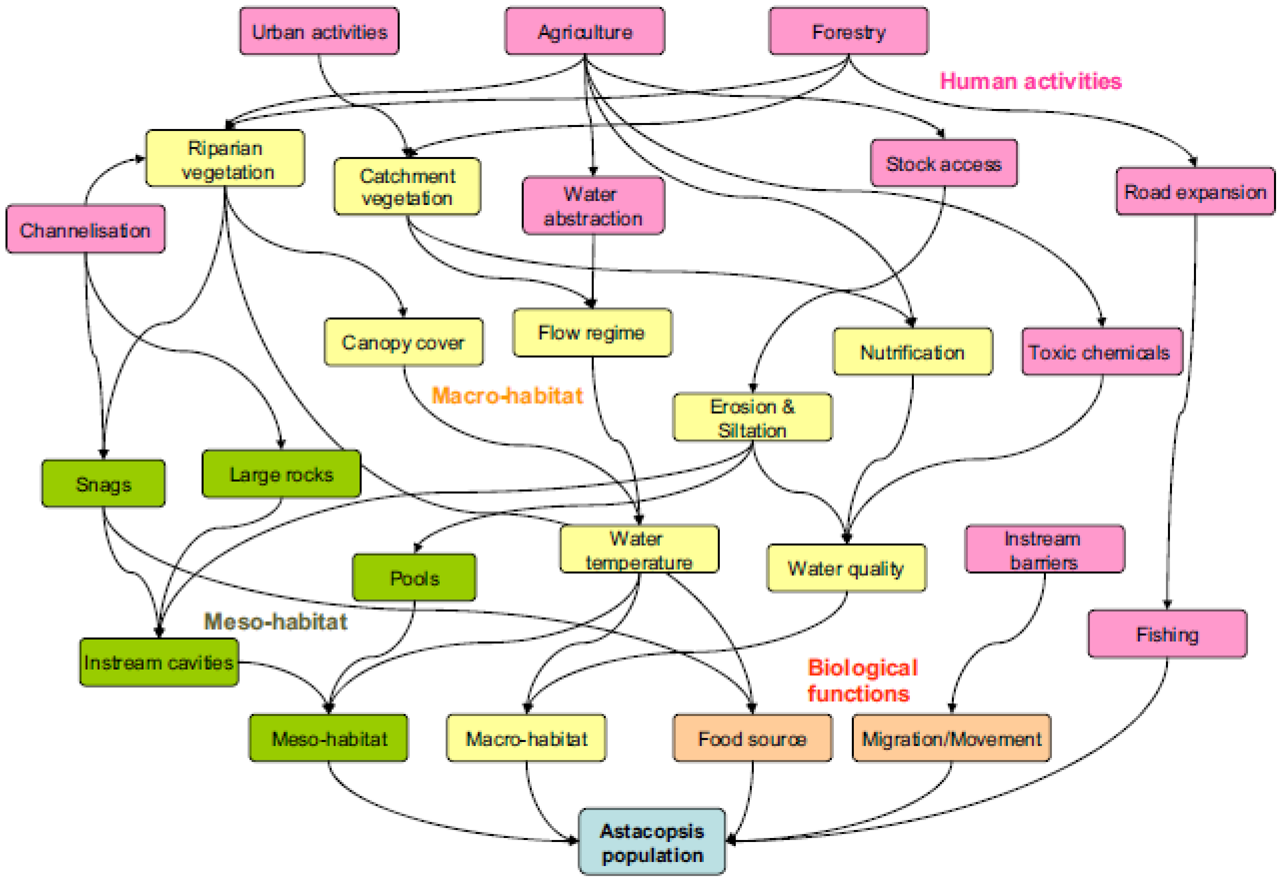
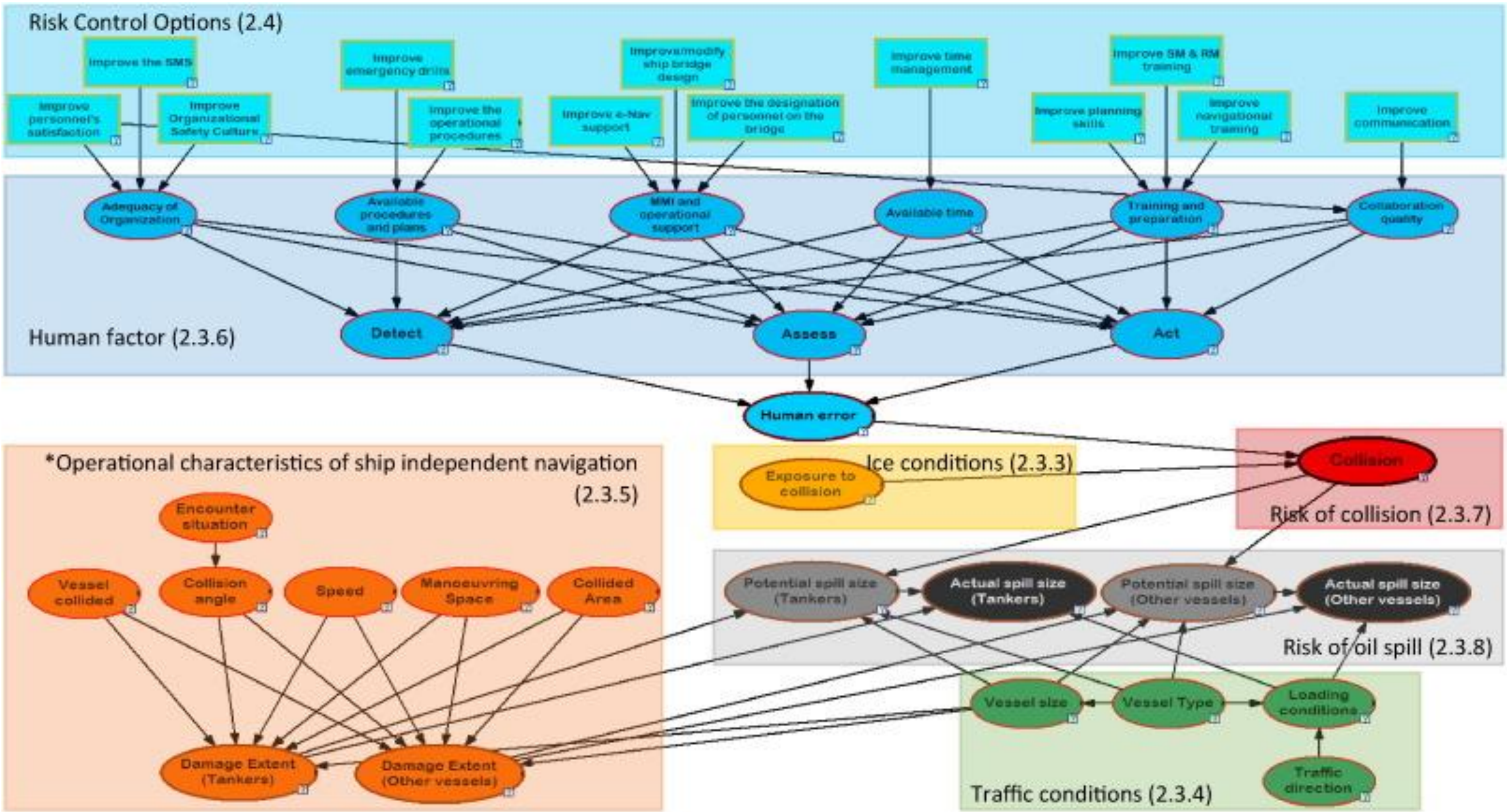


Fig. 2. Conceptual model of the key factors affecting *Astacopsis gouldi* populations.

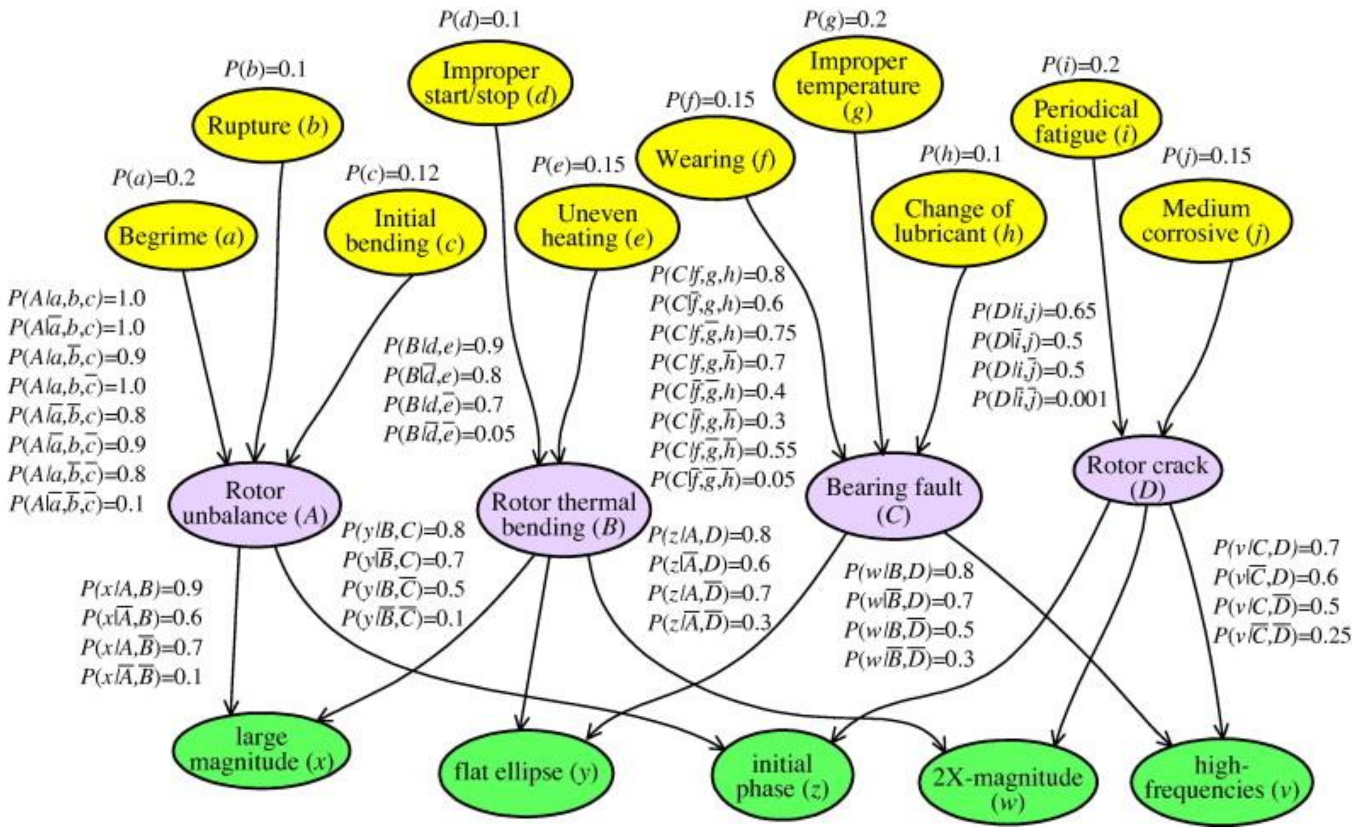
Serena H. Chen & Carmel A. Pollino: Good practice in Bayesian network modelling

Kockázatmodellezés



Osiris A.Valdez et al. : Risk management model of winter navigation operations,
Marine Pollution Bulletin,Volume 108, Issues 1–2, 15 July 2016, Pages 242-262

Hibamodellezés és következtetés



Bin GangXu: Intelligent fault inference for rotating flexible rotors using Bayesian belief network, Expert Systems with Applications,Volume 39, Issue 1, January 2012, Pages 816-822

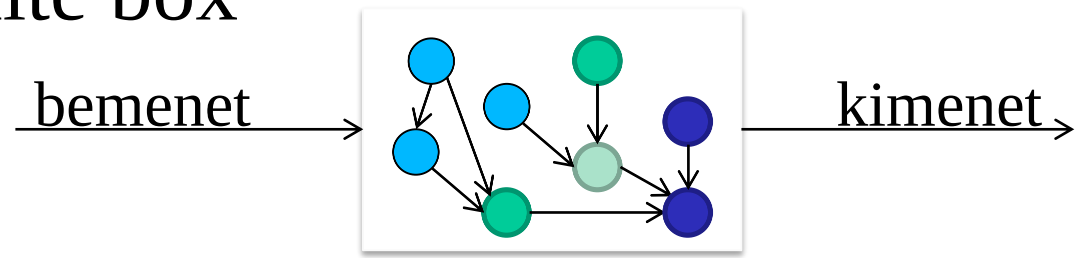
Modelltípusok
egy rendszer belső működésének modellezése szerint

- Black box

Pl.:Neurális hálók

A rendszer belső működését nem modellezi

- White box



Pl.:Bayes- hálók

A rendszer belső működését modellezi

(Grey box)

A valószínűségi hálók szemantikája

(1) a háló = **együttes valószínűségi eloszlás** egy leírása,

(2) a háló = **feltételes függetlenségekről szóló állítások** együttese.

A két szemlélet **ekvivalens**
az első abban segít, hogy hogyan **hozzunk létre** egy hálót
a második abban, hogy hogyan **tervezzünk** következtetési eljárásokat.

Feltételes függetlenség

Ha a szülő (szülői feltétel) ismert, nem érdekes az ős:

$$\mathbf{P(X_i \mid X_{i-1}, \ldots, \mathit{X_1}) = \mathit{P}(X_{\mathit{i}} \mid \mathit{Szülők}(X_{\mathit{i}}))}, \; i=1\ldots n,$$
$$\text{ha } \mathbf{\mathit{Szülők}(X_{\mathit{i}}) \subseteq \{ X_{\mathit{i-1}},\ldots,X_{\mathit{1}} \}.}$$

Ez utóbbi könnyen teljesíthető a csomópontok olyan sorszámozásával, ami konzisztens a gráf implicit részleges rendezésével.

$$\mathbf{\mathit{P}(X_{\mathit{i}} \mid \mathit{Szülők}(X_{\mathit{i}}), \mathit{Ősök}(X_{\mathit{i}})) = \mathit{P}(X_{\mathit{i}} \mid \mathit{Szülők}(X_{\mathit{i}}))}$$

Az együttes valószínűségi eloszlásfüggvény leírása

A valószínűségi hálóban található információk alapján:
az együttes valószínűségi eloszlás bármely bejegyzése kiszámítható.

Egy bejegyzés értéke (globális szemantika):

$$P(X_1 \ldots X_n) = \Pi_{i=1 \ldots n} P(X_i \mid Szülők(X_i)),\ i=1 \ldots n$$

Az együttes valószínűségi eloszlás minden bejegyzése felbontható
a FVT megfelelő elemeinek a szorzatára.
FVT-k: az együttes valószínűségi eloszlás dekomponált leírása.

Egy elemi esemény: pl. a riasztó megszólal, de sem betörés, sem földrengés nem volt, azonban János is és Mária is telefonál:

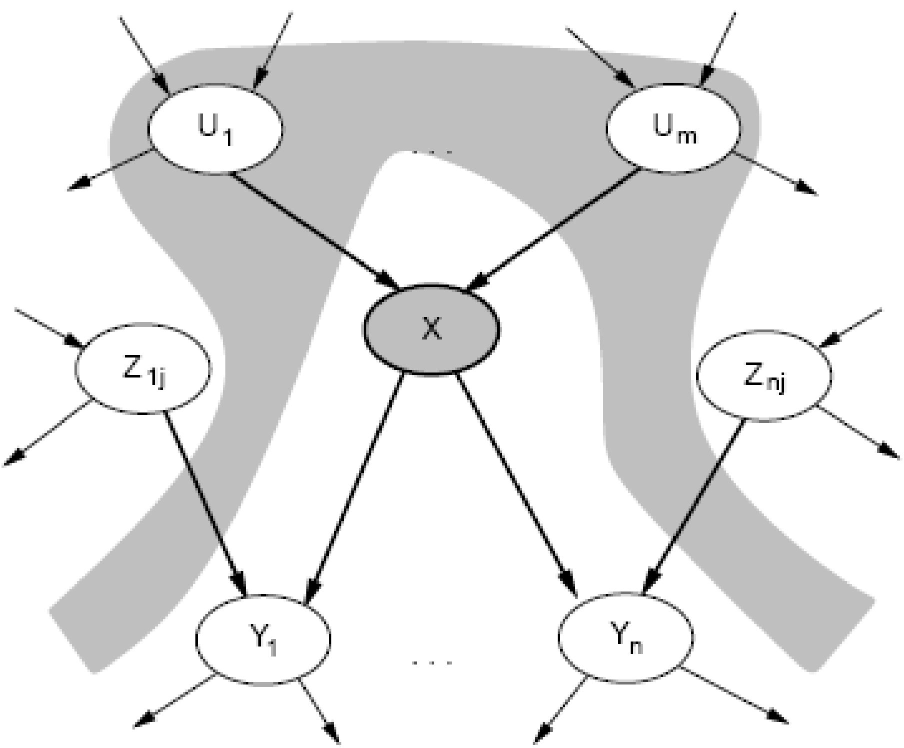
$$\begin{aligned} P(J\ M\ R\ \neg B\ \neg F) &= P(J \mid M\ R\ \neg B\ \neg F)\ P(M\ R\ \neg B\ \neg F) \\ &= P(J|R)\ P(M|R\ \neg B\ \neg F)\ P(R\ \neg B\ \neg F) \\ &= P(J|R)\ P(M|R)\ P(R|\neg B\ \neg F)\ P(\neg B)\ P(\neg F) \\ &= .90 \times .70 \times .001 \times .999 \times .998 = .00062 \end{aligned}$$

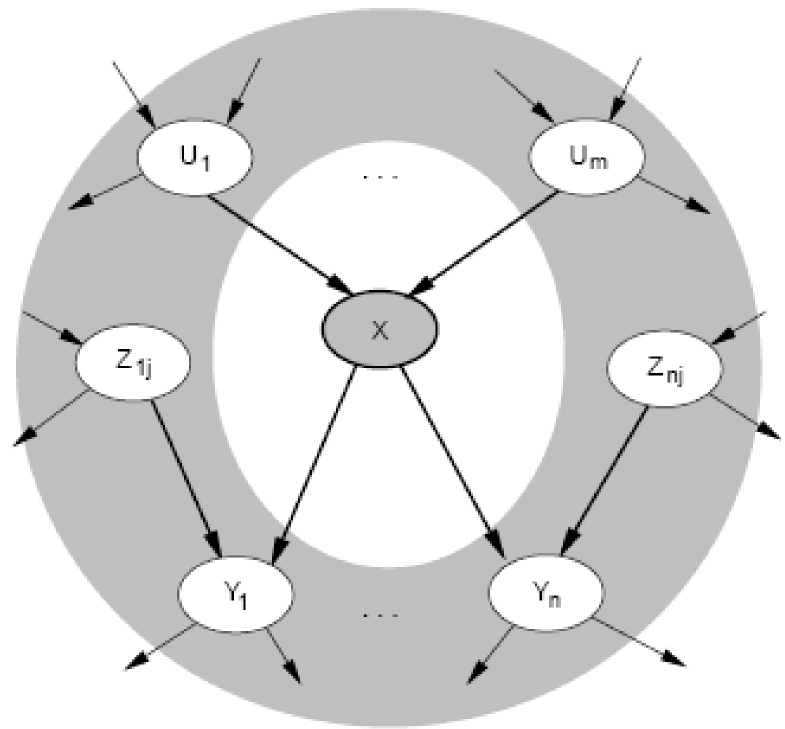
Lokális (topológiai) szemantika:

a. Minden csomópont (X) feltételesen független a nem leszármazottjaitól (Z), ha a **szülői** adottak (U).

b. Minden csomópont (X) feltételesen független minden mástól, ha a **Markov-takarója** adott (szülői+gyerekei+gyerekeinek szülői).

c. **d-elválasztás** …





Az általános eljárás egy háló fokozatos megépítésére:

1. Határozzuk meg a problémát leíró változókat (miről érdemes beszélni).

2. Határozzunk meg **egy sorrendet**.

3. Ameddig maradt még érintetlen változó:

   a) Válasszuk a következő X_i változót és adjunk egy csomópontot a hálóhoz.

   b) Legyen a *Szülők*(X_i) a csomópontok azon minimális halmaza, amik már szerepelnek a hálóban és a feltételes függetlenség tulajdonságát teljesítik – húzzuk be a kapcsolatokat.

   c) Definiáljuk X_i csomópont feltételes valószínűségi tábláját.

Mindegyik csomópontot csak korábbi csomóponthoz csatlakoztathatunk
= a háló körmentes lesz.
A valószínűségi háló nem tartalmaz redundáns valószínűségi értékeket, kivéve soronkénti bejegyzéseket a feltételes valószínűségi táblában.

Tömörség és a csomópontok sorrendje

Egy valószínűségi háló gyakran sokkal **tömörebb**, mint az együttes valószínűségi eloszlásfüggvény.

A valószínűségi háló tömörsége a **lokálisan strukturált** (vagy **ritka**) rendszerek egy példája.

Lokálisan strukturált rendszer: egy komponense csak korlátos számú más komponenssel van kapcsolatban közvetlenül, függetlenül a komponensek teljes számától. Lokális struktúrák: **inkább a lineáris, mint az exponenciális komplexitás** növekedés.

Valószínűségi háló n változóból: legtöbb esetben egy változót csak k számú más változó befolyásol, bináris változók = $n \times 2^k$ érték. Együttes valószínűségi eloszlás = $2^n - 1$ érték.

Példa: 20 cs.pont (n = 20), max. 5 szülője legyen (k = 5),
valószínűségi háló: 640 érték, együttes valószínűségi eloszlás: > egy millió.

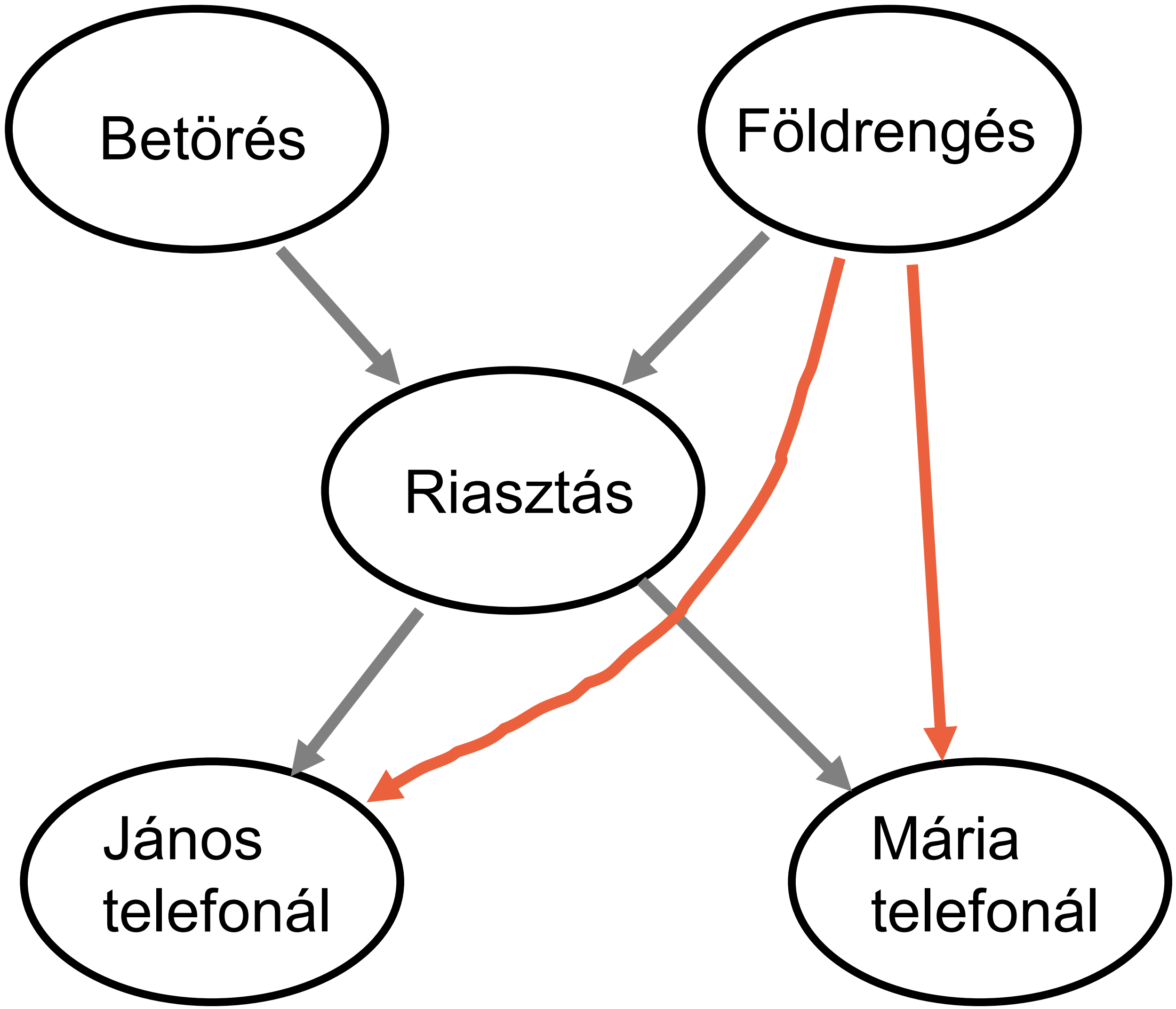
A gyakorlatban előforduló információcsökkenés amiatt lép fel, hogy a valós problémák igen strukturáltak, amit a hálók könnyűszerrel képesek kihasználni.

Tömörség és a csomópontok sorrendje

Bizonyos tárgytartományokban létezhetnek olyan jelentéktelennek tűnő függőségek, amiket feltétlenül modellezni kell egy új kapcsolat felvételével.
De ha ezek a függőségek ténylegesen jelentéktelenek, akkor lehet, hogy nem éri meg a háló komplexitását megnövelni a pontosság kismértékű növelésének érdekében.

Pl.:
hogyha földrengés van, akkor Mária és János akkor sem telefonálna, ha hallanák a riasztót, mivel feltételezik, hogy a földrengés okozta.

-



2 + 4 + 2 + 2
= 10 (eddig)

2 + 4 + 4 + 4
= 14

Megéri-e?

Tömörség és a csomópontok sorrendje

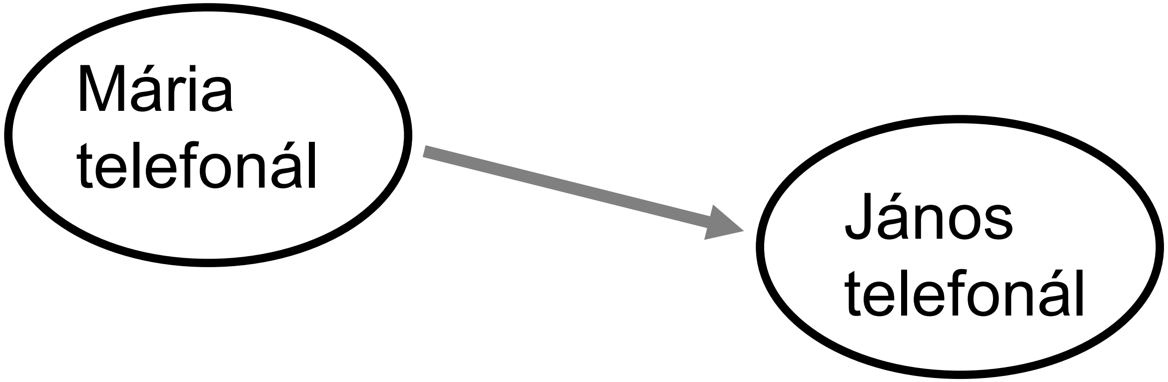
A konstrukciós eljárás működése miatt előbb a „közvetlen befolyásolók”-at kell a hálóhoz adni, ha azt szeretnénk, hogy szülőknek tudjuk őket választani az általuk befolyásolt csomópontnál.

Ezért a helyes sorrend a csomópontok hozzáadásánál:
először az „alapvető okokat” adjuk a hálóhoz, majd a változókat, amiket befolyásolnak, és ezt addig folytatjuk, amíg el nem érjük a „leveleket”, amiknek már nincs közvetlen okozati hatása más változókra (azaz a kauzalitás sorrendjében).

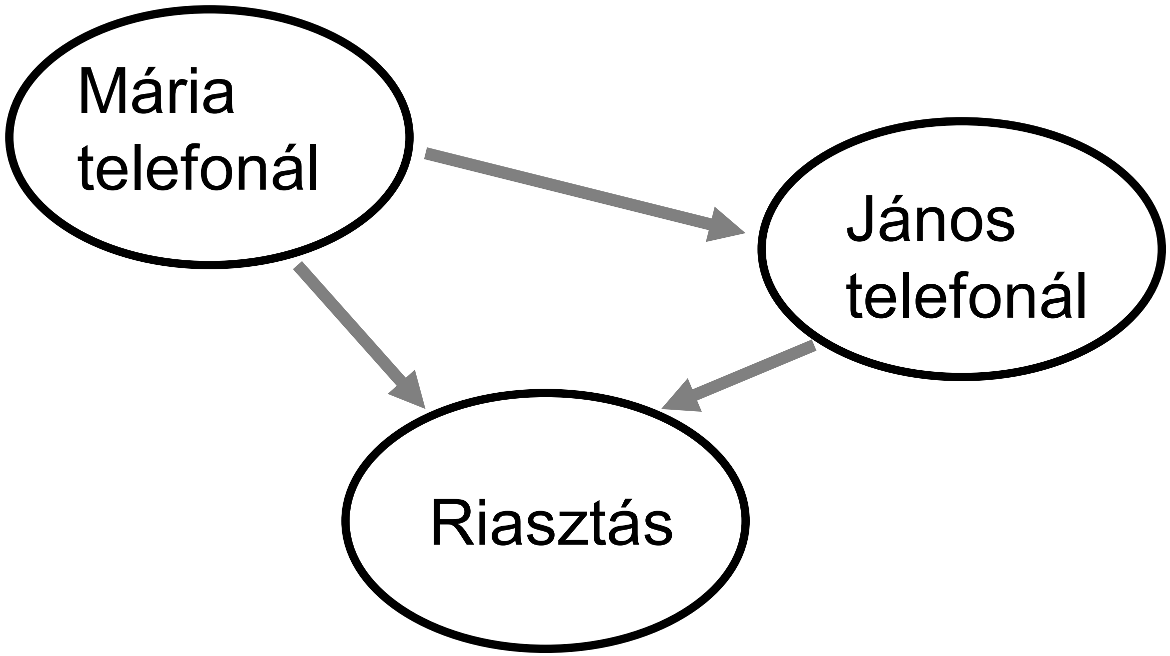
Mi történik, ha történetesen egy rossz sorrendet választunk?
pl.

MáriaTelefonál $\rightarrow$ *JánosTelefonál* $\rightarrow$ *Riasztás* $\rightarrow$ *Betörés* $\rightarrow$ *Földrengés*.

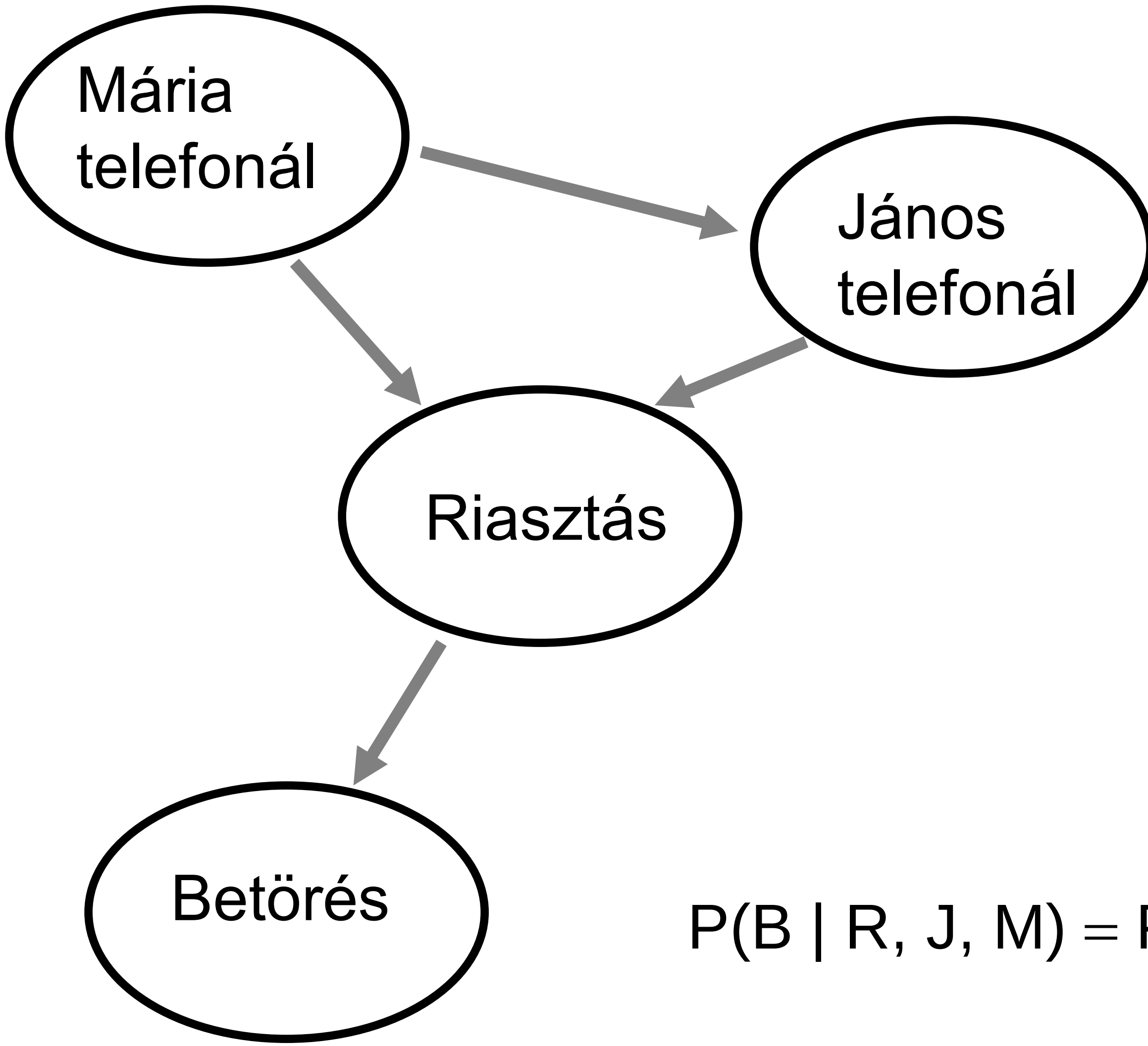
Mária
telefonál



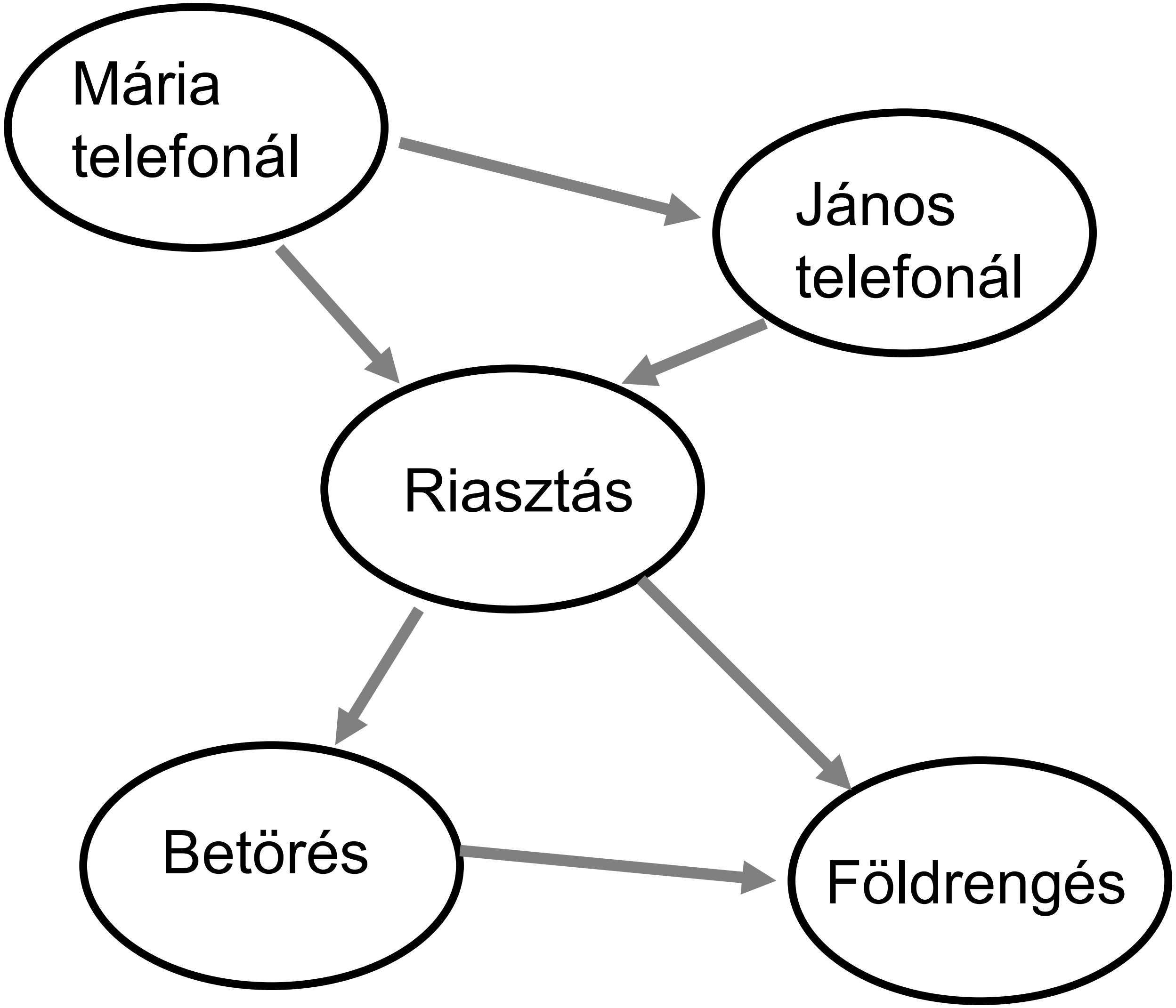
$P(J \mid M) = P(J)$? Nem (azaz van nyíl)



$P(R \mid J, M) = P(R \mid J)$? $P(R \mid J, M) = P(R)$?   Nem



$P(B \mid R, J, M) = P(B \mid R)?$ Igen



1 + 2 + 4
+ 2 + 4
= 13

P(F | B, R, J, M) = P(F | B, R)? = P(F | R)?
Igen Nem

Mi történik, ha történetesen <u>egy nagyon rossz</u> sorrendet választunk?

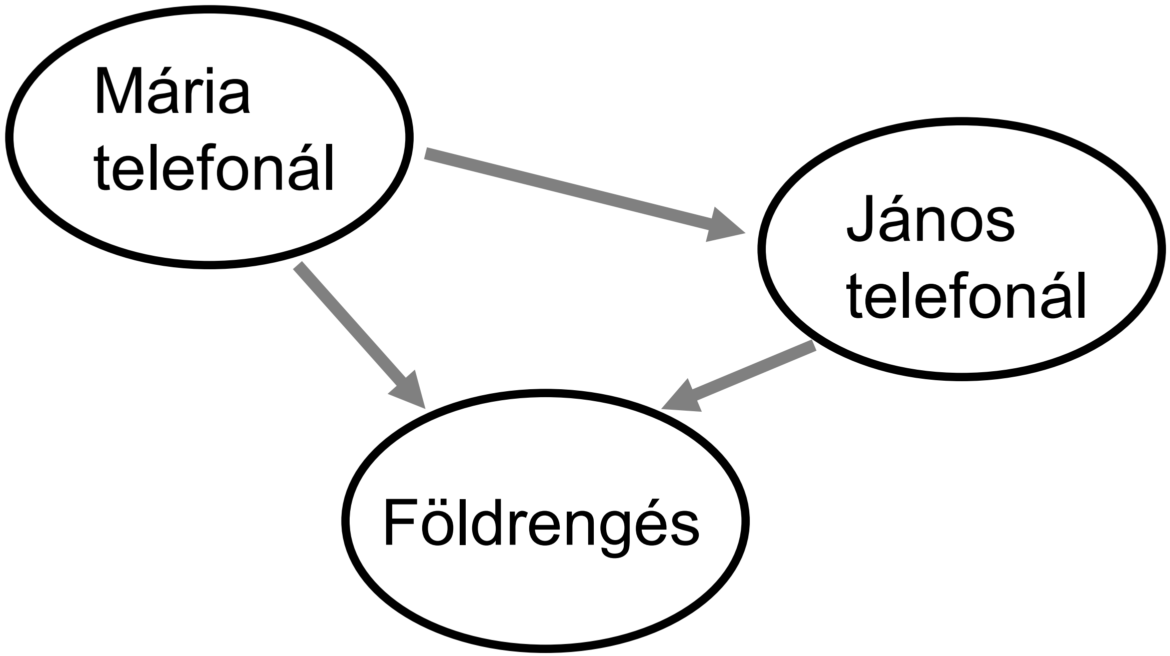
MáriaTelefonál

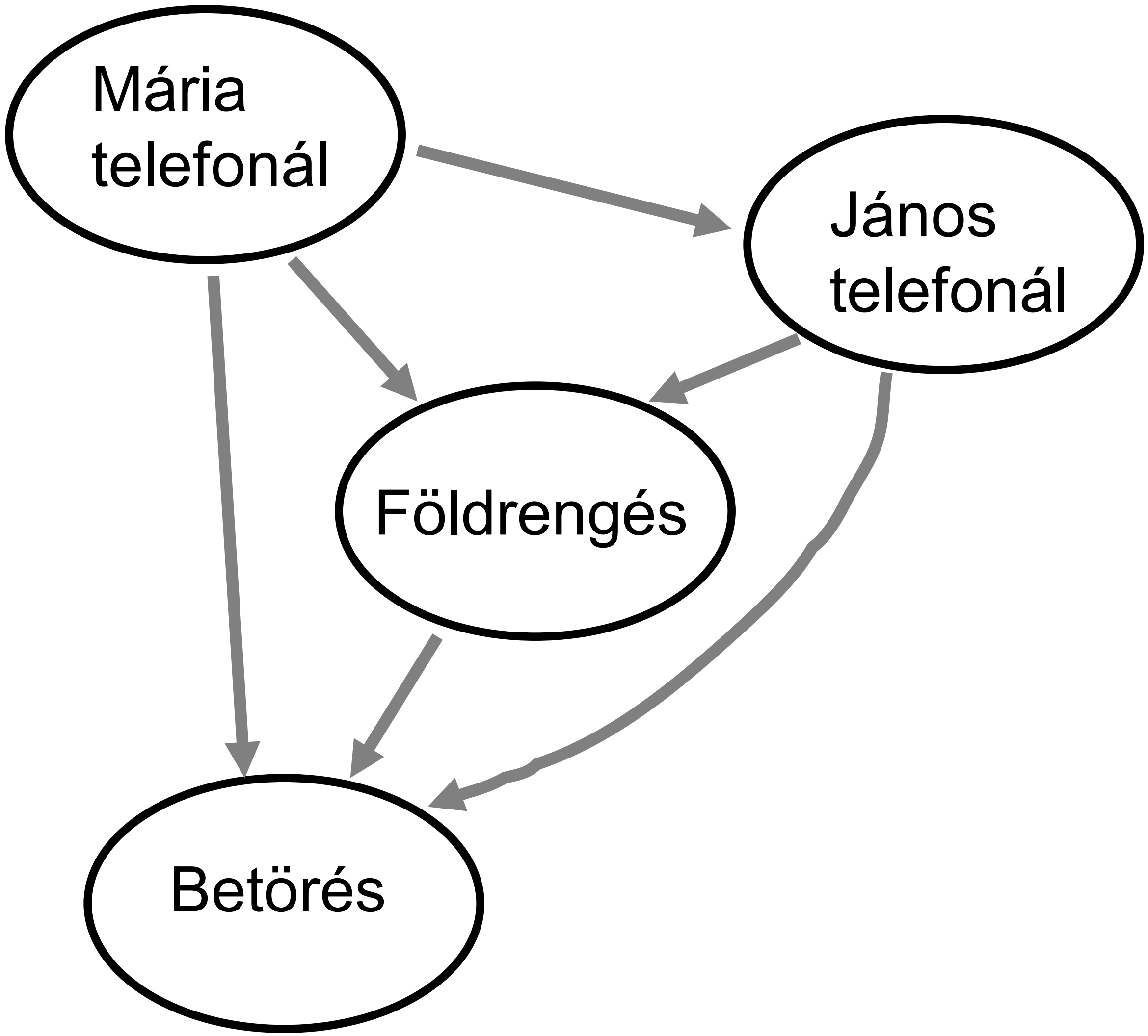
JánosTelefonál

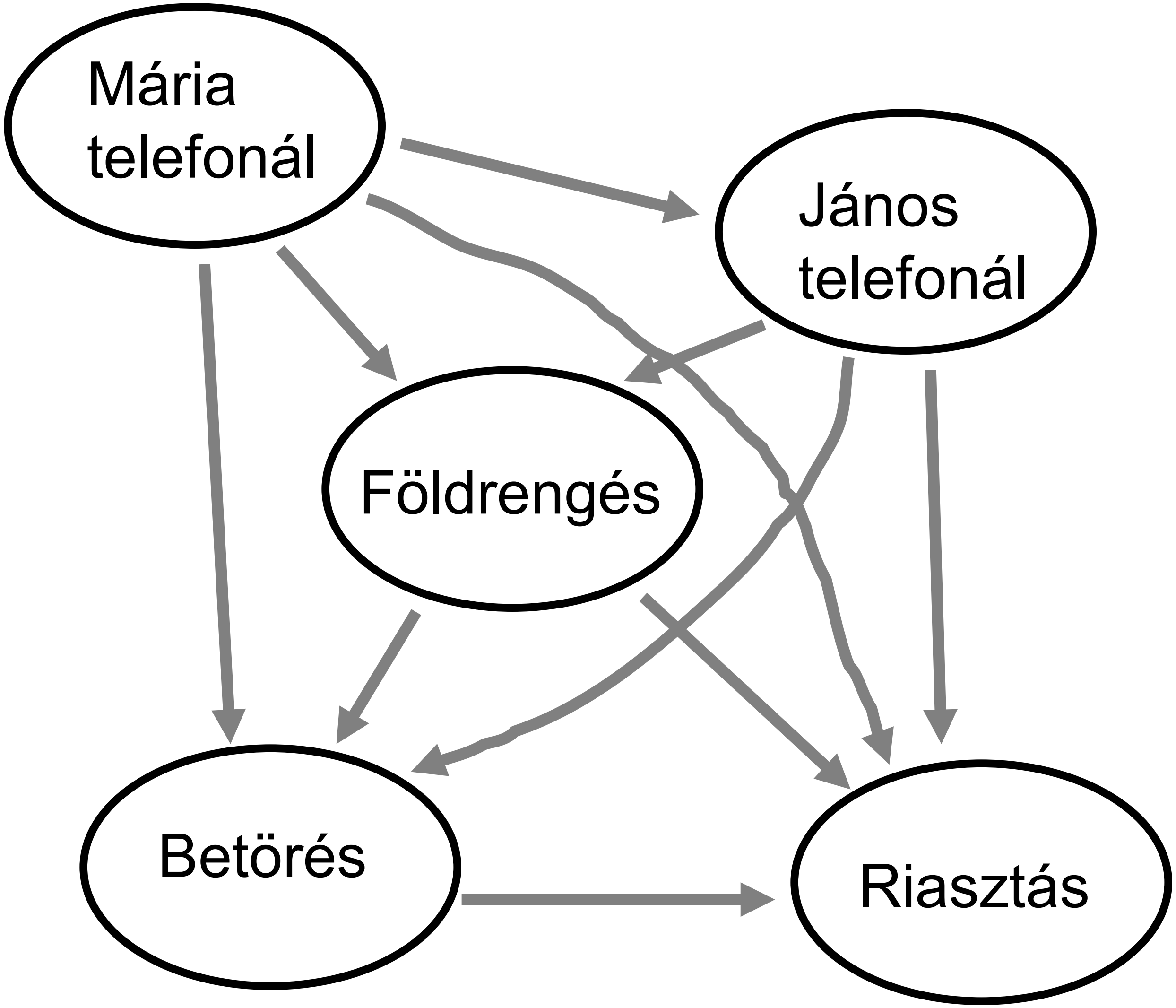
Földrengés.

Riasztás

Betörés


Mária
telefonál
János
telefonál
Földrengés


Mária
telefonál
János
telefonál
Földrengés
Betörés



$1 + 2 + 4$
$+ 8 + 16$
$= 31$
$= 2^5 - 1$

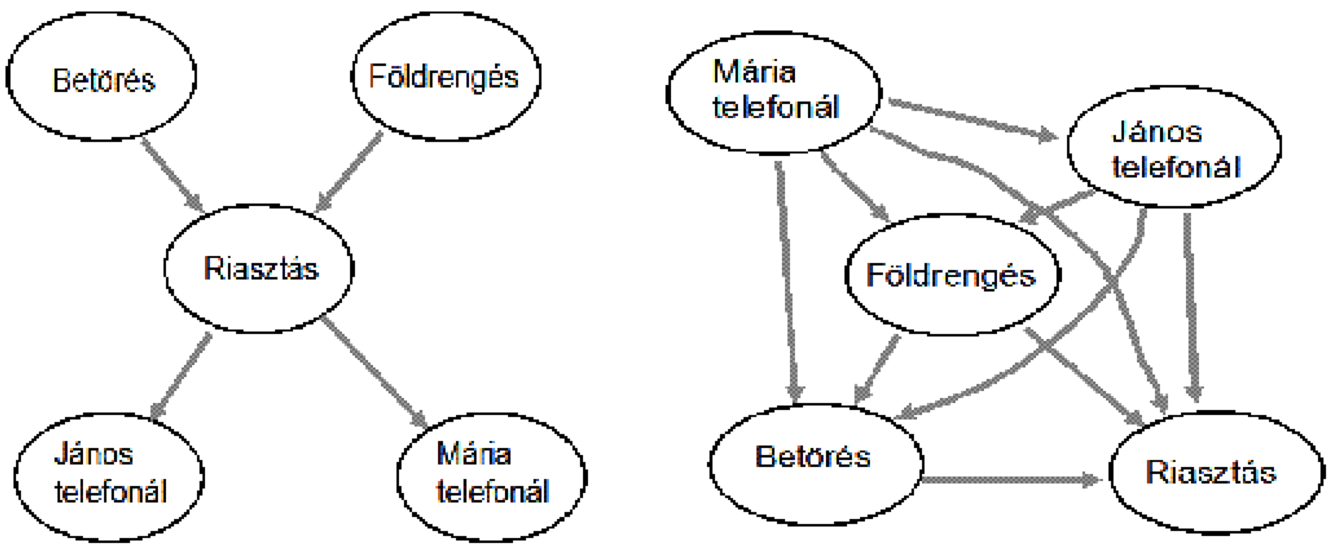
Sok (elméletileg exponenciális számú) **valószínűség**

De a legrosszabb következmény:
néhány kapcsolat furcsa viszonyt reprezentál, ami nehéz és **nem természetes valószínűségi ítéleteket igényel**, pl.

P(*Földrengés* | *Mária …, János …*) ?

P(*Betörés* | *Földrengés*) ? ... ...

Okozati (kauzális) modell: kevesebb, megbízhatóbb érték, az értékeket gyakran könnyebb elérni



Következtetés valószínűségi hálókban

Az alapvető feladat:
kiszámítani az a posteriori valószínűséget a **lekérdezéses változók**ra, ha a **tény** ill. **bizonyíték (evidencia) változók**nak az értékei adottak:

P(Lekérdezéses | Bizonyíték)

A riasztós példában, pl.:

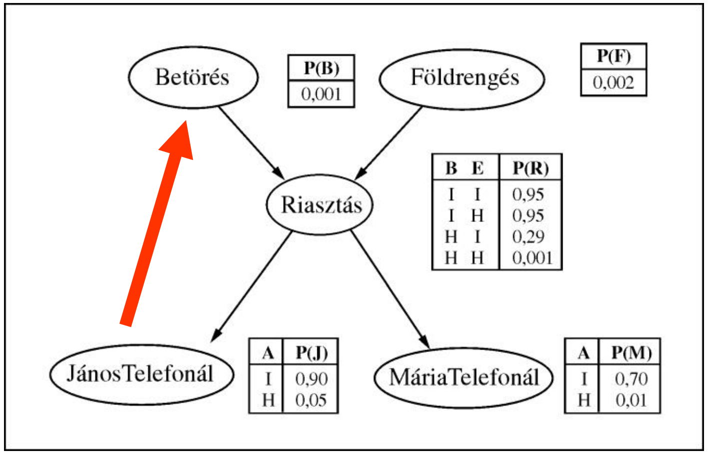
P(*Betörés* | *MáriaTelefonál* és *JánosTelefonál*)

Általában *az ágens az érzékeléséből (vagy egyéb következtetésből) kap értékeket a tény változókhoz, és más változók lehetséges értékeiről kérdez, hogy el tudja dönteni milyen cselekvéseket végezzen*.

Diagnosztikai következtetés

(hatásról az okra)

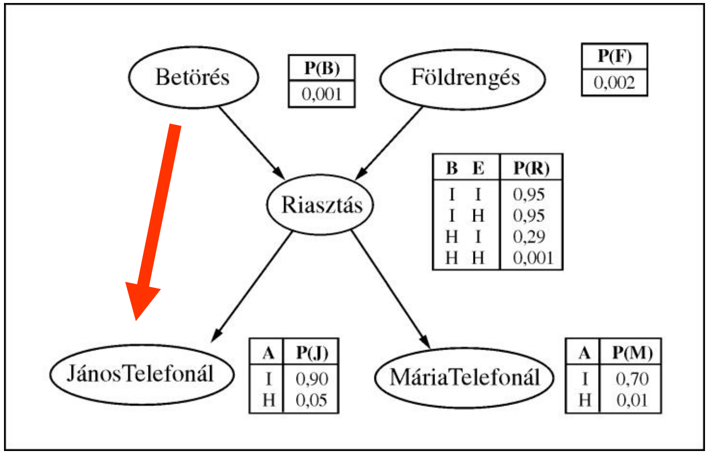
Ha adott a *JánosTelefonál,* akkor kiszámíthatjuk pl., hogy
$P(Betörés \mid JánosTelefonál) = 0{,}016.$



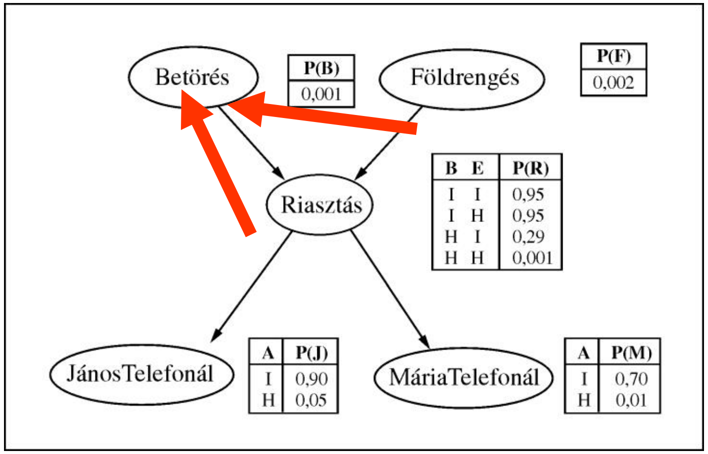
Okozati következtetés

(okról a hatásra)

Ha adott a *Betörés,* akkor kiszámíthatjuk pl., hogy
$P(JánosTelefonál \mid Betörés) = 0{,}67.$



Okok közötti következtetés
(következtetés egy közös hatás
okai között)

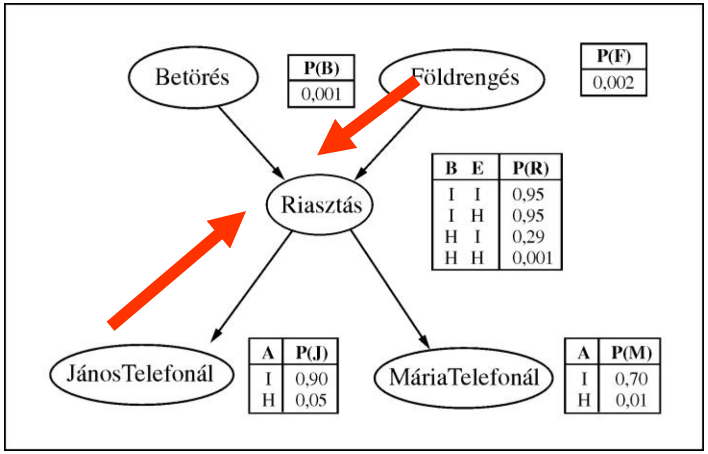


Ha adott a *Riasztás,*
akkor *P*(*Betörés* | *Riasztás*) = 0.376.

Ha azonban hozzávesszük azt a tényt is,
hogy a *Földrengés* igaz,
akkor P(*Betörés* | *Riasztás, Földrengés*) = 0.003.

Bár a betörések és a földrengések függetlenek, az egyik jelenléte a másik valószínűségét csökkenti.
Ez a fajta következtetési mód a **kimagyarázás.**

Kevert következtetések
(a fentiek kombinált használata).



Ha a *JánosTelefonál* okozat igaz és a *Földrengés* ok hamis, akkor

$$P(Riasztás \mid JánosTelefonál, \neg Földrengés) = 0{,}03.$$

Ez a diagnosztikai és okozati következtetés együttes felhasználása.

Hasonlóan,

$$P(Betörés \mid JánosTelefonál, \neg Földrengés) = 0{,}017.$$

Ez a diagnosztikai és az okok közötti következtetés kombinálása.

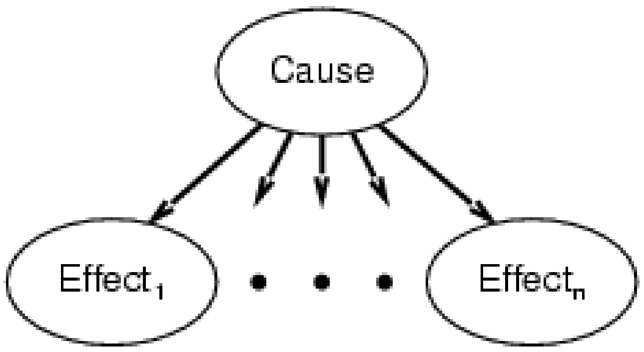
Érzékenységi vizsgálat elvégzése, annak érdekében, hogy megértsük, hogy a modell mely vonatkozásának van a legnagyobb hatása a lekérdezéses változókra nézve.

Naiv Bayes-hálók

Feltevések:

1.) Kétféle csomópont lehetséges: a „ok” és „következmény”.

2.) A következmények egymástól feltételesen függetlenek egymástól feltéve az okot.



Naiv Bayes-hálók

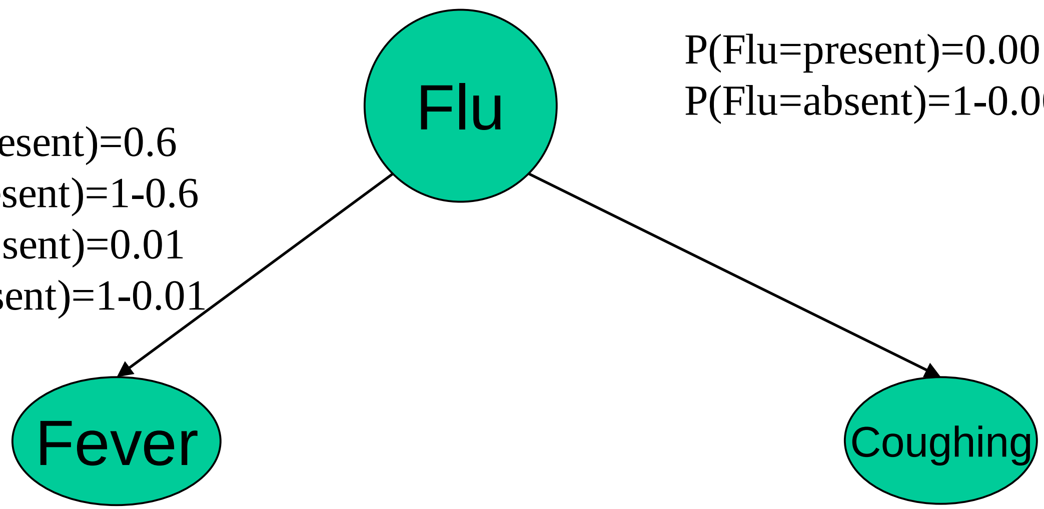
Változók (csomópontok)

Flu (Influenza):	{jelen, nincs jelen}
Fever (Láz):	{jelen, nincs jelen}
Coughing (Köhögés):	{jelen, nincs jelen}

Modell

P(Flu=present)=0.001
P(Flu=absent)=1-0.001

P(Fever=present|Flu=present)=0.6
P(Fever=absent|Flu=present)=1-0.6
P(Fever=present|Flu=absent)=0.01
P(Fever=absent|Flu=absent)=1-0.01



P(Coughing=present|Flu=present)=0.3
P(Coughing=absent|Flu=present)=1-0.3
P(Coughing=present|Flu=absent)=0.02
P(Coughing=absent|Flu=absent)=1-0.02

Naiv Bayes-hálók

Együttes valószínűség-eloszlás dekompozíciója:

$P(Y,X_1,..,X_n) = P(Y)\prod_i P(X_i,|Y, X_1,..,X_{i-1})$ //lánc szabály miatt

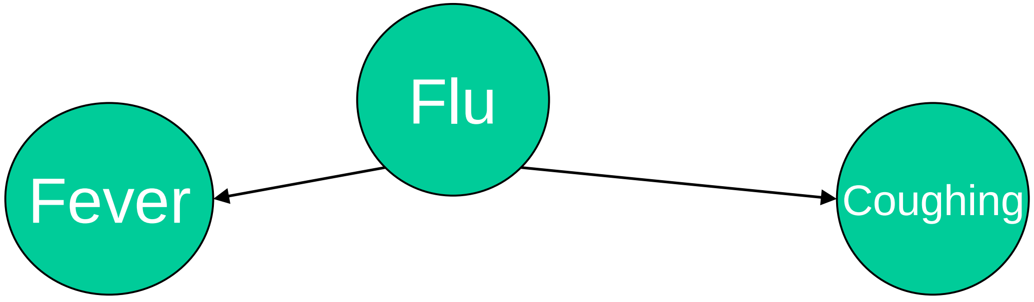
$= P(Y)\prod_i P(X_i,|Y)$ // naiv BN feltevés

2n+1 paraméter

Diagnosztikus következtetés:

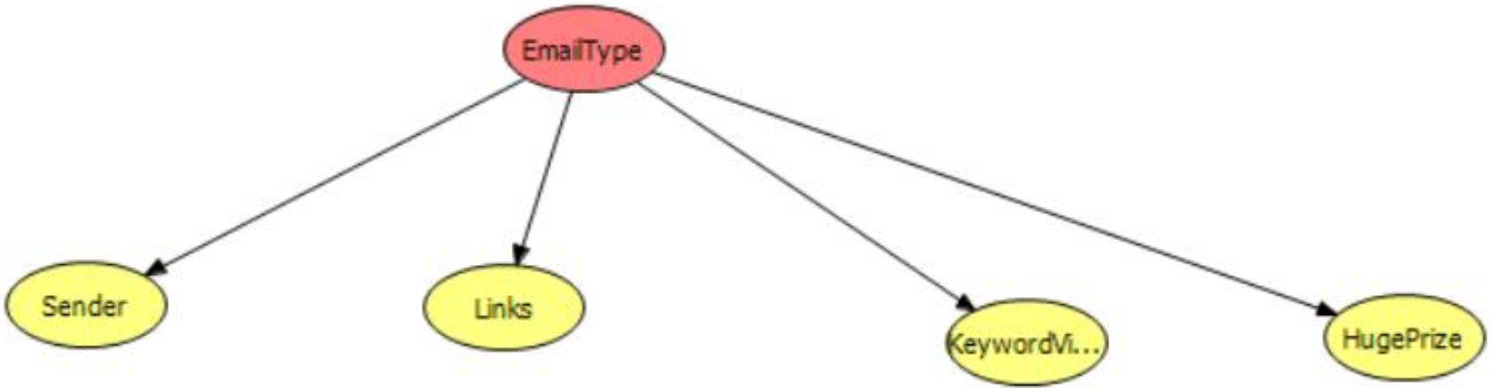
$P(Y|x_{i1},..,x_{ik}) = P(Y)\prod_j P(x_{ij},|Y) / P(x_{i1},..,x_{ik})$

$$p(Flu = present \mid Fever = absent, Coughing = present)$$
$$\propto p(Flu = present)\, p(Fever = absent \mid Flu = present)\, p(Coughing = present \mid Flu = present)$$



Gyakorlati példa: SPAM filter

- SPAM filter
  - SPAM: yes/no [suspicious..]
  - Attributes
    - Sender, subject, link, attachment,..



A valószínűségi hálók szemantikája

(1) a háló = **együttes valószínűségi eloszlás** egy leírása,

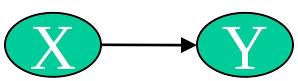
(2) a háló = **feltételes függetlenségekről szóló állítások** együttese.

(3) a háló = **oksági kapcsolatok** együttese.

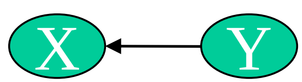
FONTOS: oksági kapcsolat ≠ asszociációs kapcsolat

Reichenbach's Common Cause Principle:

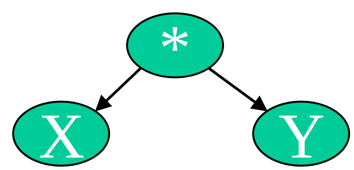
„a correlation between events *X* and *Y* indicates either that *X* causes *Y*, or that *Y* causes *X*, or that *X* and *Y* have a common cause."



X okozza Y-t

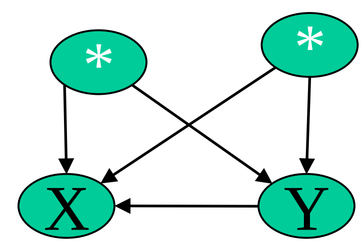


Y okozza X-et



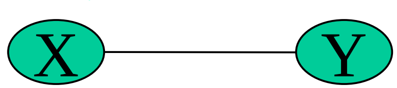
Létezik közös ok

(pure confounding)



Y okozza X-et,

de emellett számos más változónak is van zavaró hatása



„X és Y asszociált" D(X,Y)