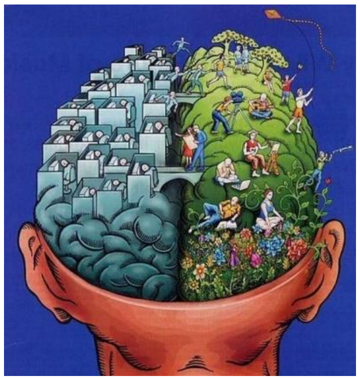
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Méréstechnika és Információs rendszerek Tanszék



VKH (Valószínűleg közelítőleg helyes) tanulás

Előadó: Hullám Gábor

Előadás anyaga: Dobrowiecki Tadeusz
Pataki Béla

Mennyi tanítómintára van szükség?

Számítási tanulási elmélet

Hogyan tudhatja valaki, hogy a tanulási algoritmusa olyan tudást eredményezett, amely helyesen fogja megjósolni a jövőt?

Az induktív tanulásnál:
honnan tudjuk, hogy a *h* hipotézis jól közelíti az *f* célfüggvényt, ha nem ismerjük *f*-et?

Az alapelv

- <u>bármely, súlyosan hibás hipotézis</u> már kis számú példa vizsgálata után is szinte biztosan „megbukik", mivel nagy valószínűséggel legalább egy helytelen eredményt fog jósolni.
- <u>valószínűtlen, hogy súlyosan hibás</u> lehet olyan hipotézis, amely egy kellően nagy tanuló példahalmazzal konzisztens**.**

VKH

Valószínűleg Közelítőleg Helyes (**Probably Approximately Correct**).

VKH-tanulás (**PAC**-learning)

- **De hány példára van szükség a biztonsághoz?**

  X az összes lehetséges példák halmaza, ***D*** a példák eloszlása.

  H az összes lehetséges hipotézisek halmaza.

  m a tanuló halmaz példáinak száma.

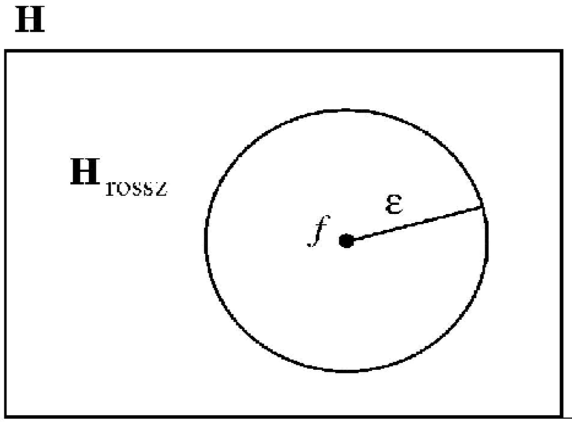
VKH

Legyen a keresett, valódi ***f*** függvény eleme **H**-nak. Ekkor ***h*** hipotézis ***f*** függvényhez képesti **hibája** a ***D*** eloszlású példahalmazon:

$$e(h) = P(h(x) \neq f(x) \mid x \in D)$$

h hipotézist **közelítőleg helyes**, ha $e(h) \leq \varepsilon$, ahol ε kicsi.

m **példa vizsgálata után nagy valószínűséggel az összes konzisztens hipotézis közelítőleg helyes lesz**.



$$P(h_{VKH}(x) \neq f(x) | x \in D) = e(h) < \epsilon$$
$$P(h_{VKH}(x) = f(x) | x \in D) = e(h) \geq (1 - \epsilon)$$

$$P(h_{Rossz}(x) \neq f(x) | x \in D) = e(h) > \epsilon$$
$$P(h_{Rossz}(x) = f(x) | x \in D) = e(h) \leq (1 - \epsilon)$$

VKH

P(egy „alapvetően rossz" h_r hipotézis az első *m* példával konzisztens)?

$e(h_r) > \varepsilon$ miatt annak valószínűsége, hogy bármelyik adott példára jó eredményt ad $P(h_{Rossz}(x) = f(x) | x \in D) = e(h) \leq (1 - \epsilon)$

m példára:

$$P(h_r \ \text{jó eredményt ad } m \text{ példára}) \leq (1-\varepsilon)^m$$

- Annak valószínűsége, hogy az összesen $|H_{rossz}|$ nem VKH hipotézis

közül *valamelyik* konzisztens lesz mind az *m* mintánkkal:

$$P(konzisztens\ h \in \mathbf{H}_{rossz}) \leq |\mathbf{H}_{rossz}|(1-\varepsilon)^m \leq |\mathbf{H}|(1-\varepsilon)^m$$

$$|\boldsymbol{H}| \cdot (1-\epsilon)^m \leq \delta$$

VKH

Valószínűleg közelítőleg helyes (VKH).

- Ha egy tanuló algoritmus olyan hipotézist ad, amely ***m*** megfelelően kiválasztott (véletlen mintavétel) példa esetén is konzisztens, akkor ennek a hipotézisnek legalább **(1- δ) valószínűséggel** a **hibája legfeljebb ε**
- A kívánt példaszám (**δ**, **ε** és a hipotézistér mintakomplexitásának függvénye):

$$|\boldsymbol{H}| \cdot (1-\epsilon)^m \leq \delta$$

$$|\boldsymbol{H}| \cdot e^{-\epsilon \cdot m} \leq \delta$$

$$ln|\boldsymbol{H}| + ln(e^{-\epsilon \cdot m}) \leq ln(\delta)$$

$$ln|\boldsymbol{H}| - \epsilon \cdot m \leq ln(\delta)$$

$$ln|\boldsymbol{H}| - ln(\delta) \leq \epsilon \cdot m$$

$$\boxed{\frac{1}{\epsilon}(ln|\boldsymbol{H}| - ln(\delta)) \leq m}$$

Minta komplexitás és tanulhatóság

Egy **függvény megtanulható** példákból adott ε és δ szinten, ha a szükséges példaszám probléma paramétereinek (ε, δ, **H**) polinomiális függvénye,

azaz, ha a hipotézis tér **minta komplexitása exponenciálisnál kisebb**.

A dilemma:

- ha nem korlátozzuk a tanuló algoritmus hipotéziseinek terét, akkor az algoritmus nem lesz képes tanulni,
- ha viszont korlátozzuk, akkor lehet, hogy a valódi, keresett függvényt zárjuk ki.

Minta komplexitás és tanulhatóság

A dilemma:

- <u>ha nem korlátozzuk</u> a tanuló algoritmus hipotéziseinek terét, akkor az <u>algoritmus nem lesz képes tanulni</u>,
- <u>ha viszont korlátozzuk</u>, akkor <u>lehet, hogy a valódi,</u> keresett <u>függvényt zárjuk ki</u>.

Két kiút a csapdából:

- ha az algoritmus lehetőleg a **legegyszerűbb** hipotézist adja meg, de legtöbb esetben a legegyszerűbb hipotézis számítása **kezelhetetlen**.

- **legtöbb esetben** nincs szükségünk a Boole függvények teljes kifejező erejére, ennél **kötöttebb** nyelvekkel is megoldhatók feladataink.

VKH példa -1.

Ha $|\mathbf{H}|=10^7$ és 99% biztonsággal (1-δ=0,99, azaz δ =0,01) szeretnénk állítani, hogy a megtanított eszköz hibája nem lesz 5%-nál nagyobb, akkor

$$\frac{1}{\epsilon}(ln|\boldsymbol{H}| - ln(\delta)) \leq m$$

$$\frac{1}{0.05}(7ln(10) - ln(0.01)) = 414{,}46 < m$$

- Tehát, ha *m*=415 véletlen minta mindegyikével konzisztens a tanított eszközünk, akkor ilyen biztonsággal garantálhatjuk a hibaszintet

VKH példa -2.

- Tanítsunk meg példák alapján egy 10-bemenetű Boole függvényt! Hány minta kell, ha max. 1%-os hibát 99,9% biztonsággal akarunk garantálni?

$$\frac{1}{\epsilon}(ln|\boldsymbol{H}| - ln(\delta)) \leq m$$

VKH példa -2.

- Tanítsunk meg példák alapján egy 10-bemenetű Boole függvényt! Hány minta kell, ha max. 1%-os hibát 99,9% biztonsággal akarunk garantálni?

$$\frac{1}{\epsilon}(ln|\boldsymbol{H}| - ln(\delta)) \leq m$$

- A.) 716,69
- B.) 7166,9
- C.) 71669
- D.) 716699

VKH példa -2.

- Tanítsunk meg példák alapján egy 10-bemenetű Boole függvényt! Hány minta kell, ha max. 1%-os hibát 99,9% biztonsággal akarunk garantálni?
- $|\mathbf{H}|=2^{2\wedge n} \longrightarrow |\mathbf{H}|=2^{2\wedge 10}$

$$\frac{1}{\epsilon}(ln|\boldsymbol{H}| - ln(\delta)) \leq m$$

$$\frac{1}{0.01}(1024 \cdot ln(2) - ln(0.001)) = 71669 < m$$

- Mi ezzel a gond?
  Hány különböző példát lehet generálni egy 10 bemenetű Boole-függvénnyel? 1024