

Méréselmélet házi feladat

A házi feladat a becslésmélet, a multiszinuszos mérés technika, a modellillesztés, az adaptív eljárások és a Kalman szűrés témaköreire kapcsolódik. A feladat névre szólóan paraméterezett, a hozzárendelések a mellékelt táblázatban találhatóak. A feladat megoldásához célszerűen a MATLAB (Lásd az ajánlott irodalmakat [1], [2], [3], [4]!) használatát ajánljuk, de bármilyen, hasonló célú programrendszer alkalmazása megengedett.

Becslésméleti feladatok

Első lépésként egy kísérletezésre alkalmas környezetet hozunk létre. Ebben a környezetben mi állítjuk be az „ismeretlen” aktuális értékét, azaz amit meg fogunk mérni, de mivel a mérési csatorna bizonytalansággal terhelt, ezt a bizonytalanságot is modellezni fogjuk, így amit megmérünk ugyancsak bizonytalan (torzítással és/vagy zavarással terhelt) lesz, sosem vagyunk képesek teljesen pontosan (mért érték \neq valódi/”elméleti” érték) mérni.

1. Készítsen jelgenerátort, amely alkalmas az $u(t) = A \sin(2\pi f_0 t) + B \cos(2\pi f_0 t) + C$ időfüggvényű jel mintáinak előállítására. A frekvencia értéket teljesen pontosnak tekintjük, de A , B és C beállítása nem egészen az. A bizonytalanságot azzal fejezzük ki, hogy A , B és C értékeit Gauss eloszlású valószínűségi változók reprezentációjának tekintjük, és előzetes tapasztalataink birtokában μ_A , μ_B és μ_C várható értékkel, valamint C_{aa} kovariancia mátrixszal jellemezzük!

$$C_{aa} = \sigma_a^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1^2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_1^2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix},$$

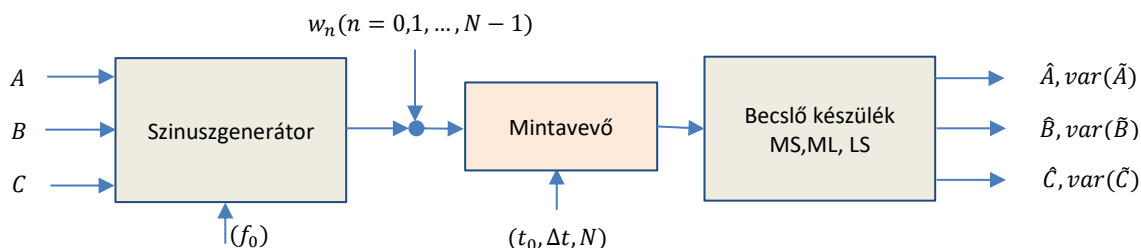
Itt $\mathbf{a} = [A \ B \ C]^T$, azaz \mathbf{a} az ismeretlen paramétereiből képzett paramétervektor. Az a tény, hogy a kovariancia mátrix főátlón kívüli elemei nullától különböznek azt jelzi, hogy a paraméterek bizonytalansága nem független egymástól.

Ezeknek a körülményeknek megfelelően – ezen valószínűségi változók egy konkrét reprezentációjának (azaz egy konkrét értékének) feltételezésével – működtesse a generátort, és vegyen mintákat a generátor jeléből a $t = t_0 + n\Delta t$ időpontokban ($n = 0, 1, \dots, N - 1$)! Sajnos a mintavételezett értékek sem teljesen pontosak, amit előzetes tapasztalataink birtokában a mintavétel során a generátor kimeneti jeléhez adódó $w(t)$ nagyságú, Gauss eloszlást $N(\mathbf{0}, C_{ww})$ követő megfigyelési-zaj értékekkel írunk le!

$$C_{ww} = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_2 & \rho_2^2 & \dots & \rho_2^{N-1} \\ \rho_2 & 1 & \rho_2 & \dots & \vdots \\ \rho_2^2 & \rho_2 & 1 & \dots & \rho_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \rho_2 \\ \rho_2^{N-1} & \dots & \rho_2^2 & \rho_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Itt $\mathbf{w} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{N-1}]^T$, azaz \mathbf{w} az ismeretlen zajértékekből képzett megfigyelési-zaj vektor. Az a tény, hogy a megfigyelési zaj kovariancia mátrixának főátlón kívüli elemei nullától különböznek azt jelzi, hogy a zajparaméterek bizonytalansága nem független egymástól.

Mindezek előre bocsátásával a feladat tehát $t = 0$ időpontban indítani egy ismert f_0 frekvenciájú, egyenkomponenst is tartalmazó, véletlen paraméterek által meghatározott szinusz jelet, amihez a megfigyelés során véletlen zaj adódik, majd az ebből vett mintákra alapozva végrehajtani az alábbi ábra szerinti mérési eljárást. A véletlen paraméterek, ill. a zaj mintái a ρ_1 , ill. ρ_2 értékkel paraméterezett



mértékben korreláltak (max. 3 pont).

Ezzel előállt egy kísérletezésre alkalmas, szimulált környezet. Most kivételesen ismerni fogjuk a megméréndő értékeket, hiszen mi generáljuk őket, így lehetőségünk lesz a mérési eljárásaink megfelelőségének ilyen szintű vizsgálatára is. A valóságban persze ez nincs így!

2. A rendelkezésre álló információk felhasználásával alkalmazza az MS becslési eljárást az A , B és C paraméterek becslőinek, valamint a becslési hiba kovarianciájának és a becslés esetleges (feltételes) torzításának meghatározására¹! Adja meg a becsléshez felhasznált összefüggéseket! Végezze el a mérést – a megadott paraméterek mellett – $N = 5, 10, 100$, azaz összesen 3 különböző mintaszámú regisztrátum esetére² először úgy, hogy a minták a jel egy teljes periódusából származnak, majd pedig úgy, hogy a teljes periódus egy tizedéből! Ismétlje meg a mérést arra az esetre, amikor a megfigyelési zaj fehér, tehát $\rho_2 = 0$. Adja meg az összes vizsgált esetre a) a tényleges és a becsült értékeket és az eltérésüket, b) a becslés torzítását és c) a becsült értékek kovarianciáját! Az eredményeket vesse össze a mérési bizonytalanságot okozó megfigyelési zaj paramétereivel! Az eredmények mennyiben felelnek meg előzetes várakozásainak? (max. 5 pont.)
3. Az 1. feladatban generált véletlen jelparaméter- és zaj-értékeket használva végezze el a paraméterek becslését a maximum likelihood (ML) becslőt alkalmazva is N mind a 3 értéke és a mintavételi idő mindkét értéke mellett! Ismétlje meg a méréseket arra az esetre is, amikor $\rho_2 = 0$! Vesse össze a kapott eredményeket az előző pontban kapottakkal, és indokolja az esetleges eltéréseket! (max. 4 pont.)
4. Az 1. feladatban generált véletlen jelparaméter- és zaj-értékeket használva végezze el a paraméterek becslését a legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslőt alkalmazva is N mind a 3 értéke és a mintavételi idő mindkét értéke mellett! Ismétlje meg a méréseket arra az esetre is, amikor $\rho_2 = 0$! Vesse össze a kapott eredményeket az előző pontokban kapottakkal, és indokolja az esetleges eltéréseket! (max. 4 pont.)

Ügyeljen arra, hogy a numerikus eredmények összehasonlíthatósága érdekében a 2-4. feladatok esetében ugyanazt az adatsorozatot dolgozza fel, azaz az A , B és C véletlen értékeket, valamint az additív megfigyelési zaj $N = 100$ mintáját (persze mindkét, azaz a korrelált és a korrelálatlan esetre külön-külön) is csak egyszer generálja, és ebből használjon fel szükség szerinti számút!

Multiszinuszos mérés technika

Önmagában energia leadására képtelen, passzív objektumok mérésénél gerjesztés alkalmazása elkerülhetetlen. A frekvenciatartománybeli vizsgálatoknál gyakran használunk szélessávú („fehér”) zaj gerjesztéseket, de újabban terjed a multiszinuszos mérés technika is. Ebben a házi feladatban ennek alkalmazásával ismerkedünk meg. Első lépésként – itt is – a kísérletezésre alkalmas környezetet hozzuk létre. Készítünk egy multiszinuszos jel előállítására alkalmas generátort, majd egy ilyen jelek analizálására alkalmas jelanalizátort. Ezeknek az eszközöknek a konstrukcióját a tárgy második részében több szempontból is megtámasztjuk, de ezekre az ismeretekre az alkalmazásuk során közvetlenül nem lesz szükség.

5. Állítson elő $u(n), n = 0, 1, \dots$ diszkrét értéksorozatot multiszinuszos generátor „segítségével”, mégpedig úgy, hogy a diszkrét jel $M = 100$ harmonikus komponensből álljon, az egyes harmonikus komponensek amplitúdója egységnyi, kezdőfázisa véletlen, és a sorozat várható értéke pedig 1 legyen! A multiszinuszos generátort a jegyzet 46. ábrának megfelelően készítse el! Ügyeljen arra, hogy a generált jel a vizsgált frekvenciatartomány egészében megfelelő gerjesztést adjon (max. 2 pont)! Vizsgálja meg, hogy hogyan alakul a generált jel csúcserőteljesítése, és hasonlítsa össze azzal az esettel, amikor a kezdőfázisok rendre nullák (max. 1 pont)!
6. Készítsen az előző pont szerinti generátor jelének, továbbá az ezzel a jellel gerjesztett rendszerek kimeneti jelének analizálására alkalmas rekurzív multiszinuszos analizátort, ugyancsak a 46. ábrán látható elrendezést követve, amely a bemenetére kapcsolt jeltől képes kiszámítani az abban levő harmonikus komponensek amplitúdóját és fázisát³! Az 5. pont szerinti jel és az analizátor által rekonstruált jel különbségét ábrázolva mutassa be, hogy a generátor-analizátor pár megfelelően működik (max. 3 pont)!

¹ Egy ilyen feladat megfogalmazása egyáltalán nem ördögtől való: ilyenkor valójában egy szinuszos jelet illesztünk a mért jelhez. Ennek számos alkalmazása van az energetikai rendszerek vizsgálatától kezdve az A/D átalakítók teszteléséig bezárólag. Ez utóbbi esetben az A/D átalakító bemenetére több egészszámú periódusból álló szinuszos jelet vezetünk, majd a digitális kimenet értékeiből hisztogramot készítünk, és abból következtetünk a kódátmenetekhez tartozó tényleges kódváltási szintekre. Ahhoz, hogy ezt kellő pontossággal meg tudjuk tenni, kellő pontossággal ismernünk kell az A/D átalakító bemenetére vezetett szinuszos-jel paramétereit. Mivel az torzítások és zavarások következtében bizonytalansággal terhelt, ezért el kell végeznünk a szinuszos-illesztési feladatot.

² A mintavételek számának növelésével csak az additív zaj hatása mérsékelhető, az „ismeretlen” paraméterekről többlet-információhoz nem jutunk.

³A fázis meghatározásánál különös körültekintéssel járjon el: a fázis többértékű függvény, ugyanakkor a rendszerátvitel fázisa – legalábbis szakaszosan – folytonos.

(Mindenképpen az Ön által megírt generátor-analizátor programot használja, a frekvenciatartománybeli vizsgálatokra alkalmas MATLAB függvények használata legfeljebb önellenőrzést szolgáljon!)

7. Ez az $u(n)$ sorozat legyen a bemenőjele a modellezendő/adaptálandó rendszernek, melynek átviteli függvénye (vagyilagosan)

$$A: \frac{(1-r)z^{-1}}{1+rz^{-4}}, B: \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-4}}, C: \frac{(1-r)z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-rz^{-4})}, D: \frac{(1-r)z^{-1}(1+z^{-2})}{2(1-rz^{-4})}, E: \frac{(1-r)z^{-1}(1-z^{-1})}{2(1-rz^{-4})}, F: \frac{(1-r)z^{-1}(1-z^{-2})}{2(1-rz^{-4})} \quad (1)$$

A multiszinusz analizátorral mérje meg a modellezendő/adaptálandó rendszer kimenőjelét, és a multiszinusz frekvenciákon – felhasználva a gerjesztés amplitúdójának és fázisának értékét – határozza meg az átvitel abszolút értékét és fázisát (max. 3 pont)! (Itt is az Ön által megírt programot használja, és ügyeljen arra, hogy a fázismentet (előjelváltást eredményező zérushelyektől eltekintve) folytonos!)

Modellillesztés, adaptív eljárások

8. Az adaptálandó rendszert lineáris kombinátorral igyekszünk modellezni. Ennek kimenőjele

$$\hat{y}(n) = w_1 u(n-1) + w_2 u(n-2) + \dots + w_p u(n-p). \quad (2)$$

Juttassa el a modellezendő/adaptálandó rendszert az állandósult állapotáig, majd ezt követően végezzen megfigyeléseket! Hány lépés után ítélte úgy, hogy a rendszer kimenőjele elérte az állandósult állapotát? Alkalmazza a 7. feladat esetére az LMS eljárást

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{X}(n).$$

(A lineáris kombinátor súlytényezőiből alkotott állóvektort \mathbf{W} , a regressziós vektort \mathbf{X} jelölje!) A paraméterek nulla kezdeti értékéből indulva futtassa az algoritmust a paraméterek állandósulásáig, azaz a (közelítő) megoldás megtalálásáig. Ezt követően, ezeket a paramétereket kiindulási értéknek megtartva, r értékét csökkentse q -val, majd folytassa a futtatást az új megoldás megtalálásáig. A bátorsági/konvergencia tényezőt Ön válassza meg! Indokolja választását! Rajzolja ki az együtthatók alakulását az iterációs lépések függvényében (konvergencia diagram⁴)! Adja meg a kapott paramétereket táblázatos formában. (max. 4 pont)!

Fejtsé mértani sorba az (1) átviteli függvényt! Vesse össze a sorfejtett alak és a lineáris kombinátor együtthatóit az (1) átviteli függvényű rendszer súlyfüggvényével! (max. 1 pont)!

9. Végezze el a modellillesztést mindkét átviteli függvényre (r és $r-q$ esetek) az

$$\hat{y}(n) = a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) + a_3 u(n-3) - b_1 \hat{y}(n-1) - b_2 \hat{y}(n-2) - b_3 \hat{y}(n-3) - b_4 \hat{y}(n-4)$$

alakú, végtelen impulzusválaszú modell alkalmazásával is! Az illesztés során a véges impulzusválaszú problémára visszavezetés módszerét (*equation-error formulation*) alkalmazza! Beadandó a program kommentezett listája és az együtthatók konvergencia diagramja (max. 4 pont)!

10. Készítsen az (1) átviteli függvényű rendszerhez állapotváltozós leírást! Alkossa meg a rendszer állapotainak becslésére alkalmas Kalman prediktor programját! A megfigyelési zajt és a rendszer zajt úgy generálja, hogy azok Gauss eloszlású fehér zajok legyenek $\mathbf{R}(n) = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ és $\mathbf{Q}(n) = \sigma_w^2 \mathbf{I}$, kovariancia mátrixokkal. A σ_n szórás úgy állítsa be, hogy megfigyelt jel szórása a bemeneti jelszint 2%-a legyen! A σ_w szórás pedig úgy állítsa be, hogy minden harmonikus komponens szórása az amplitúdó 5%-a legyen! Az 5. pont szerinti bemenőjel alkalmazása mellett – a vizsgált rendszer állandósult állapotának elérését követően – futtassa a prediktort mindkét esetre (r és $r-q$ esetek), és ábrázolja grafikusán a hibarendszer állapotváltozóinak és a $\text{trace}\mathbf{P}(n)$ értékének alakulását a prediktor állandósult állapotának eléréséig terjedően! Ne feledkezzen meg $\mathbf{P}(0)$ alkalmas beállításáról (max. 6 pont)!

Kérjük a dokumentumon is szerepeltetni készítője nevét, Neptun-kódját és email elérhetőségét.

A feladatok megoldását elektronikusan, pdf formátumban, egyetlen fájlban, a <https://hf.mit.bme.hu> portál felületén kérjük.

A kiadás dátuma: **2023. március 15.**

A beadási határidő: **2023. május 24.**

A feladat elfogadásához szükséges minimális pontszám: **16**

Jó munkát!

⁴A konvergencia diagramot elegendő az öt legnagyobb abszolút értékű együttható esetére kirajzoltatni: célszerűen egyetlen diagramban, természetesen az együtthatót azonosító jelöléssel. Hasonló formában kérjük a konvergencia diagramot a többi részfeladatnál is.

A Méréselmélet házi feladat paramétereit

Neptun kód	μ_A	μ_B	μ_C	σ_a	σ_w	ρ_1	ρ_2	t_0	f_0	rendszer	r	q	P
	V	V	V	V	V			ms	Hz				
A5127J	.5	.5	.5	.1	.1	.1	.1	5	40	B	0.80	0.11	17
B1ICCG	1	1	1	.1	.1	.1	.1	10	50	C	0.81	0.12	19
BF2VW5	1	-1	2	.1	.1	.2	.1	10	50	D	0.81	0.13	23
BSABPU	1	2	1	.1	.2	.1	.2	10	50	E	0.82	0.14	15
BVPOJV	2	1	1	.2	.3	.1	.3	5	50	F	0.82	0.15	17
C6PRMJ	1	-2	2	.2	.2	.2	.2	5	50	A	0.83	0.16	19
CBPHO7	2	2	1	.2	.1	.1	.1	5	50	B	0.83	0.17	17
CGGHH7	2	1	-2	.3	.1	.2	.1	5	50	C	0.84	0.18	19
CZXTZK	2	2	2	.1	.3	.1	.3	1	40	D	0.84	0.19	21
D4TBY9	.5	-1	1	.2	.3	.1	.3	2	40	E	0.85	0.20	23
D52IKH	1	.5	1	.3	.1	.2	.1	3	40	F	0.85	0.21	25
D7DHDH	1	1	.5	.2	.3	.1	.3	4	40	A	0.86	0.22	15
DEH4TX	.5	.5	.5	.1	.1	.1	.1	5	40	B	0.86	0.23	17
DLSBCC	2	2	1	.2	.1	.1	.1	5	40	C	0.87	0.24	19
DPBR72	2	-1	2	.3	.1	.2	.1	5	40	D	0.87	0.25	21
F3WDAR	0	1	1	.1	.1	.1	.1	10	50	E	0.88	0.10	23
F53ZYS	1	0	2	.1	.1	.2	.1	10	50	F	0.88	0.11	25
F7D9H0	1	2	0	.1	.2	.1	.2	10	50	A	0.89	0.12	15
FFILHV	2	0	1	.2	.3	.1	.3	5	50	B	0.89	0.13	17
FHX95E	0	2	2	.2	.2	.2	.2	5	50	C	0.90	0.14	19
FM8TIK	2	0	1	.2	.1	.1	.1	5	50	D	0.90	0.15	21
FP6SDC	2	1	0	.3	.1	.2	.1	5	50	E	0.90	0.16	21
G09F7X	2	0	2	.1	.3	.1	.3	1	40	F	0.80	0.10	15
GNNLT3	0	1	1	.2	.3	.1	.3	2	40	A	0.80	0.11	17
GPDH3C	1	.5	1	.3	.1	.2	.1	3	40	B	0.81	0.12	19
I6DM1X	1	1	.5	.2	.3	.1	.3	4	40	C	0.81	0.13	21
I8SNRG	.5	.5	.5	.1	.1	.1	.4	5	40	D	0.82	0.14	23
IGJYQY	2	-2	0	.2	.1	.1	.1	5	40	E	0.82	0.15	25
IKB965	2	1	2	.3	.1	.2	.1	5	40	F	0.83	0.16	15
IUVX4G	2	0	1	.2	.3	.1	.3	5	50	A	0.83	0.17	17
KCIOUJ	0	2	2	.2	.2	.2	.2	5	50	B	0.84	0.18	19
LJ0MS5	2	0	1	.2	.1	.1	.1	5	50	C	0.84	0.19	21
LPSB3R	2	-1	0	.3	.1	.2	.1	5	50	D	0.85	0.20	23
LWKES3	2	0	2	.1	.3	.1	.3	1	60	E	0.85	0.21	25
M0C3IY	0	1	1	.2	.3	.1	.3	2	60	F	0.86	0.22	15
M35K2K	1	.5	1	.3	.1	.2	.1	3	60	A	0.86	0.23	17
NC8PQI	1	1	.5	.2	.3	.1	.3	4	60	B	0.87	0.24	19
OH9I5E	.5	.5	.5	.1	.1	.1	.1	5	60	C	0.87	0.25	21
PWQ5BE	2	2	0	.2	.1	.1	.1	5	60	D	0.88	0.10	23
R3ZGIR	2	1	2	.3	.1	.2	.1	5	60	E	0.88	0.11	25
R7JF41	1	2	0	.1	.2	.1	.2	10	50	F	0.89	0.12	15
RANR5I	2	0	1	.2	.3	.1	.3	5	50	A	0.89	0.13	17
SKDI0M	0	2	2	.2	.2	.2	.2	5	50	B	0.90	0.14	19
TOZ7YP	2	0	1	.2	.1	.1	.1	5	50	C	0.90	0.15	21
ZG5YST	2	-1	0	.3	.1	.2	.5	5	50	D	0.80	0.23	19