8. Gyakorlat

Rekurzív LS becslés

1. A megfigyelés modellje $z_k = Ar^k + w_k,\ k = 0,1, \dots, N-1$, ahol w_k nem ismert modellezési és mérési hibát takar, $|r| < 1$ ismert konstans, A pedig a mérendő paraméter. Határozza meg a mérendő paraméter LS becslőjét! Vizsgálja meg az $|r| \to 1$, és az $N \to \infty$ eseteket! Ezt követően származtassa az LS becslő rekurzív változatát! Ellenőrizze, hogy a többparaméteres esetre az előadáson bemutatott összefüggések alkalmazhatók-e!

Megoldás:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{N-1} \end{bmatrix} [A] + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix},$$

Az LS becslő:

$$\hat{A} = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{z} = \frac{1 - r^2}{1 - r^{2N}} \sum_{k=0}^{N-1} z_k r^k,$$

ahol felhasználtuk a mértani sor összegképletét:

$$\sum_{k=0}^{N-1} r^{2k} = \frac{1 - r^{2N}}{1 - r^2} = 1 + r^2 + \dots + r^{2(N-1)}$$

Ha $|r| \to 1$, akkor

$$\hat{A} = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{z} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k,$$

Ha $N \to \infty$, de $|r| < 1$, akkor

$$\hat{A} = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{z} = (1 - r^2) \sum_{k=0}^{\infty} z_k r^k.$$

Figyeljük meg, hogy amennyiben minden megfigyelt érték r, akkor a becslő is 1-et ad!

A rekurzív felíráshoz írjuk át a becslő kifejezését a futó n-re:

$$\hat{A}(n) = [\boldsymbol{U}^T(n) \boldsymbol{U}(n)]^{-1} \boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n) \boldsymbol{z}(n) = \frac{1 - r^2}{1 - r^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} r^k z(k),$$

majd $n + 1$-re:

$$\hat{A}(n+1) = [\boldsymbol{U}^T(n+1) \boldsymbol{U}(n+1)]^{-1} \boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n+1) \boldsymbol{z}(n+1) = \frac{1 - r^2}{1 - r^{2(n+1)}} \sum_{k=0}^{n} r^k z(k),$$

illetve szétbontva:

$$\hat{A}(n+1) = \frac{1 - r^2}{1 - r^{2(n+1)}} \sum_{k=0}^{n-1} r^k z(k) + \frac{1 - r^2}{1 - r^{2(n+1)}} r^n z(n).$$

Mivel az n-re felírt összefüggésből

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k z(k) = \frac{1-r^{2n}}{1-r^2}\hat{A}(n),$$

ezért

$$\hat{A}(n+1) = \frac{1-r^2}{1-r^{2(n+1)}}\frac{1-r^{2n}}{1-r^2}\hat{A}(n) + \frac{1-r^2}{1-r^{2(n+1)}} r^n z(n)$$

Mivel

$$\frac{1-r^2}{1-r^{2(n+1)}}\frac{1-r^{2n}}{1-r^2} = \frac{1-r^{2n}}{1-r^{2(n+1)}} = \frac{1-r^{2(n+1)}-r^{2n}+r^{2(n+1)}}{1-r^{2(n+1)}} = 1 - \frac{(1-r^2)r^{2n}}{1-r^{2(n+1)}},$$

ezért

$$\hat{A}(n+1) = \hat{A}(n) + \frac{1-r^2}{1-r^{2(n+1)}} r^n\left[z(n) - r^n\hat{A}(n)\right] = \hat{A}(n) + G(n)\left[z(n) - r^n\hat{A}(n)\right],$$

ahol

$$G(n) = \frac{1-r^2}{1-r^{2(n+1)}} r^n$$

Mivel célszerűen $\hat{A}(0) = 0$ kezdeti értékről indulhatunk és $G(0) = 1$, ezért $\hat{A}(1) = z(0)$, ami a nemrekurzív számítással teljes összhangban van.

$$G(1) = \frac{1-r^2}{1-r^4} r, \qquad \hat{A}(2) = z(0) + \frac{1-r^2}{1-r^4} r[z(1) - rz(0)] = \frac{1-r^2}{1-r^4}[z(0) + rz(1)],$$

azaz megkapjuk a $N = 2$ esetére érvényes LS becslőt.

$$G(2) = \frac{1-r^2}{1-r^6} r^2$$

Ezekután vegyük elő a mátrixos eset összefüggéseit!

$$\hat{\boldsymbol{a}}(n+1) = \hat{\boldsymbol{a}}(n) + \boldsymbol{G}(n)[z(n) - \boldsymbol{u}(n)\hat{\boldsymbol{a}}(n)]$$

$$\boldsymbol{G}(n) = \frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)}{1 + \boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)}$$

$$\boldsymbol{P}(n+1) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{u}(n)]\boldsymbol{P}(n)$$

Mivel

$$\boldsymbol{P}(n) = [\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\boldsymbol{U}(n)]^{-1}$$

ezért

$$\boldsymbol{P}(1) = [\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(1)\boldsymbol{U}(1)]^{-1} = 1$$

kezdeti értékkel tudunk indulni, ami a nemrekurzív LS megoldásából jön $N = 1$ esetre. Ugyaninnen $\hat{A}(1) = z(0)$. Mivel a megfigyelési mátrix második eleme $\boldsymbol{u}(1) = r$, ezért

$$\boldsymbol{G}(1) = \frac{\boldsymbol{P}(1)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(1)}{1 + \boldsymbol{u}(1)\boldsymbol{P}(1)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(1)} = \frac{r}{1+r^2} = \frac{1-r^2}{1-r^4} r,$$

$$\boldsymbol{P}(2) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}(1)\boldsymbol{u}(1)]\boldsymbol{P}(1) = 1 - \frac{r^2}{1+r^2} = \frac{1}{1+r^2}, \qquad \boldsymbol{u}(2) = r^2$$

$$\boldsymbol{G}(2) = \frac{\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(2)}{1 + \boldsymbol{u}(2)\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(2)} = \frac{r^2}{(1+r^2)\left(1 + \frac{r^4}{1+r^2}\right)} = \frac{r^2}{1+r^2+r^4} = \frac{1-r^2}{1-r^6} r^2,$$

vagyis ezek segítségével is ugyanazokat az értékeket kapjuk.

Megjegyzés: Ha a ismeretlen paramétervektor dimenziója M, akkor felvethető, hogy először a nemrekurzív eljárással előállítsuk $\boldsymbol{P}(M)$ és $\widehat{\boldsymbol{A}}(M)$ értékét, és utána indítsuk az iterációt $\boldsymbol{G}(M)$ majd $\boldsymbol{P}(M+1)$**,** stb. előállításával.

2. Az 5. gyakorlaton az előző példa következő változata szerepelt:
A megfigyelés modellje $z_k = Ar^k + w_k$, $k = 0,1,\dots,N-1$, ahol w_k Gauss eloszlású, nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú fehér zaj, $|r| < 1$ ismert konstans, A pedig a mérendő paraméter. Határozza meg a mérendő paraméter GM becslőjét! Nézzük meg ennek rekurzív megoldását!

Az előadás alapján, amit változtatni kell:

$$\boldsymbol{G}(n) = \frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)}{\sigma_w^2 + \boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)}$$

Mivel $\boldsymbol{C}_w = \sigma_w^2 \boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{P}(n) = \left[\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{w}}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{U}(n)\right]^{-1}$$

ezért

$$\boldsymbol{P}(1) = \left[\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(1)\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{w}}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{U}(1)\right]^{-1} = \sigma_w^2$$

kezdeti értékkel tudunk indulni, ami a nemrekurzív LS megoldásából jön $N = 1$ esetre. Ugyaninnen $\hat{A}(1) = z(0)$. Mivel a megfigyelési mátrix második eleme $\boldsymbol{u}(1) = r$, ezért

$$\boldsymbol{G}(1) = \frac{\sigma_w^2 \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(1)}{\sigma_w^2 + \boldsymbol{u}(1)\sigma_w^2\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(1)} = \frac{r}{1+r^2} = \frac{1-r^2}{1-r^4}r,$$

$$\boldsymbol{P}(2) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}(1)\boldsymbol{u}(1)]\boldsymbol{P}(1) = \left[1 - \frac{r^2}{1+r^2}\right]\sigma_w^2 = \frac{\sigma_w^2}{1+r^2}, \qquad \boldsymbol{u}(2) = r^2$$

$$\boldsymbol{G}(2) = \frac{\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(2)}{1 + \boldsymbol{u}(2)\boldsymbol{P}(2)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(2)} = \frac{\sigma_w^2 r^2}{(1+r^2)\left(\sigma_w^2 + \dfrac{\sigma_w^2 r^4}{1+r^2}\right)} = \frac{r^2}{1+r^2+r^4} = \frac{1-r^2}{1-r^6}r^2,$$

vagyis ezek segítségével is ugyanazokat az értékeket kapjuk, mint az előző példában, ill. a becslő varianciájára az 5. gyakorlaton szerepelt példával összhangban:

$$var(\hat{A}) = \sigma_w^2 \frac{1-r^2}{1-r^{2N}}$$

$$var[\hat{A}(1)] = \boldsymbol{P}(1) = \sigma_w^2$$

$$var[\hat{A}(2)] = \boldsymbol{P}(2) = \frac{\sigma_w^2}{1+r^2} = \sigma_w^2 \frac{1-r^2}{1-r^4}$$

és így tovább.

3. A megfigyelés modellje $z_k = A + Br^k + w_k$, $k = 0,1,\dots,N-1$, ahol w_k nem ismert modellezési és mérési hibát takar, $|r| < 1$ ismert konstans, A pedig a mérendő paraméter. Határozza meg a mérendő paraméter LS becslőjét! Ezt követően származtassa az LS becslő rekurzív változatát! Ellenőrizze, hogy a többparaméteres esetre az előadáson bemutatott összefüggések alkalmazhatók-e!

$$\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r & \cdots & r^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & r \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r^{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \dfrac{1-r^N}{1-r} \\ \dfrac{1-r^N}{1-r} & \dfrac{1-r^{2N}}{1-r^2} \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1} = \frac{1}{N\dfrac{1-r^{2N}}{1-r^2} - \left(\dfrac{1-r^N}{1-r}\right)^2} \begin{bmatrix} \dfrac{1-r^{2N}}{1-r^2} & -\dfrac{1-r^N}{1-r} \\ -\dfrac{1-r^N}{1-r} & N \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U^T z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r & \cdots & r^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} z_k \\ \sum_{k=0}^{N-1} z_k r^k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \frac{1}{N\frac{1-r^{2N}}{1-r^2} - \left(\frac{1-r^N}{1-r}\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{1-r^{2N}}{1-r^2} & -\frac{1-r^N}{1-r} \\ -\frac{1-r^N}{1-r} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} z_k \\ \sum_{k=0}^{N-1} z_k r^k \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{N\frac{1-r^{2N}}{1-r^2} - \left(\frac{1-r^N}{1-r}\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{1-r^{2N}}{1-r^2}\sum_{k=0}^{N-1} z_k - \frac{1-r^N}{1-r}\sum_{k=0}^{N-1} z_k r^k \\ -\frac{1-r^N}{1-r}\sum_{k=0}^{N-1} z_k + N\sum_{k=0}^{N-1} z_k r^k \end{bmatrix}$$

A rekurzív változathoz:

$$\boldsymbol{U^T}(n)\boldsymbol{U}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r & \cdots & r^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & r \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \frac{1-r^n}{1-r} \\ \frac{1-r^n}{1-r} & \frac{1-r^{2n}}{1-r^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

ahol

$$a = a(n) = n, b = b(n) = \frac{1-r^n}{1-r}, c = c(n) = \frac{1-r^{2n}}{1-r^2}$$

$$P(n) = [\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{U}(n)]^{-1} = \frac{1}{n\frac{1-r^{2n}}{1-r^2} - \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{1-r^{2n}}{1-r^2} & -\frac{1-r^n}{1-r} \\ -\frac{1-r^n}{1-r} & n \end{bmatrix} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U^T}(n+1)\boldsymbol{U}(n+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r & \cdots & r^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & r \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 & \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \\ \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & \frac{1-r^{2(n+1)}}{1-r^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & b+\Delta b \\ b+\Delta b & c+(\Delta b)^2 \end{bmatrix}$$

ahol $\Delta b = r^n$

$$P(n+1) = [\boldsymbol{U}^T(n+1)\boldsymbol{U}(n+1)]^{-1} = \frac{1}{(a+1)(c+(\Delta b)^2)-(b+\Delta b)^2}\begin{bmatrix} c+(\Delta b)^2 & -b-\Delta b \\ -b-\Delta b & a+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(a+1)(c+(r^n)^2)-(b+r^n)^2}\begin{bmatrix} c+(r^n)^2 & -b-r^n \\ -b-r^n & a+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{D(n)}\begin{bmatrix} c+(r^n)^2 & -b-r^n \\ -b-r^n & a+1 \end{bmatrix}$$

ahol $D(n) = (a+1)(c+(r^n)^2)-(b+r^n)^2$ a $P(n+1)$ mátrix determinánsa.

Felhasználva, hogy $\boldsymbol{u}(n) = [1 \quad \Delta b] = [1 \quad r^n]$, valamint

$$\boldsymbol{G}(n) = \frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u^T}(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u^T}(n)}$$

$$\boldsymbol{G}(n) = \frac{\frac{1}{ac-b^2}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ r^n \end{bmatrix}}{1+\frac{1}{ac-b^2}[1 \quad r^n]\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ r^n \end{bmatrix}} = \frac{1}{(a+1)(c+(r^n)^2)-(b+r^n)^2}\begin{bmatrix} c-br^n \\ -b+ar^n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D(n)}\begin{bmatrix} c - br^n \\ -b + ar^n \end{bmatrix} = \frac{1}{(n+1)\frac{1-r^{2(n+1)}}{1-r^2} - \left(\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right)^2}\begin{bmatrix} \frac{1-r^{2n}}{1-r^2} - \frac{1-r^n}{1-r}r^n \\ -\frac{1-r^n}{1-r} + nr^n \end{bmatrix}$$

ahol közös nevezőre hozásokkal az emeletes tört eltüntethető, a képlet még rendezgethető.

Mivel most ismerjük $\boldsymbol{P}(n+1)$, ezért ellenőrzésképpen felhasználhatjuk, hogy

$\boldsymbol{P}(n+1) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{u}(n)]\boldsymbol{P}(n)$-ből kiindulva:

$$\boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{u}(n) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}(n+1)\boldsymbol{P}^{-1}(n)$$

$$\begin{bmatrix} g_0(n) \\ g_1(n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & r^n \end{bmatrix} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{D(n)}\begin{bmatrix} c + (r^n)^2 & -b - r^n \\ -b - r^n & a+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D(n)}\begin{bmatrix} \cdots & cr^n - br^{2n} \\ -b + ar^n & \cdots \end{bmatrix} = \frac{1}{D(n)}\begin{bmatrix} \cdots & g_0(n)r^n \\ g_1(n) & \cdots \end{bmatrix}$$

Vagyis

$$\boldsymbol{G}(n) = \frac{1}{D(n)}\begin{bmatrix} c - br^n \\ -b + ar^n \end{bmatrix}$$

azaz ugyanazt az eredményt kaptuk!

Így az iteráció:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(n+1) \\ \hat{B}(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}(n) \\ \hat{B}(n) \end{bmatrix} + \boldsymbol{G}(n)\left[z(n) - \begin{bmatrix} 1 & r^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{A}(n) \\ \hat{B}(n) \end{bmatrix}\right].$$

Most $\boldsymbol{G}(n)$ kifejezését explicit formában ismerjük, tehát nincs szükség $\boldsymbol{P}(n+1)$ használatára. Az új jelölésekkel az összefüggés egyszerűen beprogramozható.