6. Gyakorlat

Méréselmélet 1. zárthelyi 2022. március 21. (120 perc)

1. N zajos megfigyelésre alapozva eldöntendő, hogy a megfigyelési csatornában a $sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ vagy a $cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ diszkrét időfüggvényű jel van-e jelen? A zaj additív, Gauss eloszlású, nulla várható értékű, $\sigma_w = 0.5$ szórású fehér zaj. H_0 jelöli azt a hipotézist, hogy a $sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ időfüggvényű jel van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_0 = 0.9$. H_1 jelöli azt a hipotézist, hogy a $cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ időfüggvényű jel van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_1 = 0.1$. A költségek: $C_{10} = C_{10} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 1$. Határozza meg a mért adatok előfeldolgozásának módját, és a hozzátartozó döntési küszöb értékét (max. 5 pont)! Számítsa ki az előfeldolgozás súlytényezőit és a döntési küszöb numerikus értékét $N = 3$, és $n = 0,1,2$ diszkrét időpontokban vett minták esetére (max. 3 pont)!

Megoldás:

$$f\{z|H_0\} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_w\right)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(z_n - sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right)^2}, \qquad f\{z|H_1\} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma_w\right)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(z_n - cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right)^2}$$

A megfigyelt értékeket behelyettesítjük a log-likelihood arány függvénybe, és ha $ln\Lambda(z) > ln\eta$, akkor a döntés H_1, ha $ln\Lambda(z) < ln\eta$, akkor a döntés a H_0.

$$ln\Lambda(z) = lnf\{z|H_1\} - ln\, f\{z|H_0\} = -\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(z_n - cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right)^2 + \frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(z_n - sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right)^2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} ln\eta$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z_n\left(cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) - sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_w^2}{N}ln\eta + \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(cos^2\left(\frac{2\pi}{N}n\right) - sin^2\left(\frac{2\pi}{N}n\right)\right) = \frac{\sigma_w^2}{N}ln\eta + \frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right)\right)$$

$$\eta = \frac{0.9(10-1)}{0.1(10-1)} = 9,$$

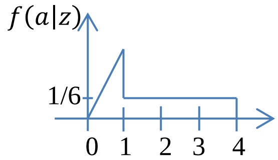
$$cos\left(\frac{2\pi}{3}0\right) = 1;\ cos\left(\frac{2\pi}{3}1\right) = -0.5;\ cos\left(\frac{2\pi}{3}2\right) = -0.5; \qquad sin\left(\frac{2\pi}{3}0\right) = 0;\ sin\left(\frac{2\pi}{3}1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};\ sin\left(\frac{2\pi}{3}2\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\left(\frac{4\pi}{3}0\right) = 1;\ cos\left(\frac{4\pi}{3}1\right) = -0.5;\ cos\left(\frac{4\pi}{3}2\right) = -0.5;$$

Ezekkel az előfeldolgozás és a döntési küszöb:

$$\frac{1}{3}\left(z_0 - \left(0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1 - \left(0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_2\right) \cong 0.33z_0 - 0.455z_1 + 0.122z_2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0.1831$$

2. Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 3 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 1 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) értékét! Határozza meg az $\hat{a}_{MS}$ becslő varianciáját (max. 3 pont)?



Megoldás:

$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} af(a|z)da = \int_0^1 a^2\, da + \int_1^4 \frac{1}{6}a\, da = \frac{a^3}{3}\Big]_0^1 + \frac{a^2}{12}\Big]_1^4 = \frac{1}{3} + \frac{15}{12} = 1\frac{7}{12} \approx 1.583, \qquad \hat{a}_{ABS} = 1, \text{ mert}$$

a sűrűségfüggvény alatti terület $0-1$ között 0.5, $1-4$ között ugyancsak 0.5. $\hat{a}_{MAP} = 1$.

$$var(\hat{a}_{MS}) = E[a^2] - \hat{a}_{MS}{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f(a|z)da - \hat{a}_{MS}{}^2 = \int_0^1 a^3 da + \int_1^4 \frac{1}{6} a^2\, da - \hat{a}_{MS}{}^2 =$$

$$= \frac{a^4}{4}\Big]_0^1 + \frac{a^3}{18}\Big]_1^4 - \hat{a}_{MS}{}^2 = \frac{1}{4} + \frac{7}{2} - \left(1\frac{7}{12}\right)^2 = 3.75 - 2.507 \cong 1.243$$

3. Additív, Gauss eloszlású zajjal terhelt DC szint mérését végezzük mérési sorozatra alapozva: $z_k = A + w_k$, $k = 0,1,\dots,N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, várható értéke nulla, de a szórása ismeretlen. Torzítatlan-e a következő becslés (max. 3 pont)? Ha igen, akkor mekkora a torzítás (max. 1 pont)?

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \widehat{\sigma^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k \\ \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left(z_k - \hat{A}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Mivel $E\{z_k\} = A$, ezért a A paraméter becslése torzítatlan. Mivel

$$E\{\widehat{\sigma^2}\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{\left(z_k - A - (\hat{A} - A)\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1} E\{(z_k - A)^2\} - 2\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{(z_k - A)\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(z_j - A)\right\} + \sum_{k=0}^{N-1} E\left\{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(z_i - A)\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(z_j - A)\right)\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{N}[N\sigma^2 - 2\sigma^2 + \sigma^2] = \frac{N-1}{N}\sigma^2,$$

tehát a σ^2 paraméter becslése torzított. A torzítás:

$$E\{\widehat{\sigma^2}\} - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{N}.$$

A levezetésnél felhasználtuk, hogy $E\{(z_k - A)^2\} = \sigma^2$, és $E\{(z_k - A)(z_j - A)\} = 0$, ha $j \neq k$.

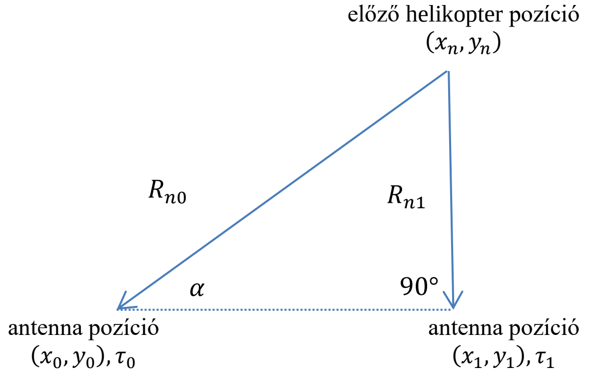
4. Egy kételemű zajsorozat kovariancia mátrixa $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$. Vezesse le, hogy milyen tulajdonságú mátrixszal kell transzformálni a zajsorozatot, hogy a transzformált zajsorozat kovariancia mátrixa egységmátrix legyen (max. 1 pont)! Határozza meg a transzformáció mátrixának elemeit (max. 3 pont)!

Megoldás: $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{D}\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}}\} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{T}}\}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{I}$. Egy lehetséges választás: $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$. Ezzel: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & a(b+\rho c) \\ a(b+\rho c) & b(b+\rho c) + c(\rho b + c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Innen

$$a = \pm 1, \qquad b = -\rho c,$$

$$c = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}};\ b = \mp\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

..



5. Helikoptert követünk két földi mérőállomással. A robotpilóta fixen tartja a vízszintes irányú pozíciót, mert a helikopter emelési feladatot lát el, tehát csak a magasság változás becslését kell megoldanunk. A probléma megoldásához az előadáson megismert összefüggések a következők:

$$R_k(x_s, y_s) = \sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2}$$
$$t_k = T_0 + \frac{R_k}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1,$$

ahol t_k a vételi időpont, T_0 az üzenetküldés időpontja, c a terjedési sebesség, w_k nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú zaj, melynek mintái korrelálatlanok. $\boldsymbol{a} = [x_s \quad y_s]^T$. Feltételezzük, hogy – például az előző mérés eredményeként – rendelkezésre állnak egy, az ismeretlenhez közeleső pozíció x_n, y_n és $R_{nk}, k = 0,1,\cdots,N-1$, adatai.

$$R_k \cong R_{nk} + \left.\frac{\partial R_k}{\partial x_s}\right|_{x_s=x_n} \delta x_s + \left.\frac{\partial R_k}{\partial y_s}\right|_{y_s=y_n} \delta y_s = R_{nk} + cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s,$$

$$t_k = T_0 + \frac{R_{nk} + cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.$$

Itt R_{nk}/c minden antenna pozícióban is mert konstans, ezért a továbbiakban bevezethetjük:

$$\tau_k = t_k - \frac{R_{nk}}{c} = T_0 + \frac{cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.$$

Egy további transzformációval azonban T_0 kiiktatható: ez az érkezési idők különbsége (time difference of arrivals: TDOA) módszer. Képezzük a következő különbségeket:

$$z_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{[cos(\alpha_k) - cos(\alpha_{k-1})]\delta x_s + [sin(\alpha_k) - sin(\alpha_{k-1})]\delta y_s}{c} + [w_k - w_{k-1}],$$

$$k = 1,\cdots,N-1.$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} cos(\alpha_1) - cos(\alpha_0) & sin(\alpha_1) - sin(\alpha_0) \\ \vdots & \vdots \\ cos(\alpha_{N-1}) - cos(\alpha_{N-2}) & sin(\alpha_{N-1}) - sin(\alpha_{N-2}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_s \\ \delta y_s\end{bmatrix} + \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{w}',$$

$$\boldsymbol{w}' = \begin{bmatrix} w_1' \\ \vdots \\ w_{N-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{w}'} = E[\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}'\boldsymbol{A}^T] = \sigma_w^2[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T].$$

$$\widehat{\boldsymbol{a}}' = \begin{bmatrix}\delta x_s \\ \delta y_s\end{bmatrix} = [\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T]^{-1}\boldsymbol{z}, \ \boldsymbol{C}_{\widehat{\boldsymbol{a}}'} = \sigma_w^2[\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}.$$

Aktualizálja a fenti összefüggéseket az ábra szerinti esetre, és becsülje meg a függőleges irányú elmozdulás értékét és szórását, ha $\sigma_w = 0.05\mu s$, $z_1 = -0.5\mu s$ és $\alpha = 30°$ (max. 4 pont)! Milyen további információra van szükségünk ahhoz, hogy a repülőgép tényleges magasságát is meg tudjuk határozni? (max. 1 pont)

Megoldás: $\boldsymbol{U} = \frac{1}{c}[sin(90°) - sin(30°)] = \frac{1}{2c}$, $\boldsymbol{A} = [-1 \quad 1]$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = 2$, $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{w}'} = 2\sigma_w^2$, $\hat{a}' = \widehat{\delta y_s} = 2cz_1 = -300m$
$\boldsymbol{C}_{\widehat{\boldsymbol{a}}'} = 8c^2\sigma_w^2$, $\sqrt{var(\hat{a}')} = 15 * 2\sqrt{2} \cong 42{,}43m$. A mérőállomások földrajzi távolságának ismerete szükséges.

6. A megfigyelés modellje $z_k = Ar^k + w_k$, $k = 0,1,\dots,N-1$, ahol w_k Gauss eloszlású, nulla várható értékű, ismert $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{w}}$ kovariancia mátrixú zaj, $|r| < 1$ ismert konstans, A pedig a mérendő paraméter. $N = 2$ esetére, amikor $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$, adja meg A MVU becslőjének és a becslés varianciájának explicit kifejezését!
   Fontolja meg, hogy tudja-e használ a következő összefüggéseket:

$$\widehat{\boldsymbol{a}}_{ML} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z}, \ cov(\widehat{\boldsymbol{a}}_{ML}) = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$

(max. 4 pont)!

Megoldás:
Mivel a megfigyelési egyenlet lineáris, és a csatornazaj Gauss eloszlású, ezért az ML becslő hatásos MVU becslő lesz.

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U} = \frac{1}{1-\rho^2}[1 \quad r]\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} = \frac{1 - 2r\rho + r^2}{1-\rho^2}$$
$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}[1 \quad r]\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - r\rho}{1-\rho^2} & \frac{r-\rho}{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

Ezzel

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{ML} = \frac{(1-r\rho)z_0 + (r-\rho)z_1}{1-2r\rho+r^2}, cov(\hat{\boldsymbol{a}}_{ML}) = \frac{1-\rho^2}{1-2r\rho+r^2}$$

Megjegyzés:
Ha $r = 1$, akkor

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{ML} = \frac{z_0 + z_1}{2}, cov(\hat{\boldsymbol{a}}_{ML}) = \frac{1+\rho}{2}$$

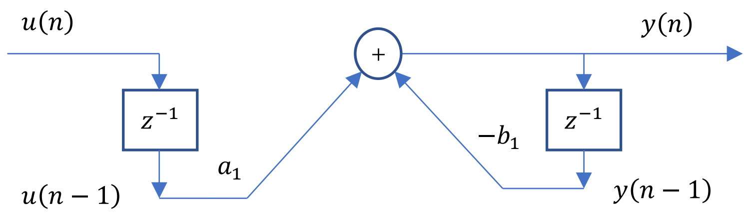
7. Írja fel egy valós időben működőképes rendszert leíró, elsőrendű lineáris rendszer differenciaegyenletét! Származtassa a kimenet számításának jelfolyamgráfját, és állítsa elő annak azt a változatát, amely csak egyetlen késleltető elemet tartalmaz! Írja fel a rendszer állapotváltozós leírását is! Adja meg az állapotváltozós leírást a

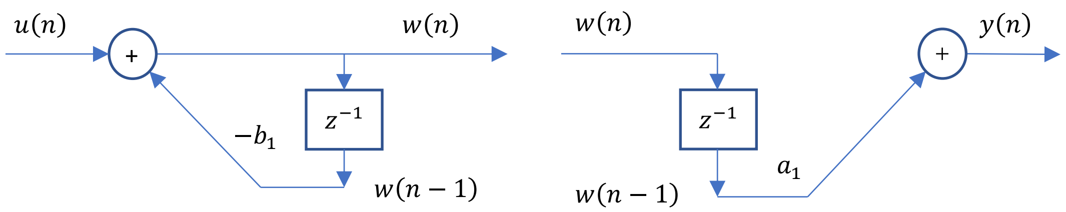
$$H(z) = \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-1}}$$

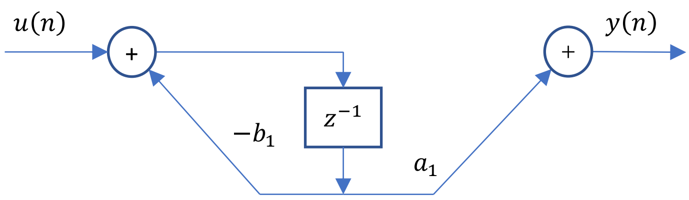
átviteli függvényű rendszer esetére (max. 4 pont)! Tervezzen megfigyelőt, amely képes ezt a rendszert véges lépésben követni, és írj fel a megfigyelő átviteli függvényét (max. 3 pont)!

Megoldás:

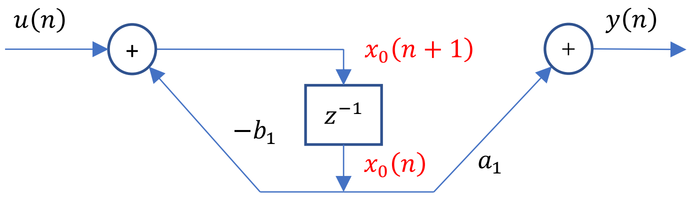
$$y(n) + b_1 y(n-1) = a_1 u(n-1)$$
$$y(n) = a_1 u(n-1) - b_1 y(n-1)$$







Az állapotváltozós leírás:



$$x_0(n+1) = -b_1 x_0(n) + u(n)$$
$$y(n) = a_1 x_0(n)$$

$$H(z) = \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-1}}$$

átviteli függvény esetén: $a_1 = 1-r, b_1 = -r$
A hibarendszer mátrixa: $A - GC = -b_1 - g_0 a_1,\ \ g_0 = -\frac{b_1}{a_1} = \frac{r}{1-r}$

A megfigyelő átviteli függvényének származtatása:

A megfigyelő kimenőjelének z-transzformáltja: $\hat{Y}(z) = (1-r)\hat{X}_0(z)$
A megfigyelő állapotváltozója z-transzformáltjának értéke a késleltető bemenetén:

$$z\hat{X}_0(z) = \frac{r}{1-r}\left[Y(z) - (1-r)\hat{X}_0(z)\right] + r\hat{X}_0(z) = \frac{r}{1-r}Y(z)$$

Ebbe behelyettesítve $\hat{X}_0(z) = \frac{\hat{Y}(z)}{1-r}$ értéket:

$$H_{megfigyelő} = \frac{\hat{Y}(z)}{Y(z)} = rz^{-1}$$