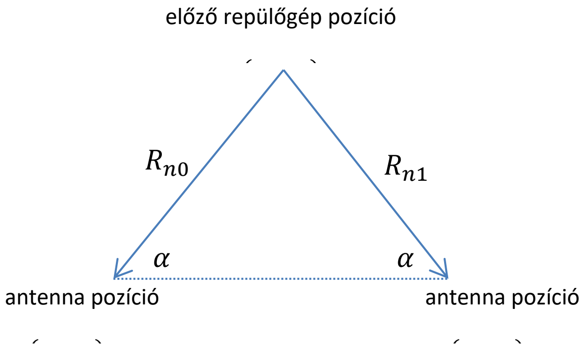
5. Gyakorlat

Becsléselméleti feladatok

1. Repülőgépet követünk két földi mérőállomással. A robotpilóta fixen tartja a tengerszint feletti magasságot, tehát csak a vízszintes eltérés becslését kell megoldanunk. A probléma megoldásához az előadáson megismert összefüggések a következők:

$$R_k(x_s, y_s) = \sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2}$$
$$t_k = T_0 + \frac{R_k}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1,$$

ahol t_k a vételi időpont, T_0 az üzenetküldés időpontja, c a terjedési sebesség, w_k nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú zaj, melynek mintái korrelálatlanok. Az ismeretlen pozíció: $\boldsymbol{a} = [x_s \quad y_s]^T$. Feltételezzük, hogy – például az előző mérés eredményeként – rendelkezésre állnak egy, az ismeretlenhez közeleső pozíció x_n, y_n és $R_{nk}, k = 0,1,\cdots,N-1$, adatai.



$$R_k \cong R_{nk} + \left.\frac{\partial R_k}{\partial x_s}\right|_{x_s=x_n} \delta x_s + \left.\frac{\partial R_k}{\partial y_s}\right|_{y_s=y_n} \delta y_s = R_{nk} + cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s,$$

$$t_k = T_0 + \frac{R_{nk} + cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.$$

Itt R_{nk}/c minden antenna pozícióban is mert konstans, ezért a továbbiakban bevezethetjük:

$$\tau_k = t_k - \frac{R_{nk}}{c} = T_0 + \frac{cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.$$

Egy további transzformációval azonban T_0 kiiktatható: ez az érkezési idők különbsége (time difference of arrivals: TDOA) módszer. Képezzük a következő különbségeket:

$$z_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{[cos(\alpha_k) - cos(\alpha_{k-1})]\delta x_s + [sin(\alpha_k) - sin(\alpha_{k-1})]\delta y_s}{c} + [w_k - w_{k-1}],$$

$$k = 1,\cdots,N-1.$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} cos(\alpha_1) - cos(\alpha_0) & sin(\alpha_1) - sin(\alpha_0) \\ \vdots & \vdots \\ cos(\alpha_{N-1}) - cos(\alpha_{N-2}) & sin(\alpha_{N-1}) - sin(\alpha_{N-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_s \\ \delta y_s \end{bmatrix} + \boldsymbol{w'} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{a'} + \boldsymbol{w'},$$

$$\boldsymbol{w'} = \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{w'}} = E[\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w'}\boldsymbol{A}^T] = \sigma_w^2[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T].$$

$$\widehat{\boldsymbol{a}}' = \begin{bmatrix} \delta x_s \\ \delta y_s \end{bmatrix} = [\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T]^{-1}\boldsymbol{z}, \ \ \boldsymbol{C}_{\widehat{\boldsymbol{a}}'} = \sigma_w^2[\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}.$$

Aktualizálja a fenti összefüggéseket az ábra szerinti esetre, és becsülje meg a vízszintes irányú elmozdulás értékét és szórását, ha $\sigma_w = 0.1\mu s$, $z_1 = -1\mu s$ és $\alpha = 60°$! Milyen további információra van szükségünk ahhoz, hogy a repülőgép sebességét is meg tudjuk határozni?

Megoldás: $\boldsymbol{U} = \frac{1}{c}[cos(120°) - cos(60°)] = -\frac{1}{c}$, $\boldsymbol{A} = [-1 \quad 1]$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = 2$, $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{w'}} = 2\sigma_w^2$, $\hat{a}' = \widehat{\delta x_s} = -cz_1 = 300m$
$\boldsymbol{C}_{\widehat{\boldsymbol{a}}'} = 2c^2\sigma_w^2$, $\sqrt{var(\hat{a}')} = 30 * \sqrt{2} \cong 42{,}43m$. Az aktuális és az előző mérés időbélyege közötti különbség ismerete szükséges.

2. A megfigyelés modellje $z_k = Ar^k + w_k,\ k = 0,1,\dots, N-1$, ahol w_k Gauss eloszlású, nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú fehér zaj, $|r| < 1$ ismert konstans, A pedig a mérendő paraméter. Határozza meg a mérendő paraméter GM becslőjét! Vizsgálja meg az $|r| \to 1$, és az $N \to \infty$ eseteket!

Megoldás:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{N-1} \end{bmatrix} [A] + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}_w = \sigma_w^2 \boldsymbol{I}$$

A GM becslő:

$$\hat{A} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z} = \frac{1-r^2}{1-r^{2N}}\sum_{k=0}^{N-1} z_k r^k,\ \ var(\hat{A}) = \sigma_w^2 \frac{1-r^2}{1-r^{2N}}$$

ahol felhasználtuk a mértani sor összegképletét:

$$\sum_{k=0}^{N-1} r^{2k} = \frac{1-r^{2N}}{1-r^2} = 1 + r^2 + \dots + r^{2(N-1)}$$

Ha $|r| \to 1$, akkor

$$\hat{A} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k,\ \ var(\hat{A}) = \sigma_w^2 \frac{1}{N}$$

Ha $N \to \infty$, de $|r| < 1$, akkor

$$\hat{A} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z} = (1-r^2)\sum_{k=0}^{\infty} z_k r^k,\ \ var(\hat{A}) = \sigma_w^2(1-r^2),$$

azaz hiába a végtelen számú megfigyelés, a becslés varianciája nem csökken nullára!

3. A megfigyelés modellje $z_k = A + w_k,\ k = 0,1,\dots, N-1$, ahol w_k ismeretlen eloszlású, nulla várható értékű, $\boldsymbol{C}_w$ kovariancia mátrixú zaj, A pedig a mérendő paraméter. Határozza meg a mérendő paraméter BLUE becslőjét!

$$\boldsymbol{C}_w = \begin{bmatrix} 1 & \rho & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \rho & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

és legyen a dimenziója páros!

Megoldás: A kovariancia mátrix inverze blokkonként képezhető:

$$\boldsymbol{C}_w^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\rho & 1 \end{bmatrix}, U^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1], \hat{A} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z}$$

$$[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}] = N\frac{1-\rho}{1-\rho^2} = \frac{N}{1+\rho},\ \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z} = \frac{1}{1+\rho}\sum_{k=0}^{N-1} z_k$$

$$\hat{A} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k\,, \qquad var(\hat{A}) = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1} = \frac{1+\rho}{N}$$

4. A megfigyelés modellje $z_k = A + Bk + w_k,\ k = 0,1,\dots,N-1$, ahol w_k Gauss eloszlású, nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú fehér zaj, A és B pedig a mérendő paraméter. Határozza meg a mérendő értékek CRLB értékét! Melyik paraméter mérésekor érhetünk el kisebb varianciát?

Megoldás: Jelölje $\boldsymbol{a} = [A \quad B]^T$ a paramétervektort! Először ki kell számítanunk a $2*2$-es Fisher információs mátrixot:

$$I(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} -E\left[\frac{\partial^2 lnf(z;\boldsymbol{a})}{\partial^2 A}\right] & -E\left[\frac{\partial^2 lnf(z;\boldsymbol{a})}{\partial A\partial B}\right] \\ -E\left[\frac{\partial^2 lnf(z;\boldsymbol{a})}{\partial A\partial B}\right] & -E\left[\frac{\partial^2 lnf(z;\boldsymbol{a})}{\partial^2 B}\right] \end{bmatrix}$$

A likelihood függvény (csatornakarakterisztika):

$$f(z;\boldsymbol{a}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k - A - Bk)^2\right\}$$

ahonnan a deriváltak:

$$\frac{\partial lnf(z;\boldsymbol{a})}{\partial A} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k - A - Bk),\quad \frac{\partial lnf(z;\boldsymbol{a})}{\partial B} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k - A - Bk)k$$

$$\frac{\partial^2 lnf(z;\boldsymbol{a})}{\partial^2 A} = -\frac{N}{\sigma^2},\quad \frac{\partial^2 lnf(z;\boldsymbol{a})}{\partial A\partial B} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1} k,\quad \frac{\partial^2 lnf(z;\boldsymbol{a})}{\partial^2 B} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1} k^2$$

Mivel a másodrendű deriváltak nem függenek $\boldsymbol{a}$-tól, közvetlenül kapjuk:

$$I(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} N & \sum_{k=0}^{N-1} k \\ \sum_{k=0}^{N-1} k & \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} N & \frac{N(N-1)}{2} \\ \frac{N(N-1)}{2} & \frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \end{bmatrix}$$

ahol felhasználtuk a:

$$\sum_{k=0}^{N-1} k = \frac{N(N-1)}{2},\qquad \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$$

azonosságokat. A mátrix inverze:

$$I^{-1}(\boldsymbol{a}) = \sigma^2\begin{bmatrix} \frac{2(2N-1)}{N(N+1)} & -\frac{6}{N(N+1)} \\ -\frac{6}{N(N+1)} & \frac{12}{N(N^2-1)} \end{bmatrix}$$

Ezzel a CRLB:

$$var(\hat{A}) \geq \frac{2(2N-1)}{N(N+1)}\sigma^2,\quad var(\hat{B}) \geq \frac{12}{N(N^2-1)}\sigma^2$$

Mivel

$$\frac{CRLB(\hat{A})}{CRLB(\hat{B})} = \frac{(2N-1)(N-1)}{6} > 1 \text{ ha } N \geq 3,$$

ezért B becslése könnyebb. B CRLN-je $1/N^3$ szerint csökken, míg A CRLN-je $1/N$ szerint. Ez azt is jelenti, hogy a megfigyelt érték érzékenyebb B megváltozására, mint A-éra. Kis megváltozásokra:

$$\Delta z_k \approx \frac{\partial z_k}{\partial A}\Delta A = \Delta A, \qquad \Delta z_k \approx \frac{\partial z_k}{\partial B}\Delta B = k\Delta B$$