4. Gyakorlat

Becsléselméleti feladatok

1. Távolságot mérünk radarral: $R = \tau\frac{c}{2}$, ahol τ a reflektálódott elektromágneses hullám terjedési ideje, c a fénysebesség. A terjedési idő megfigyelésére van lehetőségünk, összesen négy megfigyelést végzünk. A megfigyelési egyenlet: $z_k = \tau + w_k$, ahol w_k nulla várható értékű, $\boldsymbol{C_w} = \sigma_w^2 I$ kovariancia mátrixú, Gauss eloszlású zaj. Azt is tudjuk, hogy R μ_R várható értékű, és σ_R^2 varianciájú valószínűségi változóként modellezhető. Válasszon olyan mérési módszert, amely minden elérhető információt hasznosít! Vezesse le a becslő és varianciájának kifejezését! Adja meg a numerikus értékeket is, ha $z_0 = 95\mu s, z_1 = 105\mu s, z_2 = 97\mu s, z_3 = 103\mu s,\ \ \sigma_w = 4\mu s,\ \ \mu_R = 15km,\ \ \sigma_R = 300m\ \ (c = 3\cdot 10^5\frac{km}{s})$! Ezt követően határozza meg a távolság értékét és szórását (max. 1 pont)!

Megoldás:

Használjuk a Bayes becslést, és a maximum a posteriori (MAP) becslés technikáját!

$$\left.\frac{\partial f(a|\boldsymbol{z})}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0,\quad \left.\frac{\partial \ln f\,(\boldsymbol{z}|a)}{\partial a} + \frac{\partial \ln f\,(a)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0.$$

Most $f(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R}e^{-\frac{(R-\mu_R)^2}{2\sigma_R^2}}$, illetve $f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau}e^{-\frac{(\tau-\mu_\tau)^2}{2\sigma_\tau^2}}$ $f(\boldsymbol{z}|\tau) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k-\tau)^2}$,

amiből

$$\frac{\partial \ln f(\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\tau-\mu_\tau}{\sigma_\tau^2},\ \frac{\partial \ln f(\boldsymbol{Z}|\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k-\tau).\quad \left.\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k-\tau) - \frac{\tau-\mu_\tau}{\sigma_\tau^2}\right|_{\tau_{MAP}} = 0$$

$$\tau_{MAP} = \frac{\mu_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}z_k}{1+N\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_w^2}},\ var\{\tilde{\tau}\} = \frac{\sigma_\tau^2}{1+N\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_w^2}}$$

Tehát:

$$\hat{\tau}_{MAP} = \frac{100+\frac{1}{4}400}{1+4\frac{1}{4}}\mu s = 100\mu s, \sqrt{var(\hat{\tau}_{MAP})} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}\mu s$$

A távolság értéke és szórása:

$$\hat{R}_{MAP} = \hat{\tau}_{MAP}\frac{c}{2} = 100\mu s * \frac{3\cdot 10^5}{2}\frac{km}{s} = 15km,$$

$$\sqrt{var(\hat{R}_{MAP})} = \frac{c}{2}\sqrt{var(\hat{\tau}_{MAP})} = \frac{3\cdot 10^8}{2}\frac{m}{s}\sqrt{2}\cdot 10^{-6}s \approx 212.13m$$

2. Egységnyi szórású fehér-zaj minta-sorozatból színes-zaj mintasorozatot szeretnénk előállítani. Vezesse le, hogy milyen tulajdonságú mátrixszal kell transzformálni a fehér-zaj mintasorozatot, hogy a színes zaj kovariancia-mátrixa $\boldsymbol{C}$ legyen! Határozza meg a transzformáció mátrixának elemeit, ha $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}$!

Megoldás: $\boldsymbol{w'} = \boldsymbol{Dw}$, $\boldsymbol{E\{Dww^TD^T\} = DE\{ww^T\}D^T = DD^T = C}$.

Egy lehetséges választás: $\begin{bmatrix}a & 0\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a^2 & ab\\ ab & b^2+c^2\end{bmatrix}$. Innen $a = \pm 1, b = \frac{\rho}{a} = \pm\rho$, $c = \pm\sqrt{1-\rho^2}$.

3. A mért adatainkról feltételezzük, hogy felírhatók: $y_n = a_0 + a_1 u_n + w_n, n = 0,1, \dots, N-1$; ill. vektorokkal-mátrixokkal $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}$ formában. Határozza meg a paraméterek legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslőjének összefüggését és annak számértékét, ha $\sum_{n=0}^{N-1} u_n = 0$, $\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 = 100, \sum_{n=0}^{N-1} y_n = 5, \sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n = 100, N = 10$!

Megoldás:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 \\ 1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}] = \begin{bmatrix} N & \sum_{n=0}^{N-1} u_n \\ \sum_{n=0}^{N-1} u_n & \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \\ \sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 & -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n \\ -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_n \\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. A $z(n) = Asin\left(2\pi \frac{f_0}{f_m} n + \varphi\right) + w(n)$ összefüggéssel leírható megfigyelési modellt alkalmazunk, ahol $w(n)$ Gauss eloszlású, fehér zaj, f_m pedig a mintavételi frekvencia. A mért jelből 125 mintát veszünk. A jel/zaj viszony: $\frac{A^2}{2\sigma_w^2} = 10$. Vezesse le a fázisbecslés varianciájának Cramer-Rao alsó korlátját megadó összefüggést, és számítsa ki numerikus értékét, ha $\frac{f_0}{f_m} = 0.02$!

Megoldás: Mivel $z_k = s_k(a) + w_k,\ k = 0,1, \dots, N-1$, megfigyelési modell esetén, ahol w_k Gauss eloszlású, nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú fehér zaj, a Cramer-Rao alsó korlát

$$var(\hat{a}) \geq \frac{\sigma_w^2}{\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{\partial s_k(a)}{\partial a}\right]^2}$$

alakban írható, a példa esetében:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{\partial s_k(a)}{\partial a}\right]^2 = A^2 \sum_{k=0}^{N-1}\left[cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_m} n + \varphi\right)\right]^2 = \frac{NA^2}{2}\left[1 + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} cos\left\{2\left(2\pi \frac{f_0}{f_m} n + \varphi\right)\right\}\right]$$

ahol felhasználtuk a $cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$ összefüggést. Mivel $\frac{f_0}{f_m} = 0.02$, ezért a jel alapharmonikusából 50 mintát, a második harmonikusából 25 mintát veszünk, vagyis a 125 minta a második harmonikus 5 teljes periódusát fedi le. Ekkor viszont a zárójelben lévő második tag nulla, hiszen az öt teljes periódus mintáinak átlaga nulla lesz. Ezzel a Cramer-Rao alsó korlát értéke:

$$var(\hat{\varphi}) \geq \frac{2\sigma_w^2}{NA^2} = \frac{1}{1250} = 0.0008$$