3. Gyakorlat

Becsléselméleti feladatok

1. Az átlagos négyzetes hibát az $mse(\hat{a}) = E[(\hat{a} - a)^2] = var(\hat{a}) + b^2(a)$ összefüggéssel definiáltuk. Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérését végezzük mérési sorozatra alapozva: $z_k = a + w_k, \quad k = 0,1,\dots,N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, és valószínűség sűrűségfüggvénye $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Vezesse le a minimális varianciájú, torzítatlan becslő kifejezését erre az esetre! Vajon az átlagos négyzetes hiba csökkenthető-e az elért minimális variancia alá, ha megengedjük, hogy $b(a) \neq 0$ legyen? A vizsgálatot úgy végezze, hogy az optimális torzítatlan becslő helyett annak α-szorosát használja becslőnek, és ezen paraméter függvényében minimalizálja $mse(\hat{a})$ kifejezését!

Megoldás:

A csatornakarakterisztika:

$$f(\mathbf{z}|a) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k-a)^2},$$

amelynek maximumhelyénél kapjuk az *a* paraméter Gauss-Markov becslőjét:

$$\left.\frac{\partial \ln f\,(\mathbf{z}|a)}{\partial a}\right|_{\hat{a}=\hat{a}_{ML}=\hat{a}_{GM}} = \frac{N}{\sigma_n^2}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k - a\right] = 0,$$

ahonnan

$$\hat{a}_{ML} = \hat{a}_{GM} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k,$$

azaz lineáris megfigyelési egyenlet és Gauss eloszlású csatorna zaj esetén a legjobb (Gauss-Markov) becslő az egyszerű átlagolás. Ez torzítatlan, mert $E\{\hat{a}_{ML}\}$=a, valamint minimális varianciájú, mert

$$\frac{\partial \ln f(z;a)}{\partial a} = I(a)(g(z) - a)$$

struktúrájú:

$$\hat{a}_{ML} = g(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k,\ \ var\{\hat{a}_{ML}\} = I^{-1}(a) = \frac{\sigma_n^2}{N}.$$

Ha $\hat{a} = \alpha * \hat{a}_{ML}$, akkor

$$mse(\hat{a}) = var(\hat{a}) + b^2(a) = \alpha^2\frac{\sigma_n^2}{N} + (\alpha-1)^2 a^2$$

Ennek minimumhelye α függvényében:

$$\frac{\partial mse}{\partial \alpha} = 2\alpha\frac{\sigma_n^2}{N} + 2(\alpha-1)a^2\Big|_{\alpha=\alpha_{mse}} = 0,$$

ahonnan

$$\alpha_{mse} = \frac{a^2}{a^2 + \frac{\sigma_n^2}{N}}$$

. Ezt visszahelyettesítve

$$mse(\hat{a},\alpha_{mse}) = \left(\frac{a^2}{a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}\right)^2 \frac{\sigma_n^2}{N} + \left(\frac{\frac{\sigma_n^2}{N}}{a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}\right)^2 a^2 = \frac{\sigma_n^2}{N}\frac{a^2\left(a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}\right)}{\left(a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}\right)^2} = \frac{\sigma_n^2}{N}\frac{a^2}{a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}} \le \frac{\sigma_n^2}{N},$$

azaz az mse (és ezzel $var(\hat{a})$) csökkenhet torzított mérés esetén! Azonban ez általában nem „realizálható”, tehát csak elvi megfontolás, hiszen α_{mse} az ismeretlen a paraméter függvénye! Ugyanakkor próbálkozni lehet!

2. Additív, Gauss eloszlású zajjal terhelt DC szint mérését végezzük mérési sorozatra alapozva: $z_k = A + w_k,\ k = 0,1,\dots,N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, várható értéke nulla, de a szórása ismeretlen. Torzítatlan-e a következő becslés?

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix}\hat{A}\\ \widehat{\sigma^2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k\\ \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z_k-\hat{A}\right)^2\end{bmatrix}$$

Megoldás:

Mivel $E\{z_k\} = A$, ezért a A paraméter becslése torzítatlan. Mivel

$$E\{\widehat{\sigma^2}\} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{\left(z_k - A - \left(\hat{A}-A\right)\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1} E\{(z_k-A)^2\} - 2\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{(z_k-A)\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(z_j-A)\right\} + \sum_{k=0}^{N-1} E\left\{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(z_i - A)\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(z_j-A)\right)\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{N-1}[N\sigma^2 - 2\sigma^2 + \sigma^2] = \sigma^2,$$

tehát a σ^2 paraméter becslése torzítatlan. Itt felhasználtuk, hogy $E\{(z_k-A)^2\} = \sigma^2$, és $E\{(z_k-A)(z_j-A)\} = 0$, ha $j \neq k$.

3. Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérését végezzük mérési sorozatra alapozva: $z_k = a + w_k,\ \ k = 0,1,\dots,N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, és valószínűség sűrűségfüggvénye $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Vezesse le a minimális varianciájú, torzítatlan becslő kifejezését erre az esetre! Vezesse le azt is, hogy hogyan módosulnak ezek a kifejezések színes Gauss zaj ($\mathcal{N}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{C})$) esetén?

Megoldás:

A csatornakarakterisztika:

$$f(\boldsymbol{z}|a) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k-a)^2},$$

amelynek maximumhelyénél kapjuk az *a* paraméter Gauss-Markov becslőjét:

$$\left.\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{z}|a)}{\partial a}\right|_{\hat{a}=\hat{a}_{ML}=\hat{a}_{GM}} = \frac{N}{\sigma^2}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k - a\right] = 0,$$

ahonnan

$$\hat{a}_{ML} = \hat{a}_{GM} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k,$$

azaz lineáris megfigyelési egyenlet és Gauss eloszlású csatorna zaj esetén a legjobb (Gauss-Markov) becslő az egyszerű átlagolás. Ez torzítatlan, mert $E\{\hat{a}_{ML}\}$=a, valamint minimális varianciájú, mert

$$\frac{\partial lnf(z;a)}{\partial a} = I(a)(g(z) - a)$$

struktúrájú:

$$\hat{a}_{ML} = g(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k, \;\; var\{\hat{a}_{ML}\} = I^{-1}(a) = \frac{\sigma_n^2}{N}.$$

A csatornakarakterisztika színes Gauss zaj esetén (a matematikusoktól átvett eredmény):

$$f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|\boldsymbol{C}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})^T\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})},$$

$$\left.\frac{\partial\, ln\, f\,(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right|_{\hat{\boldsymbol{a}}=\hat{\boldsymbol{a}}_{ML}=\hat{\boldsymbol{a}}_{GM}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})^T\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})\right] = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua}) = 0,$$

ahonnan

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{ML} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z},$$

ill. az előadáson bemutatott levezetés alkalmazásával:

$$cov(\hat{\boldsymbol{a}}_{ML}) = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$

4. Mérendő egy ismert jel ismeretlen A amplitúdója N megfigyelésre alapozva: $z(n) = Acos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + w(n),\; n = 0,1,\dots N-1$. Az ismeretlen A paraméter és a $w(n)$ zaj Gauss eloszlású, ismert várható értékkel és varianciával. $E\{A\} = \mu_A,\; var\{A\} = \sigma_A^2,\; E\{w(i)\} = 0,$ $cov\{w(i), w(j)\} = \sigma_w^2\delta_{ij},\; cov\{A, w(i)\} = 0$, $\forall i$-re, $\forall j$-re. Használja a maximum a posteriori (MAP) becslés technikáját, és vezesse le a paraméter legjobb MAP ($\hat{A}_{MAP}$) becslését és minőségjellemzőjét! Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő ($\hat{A}_{MS}$) értékét is!

Megoldás:

Használjuk a Bayes becslést, és a maximum a posteriori (MAP) becslés technikáját! Ennek általános alakja:

$$\left.\frac{\partial f(a|\boldsymbol{z})}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0, \quad \left.\frac{\partial\, ln\, f(\boldsymbol{z}|a)}{\partial a} + \frac{\partial\, ln\, f(a)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0.$$

Most $f(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} e^{-\frac{(A-\mu_A)^2}{2\sigma_A^2}}$, $f(\boldsymbol{z}|A) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z(k)-Acos\left(\frac{2\pi}{N}k\right))^2}$, amiből

$$\frac{\partial\, ln\, f(A)}{\partial A} = -\frac{A-\mu_A}{\sigma_A^2}, \; \frac{\partial\, ln\, f(\boldsymbol{z}|A)}{\partial A} = \frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k) - Acos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right).$$

$$\left.\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k) - Acos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - \frac{A-\mu_A}{\sigma_A^2}\right|_{\hat{A}_{MAP}} = 0$$

$$\hat{A}_{MAP} = \frac{\mu_A + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1} z(k)cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}{1 + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1} cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)},$$

$$var\{\hat{A}_{MAP}\} = E\left\{\left(\hat{A}_{MAP} - A\right)^2\right\} = E\left\{\left(\frac{\mu_A + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_W^2}\sum_{k=0}^{N-1} z(k)cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) - A - A\frac{\sigma_A^2}{\sigma_W^2}\sum_{k=0}^{N-1} cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}{1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_W^2}\sum_{k=0}^{N-1} cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}\right)^2\right\} =$$

$$= E\left\{\left(\frac{\mu_A - A + \frac{\sigma_A^2}{\sigma_W^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k) - Acos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}{1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_W^2}\sum_{k=0}^{N-1} cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}\right)^2\right\} = \frac{E\{(\mu_A - A)^2\} + \frac{\sigma_A^4}{\sigma_W^4}\sum_{k=0}^{N-1} cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)E\left\{\left(z(k) - Acos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)^2\right\}}{\left[1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_W^2}\sum_{k=0}^{N-1} cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right]^2} =$$

$$= \frac{\sigma_A^2 + \frac{\sigma_A^4}{\sigma_W^4}\sum_{k=0}^{N-1} \sigma_W^2 cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}{\left[1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_W^2}\sum_{k=0}^{N-1} cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right]^2} = \frac{\sigma_A^2}{1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_W^2}\sum_{k=0}^{N-1} cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

Mivel a sűrűségfüggvény szimmetrikus, ezért $\hat{A}_{MAP} = \hat{A}_{MS}$.