2. Gyakorlat

1. Véletlen jelenségek kezelése MATLAB-ban

A Méréselmélet c. tárgy házi feladatai a MATLAB ismeretét feltételezik. A korábbi évek során azt tapasztaltuk, hogy a házi feladat megoldása során a legnagyobb nehézséget a nem elégséges MATLAB ismeret okozta.

Az alábbiakban azon MATLAB függvény leírások hivatkozásait gyűjtöttük össze, amelyek az első házi feladat megoldásához hasznosak lehetnek. Ezek áttekintését és kipróbálását mindenkinek javasoljuk, de elsősorban azoknak, akik nem rendelkeznek még elegendő MATLAB tapasztalattal.

1. Ismerkedjenek meg az alábbi, véletlenszámok generálására alkalmas függvényekkel!
Egyenletes eloszlású véletlen számok generálása
Normális eloszlású véletlen számok generálása
Egyenletes eloszlású álvéletlen egész számok generálása
Többváltozós normális eloszlású véletlen számok generálása

2. Készítsenek hisztogramot a véletlen számokból!
Hisztogram rajzolás
Kétváltozós hisztogram rajzolás

3. Számítsanak sűrűségfüggvény értékeket, rajzoljon sűrűség függvényeket!
Valószínűségsűrűség függvény
Kétdimenziós rajzolás

4. Számítsanak átlagot, szórást, korrelációs együtthatót, keresztkorrelációt!
Átlag számítása
Szórás számítása
Korrelációs együttható számítása
Keresztkorreláció számítása

5. Számítsák ki mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait, inverzét!
Mátrix sajátértékei és sajátvektorai
Mátrix inverze

6. A központi határeloszlás tétel kísérleti alátámasztása
A Méréselmélet tárgyban többnyire olyan jelenségekkel foglalkozunk, amelyek esetében a véletlen (zaj) hatás több független forrásból táplálkozik. Ezzel a feltételezéssel élve a véletlen (zaj) hatásokat összességében normális eloszlással jellemezhetjük. Vizsgálja meg egyenletes eloszlású források összegzett eredőjét! Készítse el ezen véletlen értékek hisztogramját különböző számú forrás esetére! Vesse ezeket össze a normális eloszlás sűrűségfüggvényével!

2. Gyakorló feladatok
a Döntéselmélet és a Becsléselemélet alapjai témakörhöz

1. Példa: Zajos megfigyelés(ek)re alapozva eldöntendő, hogy a megfigyelési csatornában az a_0 vagy egy attól eltérő a_1 jelszint van-e jelen? H_0 jelöli azt a hipotézist, hogy az a_0 jelszint van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_0 = 0.6$. H_1 jelöli azt a hipotézist, hogy az a_1 jelszint van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_1 = 0.4$. A költségek: $C_{10} = C_{01} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 1$. A feltételes valószínűségsűrűség függvények:

$$f\{z|H_0\} = \begin{cases} \dfrac{3z\left(1-\frac{z}{2}\right)}{2}, & 0 \le z \le 2 \\ 0\ egyébként \end{cases} \qquad f\{z|H_1\} = \begin{cases} \dfrac{z}{2}, & 0 \le z \le 2 \\ 0\ egyébként \end{cases}$$

Az elsőként megfigyelt érték $z_0 = 1.2$. Hogyan dönt? Elvégzünk egy második mérést is, aminek eredménye $z_1 = 1.8$. Erre a mérésre alapozva hogyan dönt? Hogyan dönt, ha mindkét megfigyelt értéket figyelembe veszi? Mekkora lehet az a_0 jelszint várható értéke?

Megoldás:

A megfigyelt értéket behelyettesítjük a likelihood arány függvénybe, és ha $\Lambda(z) > \eta$, akkor a döntés H_1, ha $\Lambda(z) < \eta$, akkor a döntés a H_0.

$\eta = \frac{0.6(10-1)}{0.4(10-1)} = \frac{3}{2} = 1.5$, $\quad \Lambda(z_0) = \frac{f(z_0|H_1)}{f(z_0|H_0)} \cong \frac{0.6}{0.72} \cong 0.83 < \eta$, $\quad \Lambda(z_1) = \frac{f(z_1|H_1)}{f(z_1|H_0)} \cong \frac{0.9}{0.27} \cong 3.33 > \eta$,

$\Lambda(z_0, z_1) = \frac{f(z_0|H_1)}{f(z_0|H_0)} \frac{f(z_1|H_1)}{f(z_1|H_0)} \cong \frac{0.6}{0.72}\frac{0.9}{0.27} \cong \frac{0.54}{0.1944} \cong 2.78 > \eta$

A döntéseink rendre: H_0, H_1, H_1

$E[a_0] = 1$, mert a sűrűségfüggvény $z = 1$-re szimmetrikus.

$E[a_0] = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f\{z|H_0\} dz = \int_0^2 \frac{3z^2\left(1-\frac{z}{2}\right)}{2} dz = \frac{z^3}{2}\Big]_0^2 + \frac{3z^4}{16}\Big]_0^2 = 4 - 3 = 1$

2. Példa: Két konstans érték között ugrásszerűen váltakozó jelet detektálunk zajos megfigyelésekre alapozva. A megfigyelések független, Gauss eloszlású valószínűségi változók a és $3a$ ($a = 1$) várható értékkel, $\sigma_n = 0.6$ szórással. H_0 jelzi azt a hipotézist, hogy a jel a értékű. Ennek a priori valószínűsége $P_0 = 0.1$. H_1 jelzi az a hipotézist, hogy a jel $3a$ értékű. Ennek a priori valószínűsége $P_1 = 0.9$. A feltételes valószínűségsűrűség függvények:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_n} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_n^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_n} e^{-\frac{(z-3a)^2}{2\sigma_n^2}}$$

A költségek: $C_{10} = C_{01} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 2$. Az elsőként megfigyelt érték $z_0 = 1.5a$. Hogyan dönt? Elvégzünk egy második mérést is, aminek eredménye $z_1 = 2.5a$. Erre a mérésre alapozva hogyan dönt? Hogyan dönt, ha mindkét megfigyelt értéket figyelembe veszi? Mi a feltétele annak, hogy a döntési küszöb $2a$ legyen?

Megoldás:

A megfigyelt értéket behelyettesítjük a log-likelihood arány függvénybe, és ha $\lambda(z) > ln\eta$, akkor a döntés H_1, ha $\lambda(z) < ln\eta$, akkor a döntés a H_0.

$\eta = \frac{0.1(10-2)}{0.9(10-2)} = \frac{1}{9}$,

N együttes megfigyelés esetén $\lambda(z) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k - 3a)^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k - a)^2 = \frac{2Na}{\sigma^2}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k - 2a\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} ln\eta$

Ebből az előfeldolgozás és a küszöb $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{2Na} ln\eta + 2a$,

$N = 1$-re $\frac{\sigma^2}{2a} ln\eta = -\frac{0.36}{2} ln9 = -0.3955$, $N = 2$-re $\frac{\sigma^2}{4a} ln\eta = -\frac{0.36}{4} ln9 = -0.19775$

$1.5 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} = -0.3955 + 2 = 1.6045 \rightarrow H_0$, $2.5 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} = -0.3955 + 2 = 1.6045 \rightarrow H_1$

$$\frac{1.5 + 2.5}{2} = 2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} = -0.19775 + 2 = 1.80225 \rightarrow H_1$$

A döntéseink rendre: H_0, H_1, H_1. $\frac{\sigma^2}{2Na} ln\eta = 0$ kell ahhoz, hogy a döntési küszöb $2a$ legyen. Ez $\eta = 1$ esetén teljesül, azaz, ha például változatlan költségek mellett $P_0 = P_1 = 0.5$.

3. Példa: Az $f\{a|z\} = \begin{cases} \frac{a}{2}, & 0 \le a \le 2 \\ 0 \; egyébként \end{cases}$ a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő, a minimális átlagos abszolút hibájú becslő és a maximum a posteriori becslő számértékét! Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő varianciáját?

Megoldás:

$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} af(a|z)da = \int_0^2 \frac{a^2}{2} da = \frac{a^3}{6}\Big]_0^2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, $\quad \hat{a}_{ABS}$: $\frac{x^2}{2} * \frac{1}{2} = 0.5 \rightarrow x = \sqrt{2}$,

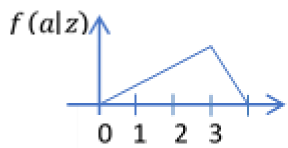
$\hat{a}_{ABS} \cong 1.414$

$\hat{a}_{MAP} = 2.$

$var(\hat{a}_{MS}) = E[a^2] - \hat{a}_{MS}{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f(a|z)da - \hat{a}_{MS}{}^2 = \int_0^2 a^3 \frac{1}{2} da - \hat{a}_{MS}{}^2 =$

$$= \frac{a^4}{8}\Big]_0^2 - \hat{a}_{MS}{}^2 = 2 - \left(1\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \cong 0{,}22$$

4. Példa: Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő, a minimális átlagos abszolút hibájú becslő és a maximum a posteriori becslő számértékét! Hogyan minősítené az egyes becslőket?



Megoldás:

A háromszög magassága a görbealatti területből számítható: $\frac{3*m}{2} + \frac{1*m}{2} = 1$. A sűrűségfüggvény $0 - 3$ között: $\frac{a}{6}$, $3 - 4$ között $2 - \frac{a}{2}$.

$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} af(a|z)da = \int_0^3 \frac{a^2}{6} da + \int_3^4 \left(2a - \frac{a^2}{2}\right) da = \frac{a^3}{18}\Big]_0^3 + \left(a^2 - \frac{a^3}{6}\right)\Big]_3^4 = \frac{3}{2} + 16 -$
$9 - 10\frac{2}{3} + \frac{9}{2} = 2\frac{1}{3}$, $\quad \hat{a}_{ABS}$: $\frac{x^2}{12} = 0.5 \rightarrow x = \sqrt{6}$, $\hat{a}_{ABS} \cong 2.45$, $\hat{a}_{MAP} = 3$.

A minősítés eszköze a becslő varianciájának megadása: pl. $var(\hat{a}_{MS}) = E[a^2] - \hat{a}_{MS}{}^2$