1. Gyakorlat

Diszkrét rendszerek, konvergencia véges lépésben

A gyakorlat első része a diszkrét rendszerekre vonatkozó korábbi tanulmányok rövid összefoglalója egyszerű példákon keresztül. A gyakorlat második része a megfigyelők tulajdonságait illusztrálja az előzőekben bemutatott példákra építve.

A diszkrét rendszerek – tipikusan időbeni és/vagy térbeni – sorrendjükkel jellemzett adatokat dolgoznak fel. Ha az időbeni/térbeni sorrendhez azonos időbeni/térbeni távolság tartozik, akkor „egyenletes" mintavételezésről beszélünk. Az ilyen adatokra vonatkozóan jól kidolgozott eszköztárral rendelkezünk, és a viselkedéseket a frekvenciatartományban is hatékonyan le tudjuk írni. Az alábbiakban ilyen rendszerekről lesz szó.

Egy valós időben működtethető/kiértékelhető másodfokú rendszer differenciaegyenlete

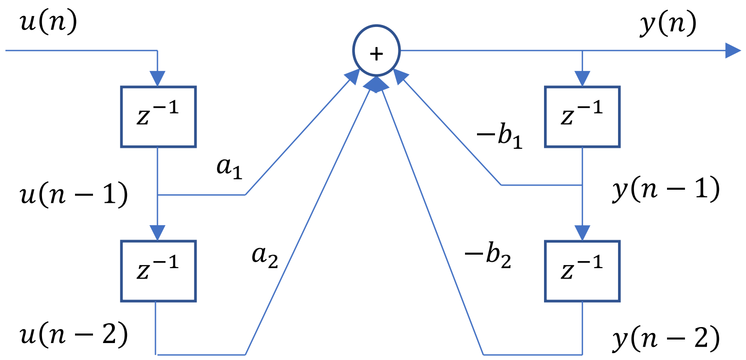
$$y(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) = a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2), \tag{1}$$

ahol $y(n)$ a rendszer kimeneti értéke az n-edik időpillanatban, $y(n-1)$ az egy „mintavételi idővel" korábbi, stb. Itt $u(n)$ a rendszer bemenet értéke az n-edik időpillanatban. Ez az (1) egyenletben azért nem szerepel, mert az n-edik időpillanatban „érkező" bemenőjel értékből nem lehetséges ugyanabban az időpontban „megjelenő" kimeneti értéket számítani: a rendszer valós idejű működtetése nem lehetséges. A tárgy keretében ezt a szempontot figyelembe vesszük.

Mivel tipikusan a kimeneti értékekre vagyunk kíváncsiak, ezért (1) helyett a

$$y(n) = a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2) \tag{2}$$

formát használjuk. Ezt a műveletsort az alábbi ábra szemlélteti. Itt a z^{-1} a mintavételi időnek



1. ábra

megfelelő késleltetés operátora.

Ez a megoldás a késleltető elemek számát illetően redundáns. Képezzük ugyanis az (1) összefüggés z transzformáltját, majd a rendszer átviteli függvényét!

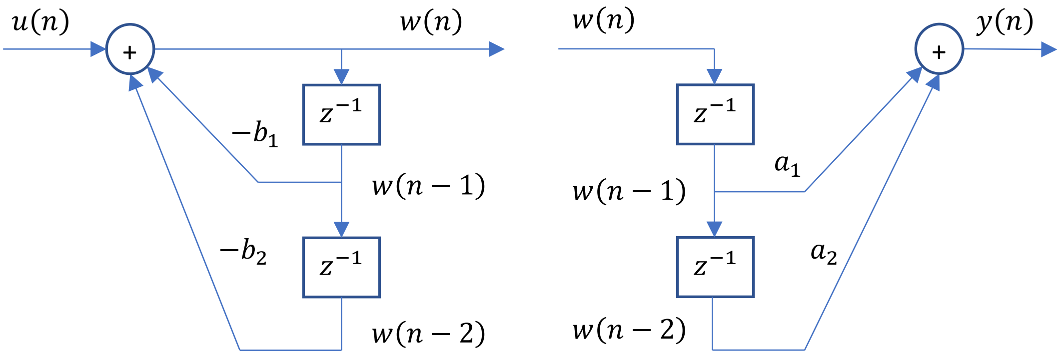
$$Y(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + b_2 z^{-2} Y(z) = a_1 z^{-1} U(z) + a_2 z^{-2} U(z), \tag{3}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}, \tag{4}$$

amit kiszámíthatunk két lépésben:

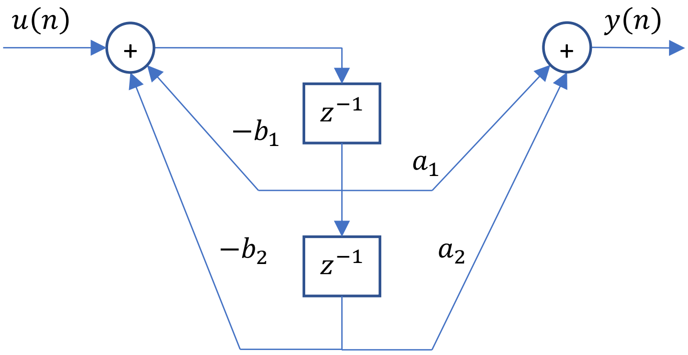
$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{W(z)}{U(z)}\frac{Y(z)}{W(z)}=\frac{1}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}(a_1z^{-1}+a_2z^{-2}) \quad (5)$$

az alábbi ábra szerint:



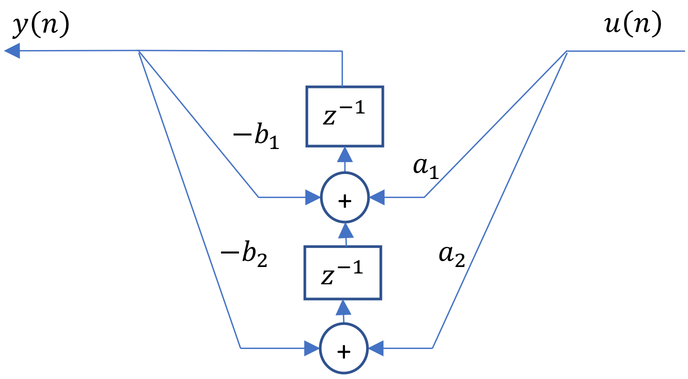
2. ábra

Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy a késleltető/tároló elemek „ekvipotenciálisak”, tehát két késleltető/tároló elem alkalmazása elegendő. Fontos észrevétel, hogy itt $w(n)$ valós idejű kiszámítása nem igény, mert a kimenet meghatározása érdekében csak a korábbi értékét használjuk.



3. ábra

Amit a fentiekben tapasztaltunk az összecseng azzal is, hogy egy másodrendű/”másodfokú” rendszer valójában csak két késleltető/energiatároló elemet tartalmaz/igényel.

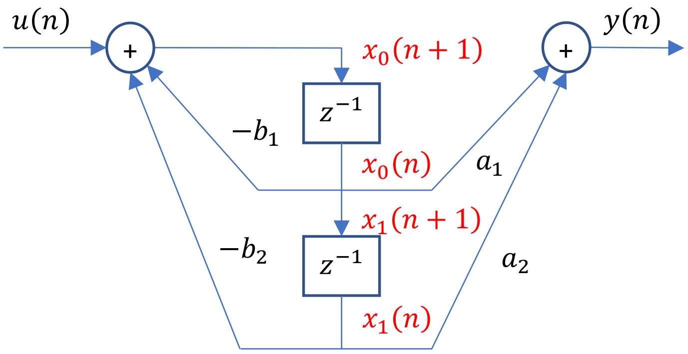


4. ábra

Egy újabb számítási vázlatot kapunk, ha a 3. ábrán minden nyíl irányát megfordítjuk, és a kimenetet és a bemenetet felcseréljük. Ezt látjuk a 4. ábrán. Azt, hogy ez (2) összefüggést valósítja meg egyszerűen ellenőrizhetjük, hiszen $y(n)$ értékét $a_2u(n) - b_2y(n)$ kétütemű, $a_1u(n) - b_1y(n)$ együtemű késleltetett értékének összegeként kapjuk. A 3. ábrán végzett átalakítást transzponálásnak nevezzük, a 4. ábrán látható elrendezést pedig a 3. ábrán látható elrendezés transzponált struktúrájának nevezzük. Ez az átalakítás általános érvényű a lineáris differenciaegyenlettel leírható diszkrét rendszerek esetében!

Miközben a 3. és a 4. ábrán látható számítási vázlatok ugyanazt az átvitelt valósítják meg, hiszen a hozzájuk rendelhető átviteli függvény ugyanaz, a konkrét kiszámítás körülményei nem azonosak, hiszen eltérőek lesznek a kiszámított közbenső értékek és a tárolt tartalmak. Ennek nem elhanyagolható következményei lehetnek, elsősorban korlátozott számábrázolási (dinamika) tartomány és fixpontos aritmetika esetén.

A 3. és 4. ábrákon látható számítási elrendezésekhez állapotváltozós leírásokat is rendelhetünk. Ehhez a késleltető elemek kimenetét az aktuális időpontbeli állapotváltozóknak, míg a késleltetők bemenetét azok következő időpontbeli értékének tekintjük. A 3. ábra esetében

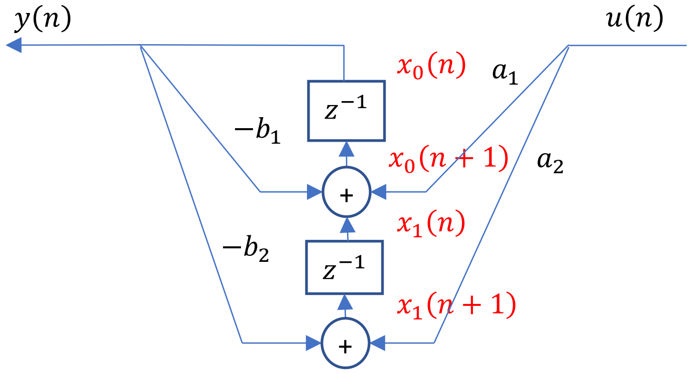


5. ábra

az állapotváltozós leírás:

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(n) - b_1x_0(n) - b_2x_1(n) \\ x_0(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(n) =$$
$$= \boldsymbol{Ax}(n) + \boldsymbol{B}u(n) \qquad (6)$$
$$y(n) = a_1x_0(n) + a_2x_1(n) = [a_1 \quad a_2] \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{Cx}(n)$$

A 4. ábra esetében az állapotváltozós leírás:



6. ábra

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \begin{bmatrix} x_0(n+1) \\ x_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(n) + a_1 u(n) - b_1 x_0(n) \\ a_2 u(n) - b_2 x_0(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 \\ -b_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} u(n) =$$

$$= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}u(n) \tag{7}$$

$$y(n) = x_0(n) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)$$

A (6) és (7) összefüggésekkel megadott számítások is ugyanazt az átvitelt valósítják meg, de a kiszámítás körülményei ebben az esetben is eltérőek.

Az állapotátmenet mátrix, valamint az állapotváltozókhoz történő becsatolás ($\boldsymbol{B}u(n)$) és az onnan történő kicsatolás ($\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)$) – az átvitel változatlansága mellett – módosítható a hasonlósági transzformációk módszerével. Ebben az esetben az állapotváltozó új lesz: $\boldsymbol{x}'(n) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(n)$, és a többi mátrix pedig

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}, \qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}, \tag{8}$$

amivel tetszőleges számú konkrét kiszámítási formát tudunk származtatni. Mindennek célhardver tervezésénél van jelentősége.

Példa: Megfigyelő tervezése

Tervezzünk véges lépésben konvergálni képes megfigyelőt az 5. ábrán látható rendszer (kiszámítási struktúra) esetében!

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{C} = [a_1 \quad a_2], \ \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

A véges lépésben történő konvergencia feltétele, hogy $[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C}]^2 = \boldsymbol{0}.$ Most

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} [a_1 \quad a_2] = \begin{bmatrix} g_0 a_1 & g_0 a_2 \\ g_1 a_1 & g_1 a_2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -b_1 - g_0 a_1 & -b_2 - g_0 a_2 \\ 1 - g_1 a_1 & -g_1 a_2 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

A kijelölt mátrix hatványozási művelet eredménye:

$$[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{C}]^{\boldsymbol{2}} = \begin{bmatrix} -b_1 - g_{\boldsymbol{0}} a_1 & -b_2 - g_0 a_2 \\ 1 - g_1 a_1 & -g_1 a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 - g_{\boldsymbol{0}} a_1 & -b_2 - g_0 a_2 \\ 1 - g_1 a_1 & -g_1 a_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (b_1 + g_{\boldsymbol{0}} a_1)^2 + (b_2 + g_{\boldsymbol{0}} a_2)(g_1 a_1 - 1) & (b_1 + g_{\boldsymbol{0}} a_1)(b_2 + g_{\boldsymbol{0}} a_2) + (b_2 + g_{\boldsymbol{0}} a_2) g_{\boldsymbol{1}} a_2 \\ (g_1 a_1 - 1)(b_1 + g_0 a_1) + (g_1 a_1 - 1) g_1 a_2 & (g_1 a_1 - 1)(b_2 + g_0 a_2) + g_1^2 a_2^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

A keresztátló elemei kiemeléseket követően:

$$(b_1 + g_0 a_1 + g_{\boldsymbol{1}} a_2)(b_2 + g_0 a_2) = 0$$
$$(b_1 + g_0 a_1 + g_1 a_2)(g_1 a_1 - 1) = 0 \tag{12}$$

ahonnan

$$(b_1 + g_0 a_1 + g_{\boldsymbol{1}} a_2) = 0, \qquad g_0 = -\frac{b_1 + g_1 a_2}{a_1}, \tag{13}$$

amit (11) jobb alsó elemébe helyettesítve:

$$g_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 b_2 - a_1 a_2 b_1 + a_2^2}, \quad g_0 = -\frac{a_2 b_2 + b_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1^2 b_2 - a_1 a_2 b_1 + a_2^2} \tag{14}$$

Ha például az átviteli függvény

$$H(z) = \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-2}} \tag{15}$$

alakú, ahol a stabilitás érdekében $|r| < 1$, akkor

$$a_1 = 1 - r, \qquad a_2 = 0, \qquad b_1 = 0, \qquad b_2 = -r, \tag{16}$$

amivel (14) alapján:

$$g_0 = 0, \qquad g_1 = \frac{1}{1-r} \tag{17}$$

Tervezzünk véges lépésben konvergálni képes megfigyelőt az 6. ábrán látható rendszer (kiszámítási struktúra) esetében!

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 \\ -b_2 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{C} = [1 \quad 0], \ \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

A véges lépésben történő konvergencia feltétele, hogy $[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC}]^2 = \boldsymbol{0}.$ Most

$$\boldsymbol{GC} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} g_0 & 0 \\ g_1 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC} = \begin{bmatrix} -b_1 - g_0 & 1 \\ -b_2 - g_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

A kijelölt mátrix hatványozási művelet eredménye:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{GC}]^{\boldsymbol{2}} &= \begin{bmatrix} -b_1 - g_0 & 1 \\ -b_2 - g_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_1 - g_0 & 1 \\ -b_2 - g_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (g_0 + b_1)^2 - b_2 - g_1 & -g_0 - b_1 \\ (g_0 + b_1)(g_1 + b_2) & -g_1 - b_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{20}$$

ahonnan

$$g_0 = -b_1, \ g_1 = -b_2 \tag{21}$$

Ha a megvalósuló átviteli függvény (15) és (16) szerinti, akkor (21) alapján

$$g_0 = 0, \qquad g_1 = r. \tag{22}$$

Megjegyzések:

1. Vegyük észre, hogy a megfigyelő ismeretlen paramétereinek számításához csak az $\boldsymbol{A}$ és a $\boldsymbol{C}$ ismeretére van szükség. A 6. ábra esetében az átviteli függvény számlálópolinomjának együtthatói (a_1 és a_2) csak az állapotváltozókhoz történő becsatolásban vesznek részt, ezért a (19) – (21) összefüggésekben nem szerepelnek.
2. Vegyük azt is észre, hogy a számítások „dinamikatartománya”, azaz a számítások során fellépő közbenső számértékek nagysága igencsak eltérő lehet. Ha (15) pólusai közel vannak az egységsugarú körhöz, mert egy kifejezetten szelektív szűrőről van szó, akkor r abszolút értéke alig kisebb, mint 1, amivel az 5. ábra szerinti megvalósításban (17) szerint g_1 egészen nagy érték lehet, míg a második esetben g_1 abszolút értéke mindig kisebb lesz, mint 1. Ebből következik, hogy – másodlagos szempontokat figyelembe véve – nem mindegy milyen kiszámítási formát alkalmazunk!
3. A véges lépésben konvergáló megfigyelő paramétereit számíthatjuk a (10) és (19) mátrixok sajátértékei alapján is:

$$det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})]=det\begin{bmatrix}\lambda+b_1+g_{\boldsymbol{0}}a_1 & b_2+g_{\boldsymbol{0}}a_2\\ -1+g_1a_1 & \lambda+g_{\boldsymbol{1}}a_2\end{bmatrix}=0 \tag{23}$$

$$\begin{gathered}det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})]=(\lambda+b_1+g_0a_1)(\lambda+g_1a_2)-(-1+g_1a_1)(b_2+g_0a_2)=0\\ \lambda^2+\lambda(b_1+g_0a_1+g_{\boldsymbol{1}}a_2)+b_2+g_0a_2+g_1(a_2b_1-a_1b_2)=0\end{gathered} \tag{24}$$

Mivel véges lépésben történő konvergencia esetén ennek mindkét gyöke nulla:

$$\begin{gathered}b_1+g_0a_1+g_{\boldsymbol{1}}a_2=0\\ b_2+g_0a_2+g_1(a_2b_1-a_1b_2)=0\end{gathered} \tag{25}$$

Amiből (14) adódik. Illetve a második esetben:

$$det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})]=det\begin{bmatrix}\lambda+b_1+g_0 & -1\\ b_2+g_1 & \lambda\end{bmatrix}=0 \tag{26}$$

$$\begin{gathered}det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{GC})]=(\lambda+b_1+g_0)\lambda+b_2+g_1=0\\ \lambda^2+\lambda(b_1+g_0)+b_2+g_1=0\end{gathered} \tag{27}$$

Mivel véges lépésben történő konvergencia esetén ennek mindkét gyöke nulla:

$$\begin{gathered}b_1+g_0=0\\ b_2+g_1=0\end{gathered} \tag{28}$$

Amiből (21) adódik.

4. Vizsgáljuk meg a 6. ábra szerinti rendszerhez tervezett megfigyelő esetében hogyan néz ki a (véges lépésben konvergáló) megfigyelő átviteli függvénye! Ehhez írjuk fel a megfigyelő egyenleteit:

$$\begin{gathered}\hat{\boldsymbol{x}}(n+1)=\begin{bmatrix}\hat{x}_0(n+1)\\ \hat{x}_1(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1(n)+a_1u(n)-b_1\hat{x}_0(n)+g_0\big(y(n)-\hat{y}(n)\big)\\ a_2u(n)-b_2\hat{x}_0(n)+g_1\big(y(n)-\hat{y}(n)\big)\end{bmatrix}=\\ =\begin{bmatrix}-b_1 & 1\\ -b_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_0(n)\\ \hat{x}_1(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}u(n)+\begin{bmatrix}g_0\\ g_1\end{bmatrix}\big(y(n)-\hat{y}(n)\big)=\\ =\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n)+\boldsymbol{B}u(n)+\boldsymbol{GC}\big(\boldsymbol{x}(n)-\hat{\boldsymbol{x}}(n)\big)\\ \hat{y}(n)=\hat{x}_0(n)=[1\quad 0]\begin{bmatrix}\hat{x}_0(n)\\ \hat{x}_1(n)\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(n)\end{gathered} \tag{29}$$

A megfigyelő bemenete $y(n)$, kimenete $\hat{y}(n)=\hat{x}_0(n)$. Az $u(n)$ additív rendszerbemenet, amitől az átvitel számításakor eltekinthetünk ($u(n)=0$), hiszen arra vonatkozóan az átvitel más, és hatása később szuperpozícióval figyelembe vehető, ha kell.

(16) és (21) felhasználásával

$$\hat{\boldsymbol{x}}(n+1)=\begin{bmatrix}\hat{x}_0(n+1)\\ \hat{x}_1(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1(n)\\ r\hat{x}_0(n)+r\big(y(n)-\hat{x}_0(n)\big)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ r & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_0(n)\\ \hat{x}_1(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ r\end{bmatrix}\big(y(n)-\hat{x}_0(n)\big) \tag{30}$$

egyszerű formában

$$\hat{x}_0(n+1)=\hat{x}_1(n),\qquad \hat{x}_1(n+1)=ry(n),$$

ahonnan:

$$\hat{x}_0(n+2) = \hat{x}_1(n+1), \qquad \hat{x}_1(n+1) = ry(n), \tag{31}$$

tehát

$$\hat{y}(n+2) = ry(n), \qquad \hat{y}(n) = ry(n-2) \tag{32}$$

vagyis a megfigyelő átviteli függvénye:

$$H_{megf}(z) = \frac{\hat{Y}(z)}{Y(z)} = rz^{-2} \tag{33}$$

(33) a várakozásnak megfelelően véges impulzusválaszú.

Ezt követően nézzük meg (15) impulzus és egységugrás válaszát!

$$y(n) = (1-r)u(n-1) + ry(n-2) \tag{34}$$

$u(n)$	impulzusválasz	$u(n)$	egységugrás válasz
1	$y(0) = 0$	1	$y(0) = 0$
0	$y(1) = 1 - r$	1	$y(1) = 1 - r$
0	$y(2) = 0$	1	$y(2) = 1 - r$
0	$y(3) = (1-r)r$	1	$y(3) = 1 - r + (1-r)r = (1-r)(1+r)$
0	$y(4) = 0$	1	$y(4) = 1 - r + (1-r)r = (1-r)(1+r)$
0	$y(5) = (1-r)r^2$	1	$y(5) = 1 - r + (1-r)(1+r)r = (1-r)(1+r+r^2)$
0	$y(6) = 0$	1	$y(6) = 1 - r + (1-r)(1+r)r = (1-r)(1+r+r^2)$

Most pedig azt vizsgáljuk, hogy mit csinál a megfigyelő! A megfigyelő megkapja az $u(n)$ bemenetet is! (29) felhasználásával

$$\hat{x}_0(n+2) = \hat{x}_1(n+1) + (1-r)u(n+1), \qquad \hat{x}_1(n+1) = ry(n), \tag{35}$$

ahonnan

$$\hat{y}(n+2) = ry(n) + (1-r)u(n+1), \qquad \hat{y}(n) = ry(n-2) + (1-r)u(n-1) \tag{36}$$

$u(n)$	megfigyelő válasz	$u(n)$	megfigyelő válasz
1	$\hat{y}(0) = 0$	1	$\hat{y}(0) = 0$
0	$\hat{y}(1) = 1 - r$	1	$\hat{y}(1) = 1 - r$
0	$\hat{y}(2) = 0$	1	$\hat{y}(2) = 1 - r$
0	$\hat{y}(3) = (1-r)r$	1	$\hat{y}(3) = 1 - r + (1-r)r = (1-r)(1+r)$
0	$\hat{y}(4) = 0$	1	$\hat{y}(4) = 1 - r + (1-r)r = (1-r)(1+r)$
0	$\hat{y}(5) = (1-r)r^2$	1	$\hat{y}(5) = 1 - r + (1-r)(1+r)r = (1-r)(1+r+r^2)$
0	$\hat{y}(6) = 0$	1	$\hat{y}(6) = 1 - r + (1-r)(1+r)r = (1-r)(1+r+r^2)$

A kapott táblázat teljes mértékben megegyezik az előzővel! Ez első ránézésre meglepő! A megfigyelőt úgy terveztük, hogy két lépés után álljon be, tehát két lépés után az $\hat{y}(n)$ kimenetén ugyanaz jelenjen meg, mint a megfigyelt rendszer $y(n)$ kimenetén! Annak, hogy az első két lépésben is ugyanazt kaptuk az az oka, hogy a megfigyelt rendszer és megfigyelő állapotváltozói egyaránt nulla kezdeti értékről indulnak, belső állapotuk egyforma, azaz már a kezdeti állapothiba is nulla!

Végezze el az impulzusválasz és az egységugrás válasz, valamint a megfigyelő válasz számítását abban az esetben, ha

$$\begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

A megfigyelő kezdeti állapota természetesen marad nulla.

4. Figyeljük meg, hogy (15) impulzusválasza – a nevező egyszerű alakjának köszönhetően – sorfejtéssel is származtatható (valójában a mértani sor összegképletét használjuk fel!):

$$H(z) = \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-2}} = (1-r)z^{-1}(1+rz^{-2}+r^2z^{-4}+\cdots) \tag{38}$$

Itt a jobboldalon z^{-1} hatványainak együtthatói az impulzusválasz egymásutáni értékei!

5. Figyeljük meg, hogy a transzponált struktúrák állapotátmenet mátrixai (lásd (6) és (7)) egymás transzponáltjai:

$$\begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 \\ -b_2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{39}$$

valamint a becsatoló mátrix $(\boldsymbol{B})$ transzponáltja lesz a kicsatoló mátrix $(\boldsymbol{C})$, és fordítva.