Méréselmélet

7. fejezet: Modellalapú jelfeldolgozás

2022. április 13.

Ismétlés

6. LS becslők rekurzív számítása

(Jegyzet 71-75. oldalak) $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{w}$ $J(a,\hat{a})=(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{a})^T(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{a})$

6.1. A lineáris megfigyelési modellt alkalmazó LS becslők rekurzív számítása

A továbbiakban is n két dolgot jelöl: (1) az eddig figyelembe vett minták számát (az egyes minták indexelhetők például $k=0,1,\dots,n-1$ jelöléssel); (2) Az n-edik „időpillanatban” vett mintát, ami már az $n+1$-edik mintavett adat. Ezzel a fenti összefüggés n minta feltételezésével: $\boldsymbol{z}(n)=\boldsymbol{U}(n)\boldsymbol{a}(n)+\boldsymbol{w}(n)$, amihez tartozóan tudjuk, hogy $\hat{\boldsymbol{a}}(n)=[\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\boldsymbol{U}(n)]^{-1}\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\boldsymbol{z}(n)=\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\boldsymbol{z}(n).$ $\boldsymbol{P}(n)=[\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\boldsymbol{U}(n)]^{-1}$ Ha veszünk egy újabb mintát, akkor

$$\boldsymbol{z}(n+1)=\boldsymbol{U}(n+1)\boldsymbol{a}(n+1)+\boldsymbol{w}(n+1)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}(n)\\ z(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}(n)\\ \boldsymbol{u}(n)\end{bmatrix}\boldsymbol{a}(n+1)+\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}(n)\\ w(n)\end{bmatrix},$$

ahol $z(n)$ skalár, az $n+1$-edik megfigyelési érték, $\boldsymbol{u}(n)$ sorvektor, a regressziós vektor $n+1$-edik sora, és végül $w(n)$ skalár, az $n+1$-edik zajkomponens. Ezekkel a jelölésekkel:

$$\hat{\boldsymbol{a}}(n+1)=\left[\left[\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\quad \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}(n)\\ \boldsymbol{u}(n)\end{bmatrix}\right]^{-1}\left[\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\quad \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}(n)\\ z(n)\end{bmatrix},$$

illetve a műveletek elvégzésével

$$\hat{\boldsymbol{a}}(n+1)=\left[\left[\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\boldsymbol{U}(n)+\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)\boldsymbol{u}(n)\right]\right]^{-1}\left[\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\boldsymbol{z}(n)+\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)z(n)\right]=\boldsymbol{P}(n+1)\left[\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}(n)\boldsymbol{z}(n)+\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)z(n)\right].$$

Az ebben szereplő mátrix invertálást az ún. mátrix inverziós lemma felhasználásával végezzük:

$$[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}]^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\left[\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right]^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}$$

Ismétlés

$$\boxed{[A+BCD]^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B\left[C^{-1}+DA^{-1}B\right]^{-1}DA^{-1}}$$

$$\left[[\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{U}(n)+\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)]\right]^{-1}=\boldsymbol{P}(n+1)$$ ahol most

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}(n);\boldsymbol{B}=\boldsymbol{u}^T(n);\boldsymbol{D}=\boldsymbol{u}(n);\boldsymbol{C}=1$, ezért $\boldsymbol{P}(n+1)=\boldsymbol{P}(n)-\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\underbrace{[1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)]}_{\text{Skalár!}}{}^{-1}\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)=$

$$=\boldsymbol{P}(n)-\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}$$

, $\boldsymbol{P}(0)$ ismeretében nincs további mátrix invertálás!

Fontos üzenet: Az egy diáddal módosított mátrix inverze mátrix szorzásokkal kiszámítható! Ennek felhasználásával:

$$\hat{\boldsymbol{a}}(n+1)=\boldsymbol{P}(n+1)[\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{z}(n)+\boldsymbol{u}^T(n)z(n)]=\hat{\boldsymbol{a}}(n)+\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)z(n)-$$

$$-\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}\hat{\boldsymbol{a}}(n)-\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}\boldsymbol{u}^T(n)z(n).$$

Itt a második és a negyedik tagot közös nevezőre hozva:

$$\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)z(n)+\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)z(n)-\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)z(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}=\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}z(n)=$$

$=\boldsymbol{G}(n)z(n)$ Ezzel: $\boxed{\hat{\boldsymbol{a}}(n+1)=\hat{\boldsymbol{a}}(n)+\boldsymbol{G}(n)[z(n)-\boldsymbol{u}(n)\hat{\boldsymbol{a}}(n)]}$ Itt $\boldsymbol{u}(n)\hat{\boldsymbol{a}}(n)=\hat{z}(n)$ az új mérés becslése!

$$\boxed{\boldsymbol{G}(n)=\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}}\qquad\boxed{\boldsymbol{P}(n+1)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{u}(n)]\boldsymbol{P}(n)}$$

Az iteráció $n=0$-tól indul. $\hat{\boldsymbol{a}}(0)$=? $\boldsymbol{P}(0)$=?

Ezeket vagy meg tudjuk becsülni, vagy megoldjuk az LS becslést a paraméter vektor dimenziójának megfelelő mérési adat alapján, és annak eredményét használjuk az iteratív megoldás kiindulópontjaként.

$$\boxed{J(a,\hat{a})=(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{Q}(n)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{a})}$$

ahol $\boldsymbol{Q}$ diagonális súlyozó mátrix, tehát $\boldsymbol{Q}(n)=diag\langle q_0,q_1,\dots,q_{n-1}\rangle$

ill. $Q(n+1)=diag\langle q_0,q_1,\dots,q_{n-1},q_n\rangle$

Ehhez a mátrix inverziós lemma $\boldsymbol{C}$ mátrixát $\boldsymbol{C} = 1$ helyett $\boldsymbol{C} = q_n$ skalár értékre kell állítanunk. Ezzel:

$$\boldsymbol{G}(n) = \frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}{{}^1/_{q_n} + \boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}$$

Ha súlyozó mátrix egy diagonális kovariancia-mátrix inverze, azaz

$$\boldsymbol{Q}(n) = diag\,\langle {}^1/_{\sigma_0^2}, {}^1/_{\sigma_1^2}, \dots, {}^1/_{\sigma_{n-1}^2} \rangle,\ \boldsymbol{Q}(n+1) = diag\,\langle {}^1/_{\sigma_0^2}, {}^1/_{\sigma_1^2}, \dots, {}^1/_{\sigma_{n-1}^2}, {}^1/_{\sigma_n^2} \rangle,$$

akkor :

$$\boldsymbol{G}(n) = \frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}{\sigma_n^2 + \boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}$$

A többi változatlan!

Ha a kovariancia mátrix nem lenne diagonális, akkor a megismert fehérítési eljárás alkalmazásával, azaz egy transzformáció közbeiktatásával juthatunk el a rekurzív forma alkalmazhatóságához.

Mindezekkel együtt rekurzív megoldást tudunk adni a Gauss-Markov, a BLUE és a súlyozott LS becslések esetére!

Egy további hasznos súlyozási forma lehet a $\boldsymbol{Q}(n) = diag\langle \beta^{n-1}, \beta^{n-2}, \dots, 1 \rangle$ $\boldsymbol{Q}(n+1) = diag\langle \beta^{n}, \beta^{n-1}, \beta^{n-2}, \dots, 1 \rangle$ $0 < \beta < 1$. Itt a legutolsó mérési adattal képzett négyzetes hiba 1 súllyal szerepel, míg a korábbiak rendre kisebbel.

$$\boldsymbol{G}(n) = \frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}{\beta + \boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)},\quad \boldsymbol{P}(n+1) = \frac{1}{\beta}[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{u}(n)]\boldsymbol{P}(n)$$

Ezzel egy felejtő hatást érvényesítünk, ami nemstacionárius folyamatok esetén előnyös.

6.2. LS becslők számítása kényszerfeltétel esetén

6.3. Nemlineáris megfigyelési modellt alkalmazó LS becslők számítása

Ha $J(\boldsymbol{a})|_{min} \neq 0$, akkor a $\nabla J(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ feltétel teljesülését keressük az első és a másodrendű tag figyelembevételével, a többi elhanyagolásával:

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}_0 - \left[\left. \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{a})}{\partial^2 \boldsymbol{a}} \right|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0} \right]^{-1} \left. \frac{\partial J(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}} \right|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0} = \boldsymbol{a}_0 - \left[\left. \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{a})}{\partial^2 \boldsymbol{a}} \right|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0} \right]^{-1} \nabla J(\boldsymbol{a}_0)$$

$$\boldsymbol{W}(n+1) = \boldsymbol{W}(n) - \mu \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{\nabla}(n) \qquad (194)$$

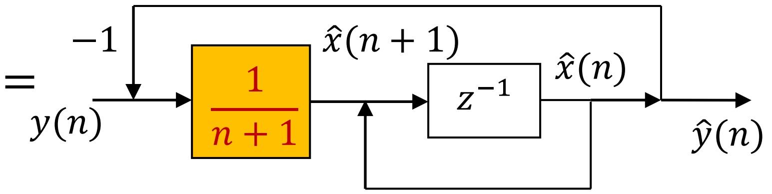
7. Modellalapú jelfeldolgozás (Jegyzet 76-103. oldalak)

A jeleket az őket generálni képes modellekkel reprezentáljuk, és ezeknek a modelleknek a feltételezésével megfigyelőket készítünk. A keresett jel-jellemzők a megfigyelő jellemzőiből kiolvashatók.

7.1. Az alapok felidézése példákon keresztül

Egyszerű átlagolás:

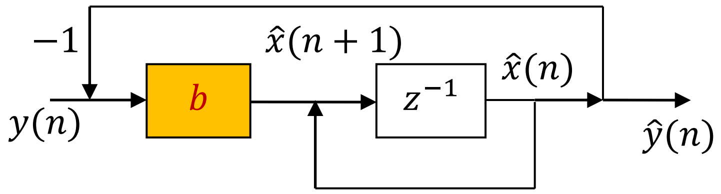
$$\hat{x}(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y(k) = \frac{n}{n+1}\hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}y(n) =$$



$$= \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}[y(n) - \hat{x}(n)]$$

Itt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} = 1$, $\boldsymbol{G}(n) = \frac{1}{n+1}$. $\boldsymbol{G}(n) \to 0$, ha $n \to \infty$.

Exponenciális átlagolás: $\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + by(n)$, ahol a és b konstansok.



A frekvenciatartománybeli viselkedés leírására használható a z- transzformáció:

$$z\hat{X}(z) = a\hat{X}(z) + bY(z), \quad H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{b}{z-a} = \frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}}$$

$H(z) = 1$, ha $z = 1 \to f = 0$.

$H(1) = \frac{b}{1-a} = 1$ vagyis $a = 1 - b \to \hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + b\big(y(n) - \hat{x}(n)\big)$. Itt is $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} = 1$, továbbá $\boldsymbol{G}(n) = b$.

Mivel $0 < b < 1$, a régebbi mintákat egyre kisebb súllyal vesszük figyelembe.

$\hat{x}(0) = 0$,

$\hat{x}(1) = by(0)$,

$\hat{x}(2) = \hat{x}(1) + b\big(y(1) - \hat{x}(1)\big) = by(1) + (1-b)by(0)$

$\hat{x}(3) = \hat{x}(2) + b(y(2) - \hat{x}(2)) = by(2) + b(1-b)y(1) + b(1-b)^2y(0)$,

$\hat{x}(n+1) = by(n) + b(1-b)y(n-1) + \dots + b(1-b)^n y(0)$

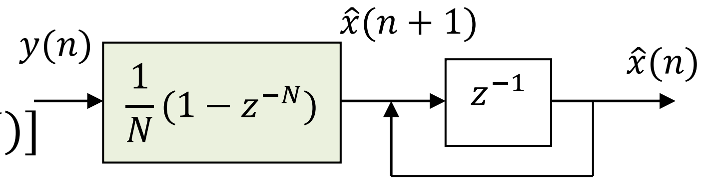
Az összefüggés úgy is származtatható, hogy az átviteli függvényt mértani sor alakba rendezzük.

$q = 1 - b$

Megjegyzés: Az exponenciális átlagolás egy rögzített sávszélességű aluláteresztő szűrésnek felel meg. Hozzá képest az egyszerű átlagolás úgy illusztrálható, mint folyamatosan egyre kisebb sávszélességű aluláteresztő szűrő.

Csúszó-ablakos (sliding window, moving average) átlagolás:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = \frac{1}{N}\sum_{k=n-N+1}^{n} y(k) = \hat{x}(n) + \frac{1}{N}[y(n) - y(n-N)]$$



Itt is $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} = 1$, de a becsatolás módja más. Itt is tudjuk értelmezni az átlagoló átviteli függvényét:

$$z\hat{X}(z) = \hat{X}(z) + \frac{1}{N}(1 - z^{-N})Y(z),$$

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1}}{N}\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

Megjegyzések: 1. $1 - z^{-N}$ osztható az $1 - z^{-1}$ tényezővel:

$$\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-(N-1)},$$

ami azt fejezi ki, hogy N egymást követő mintát adjunk össze.

2. A $1 - z^{-N}$ tényező gyökei az N-edik egységgyökök: $z^N - 1 = 0$, $z = \sqrt[N]{1}$.

1. Példa: Két megfigyelt érték egyszerű átlaga, az átlag frekvenciatartománybeli viselkedése:

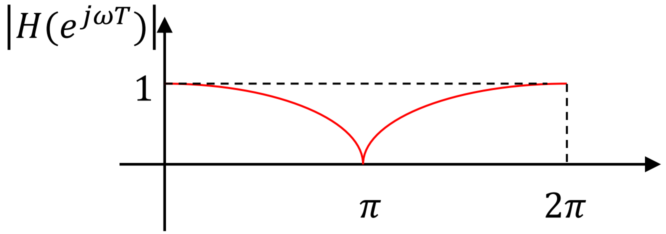
$$\hat{x}(n+1) = \frac{y(n) + y(n-1)}{2}, \quad z\hat{X}(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2}Y(z), \quad H(z) = z^{-1}\frac{1 + z^{-1}}{2}.$$

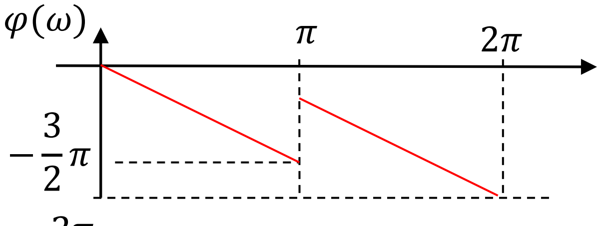
$z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T}\frac{1 + e^{-j\omega T}}{2} = e^{-j\frac{3}{2}\omega T}\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2} = e^{-j\frac{3}{2}\omega T} \cos\frac{\omega T}{2}.$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika: $|H(e^{j\omega T})| = \left|\cos\frac{\omega T}{2}\right|$

a fázis-karakterisztika: $\phi(\omega) = -\frac{3}{2}\omega T$, az $\omega T = k\pi$ helyen ($k = \pm 1, \pm 3, \ldots$) (az előjelváltás miatt) π fázisugrással.

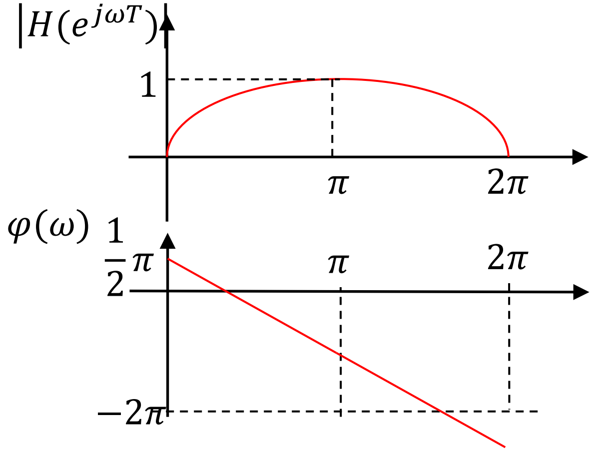




2. Példa: Két megfigyelt érték különbsége (egyszerű differenciálás), frekvenciatartománybeli viselkedése:

$\hat{x}(n+1) = \dfrac{y(n) - y(n-1)}{2}$, $z\hat{X}(z) = \dfrac{1 - z^{-1}}{2} Y(z)$, $H(z) = z^{-1}\dfrac{1 - z^{-1}}{2}$. $z = e^{j\omega T}$ helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T}\frac{1 - e^{-j\omega T}}{2} = je^{-j\frac{3}{2}\omega T}\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j} = je^{-j\frac{3}{2}\omega T} sin\frac{\omega T}{2}$$



Ebből az amplitúdó-karakterisztika: $\left|H(e^{j\omega T})\right| = \left|sin\frac{\omega T}{2}\right|$,

a fázis-karakterisztika: $\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega T$, az $\omega T = k2\pi$ helyen, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (az előjelváltás miatt) π fázisugrással.

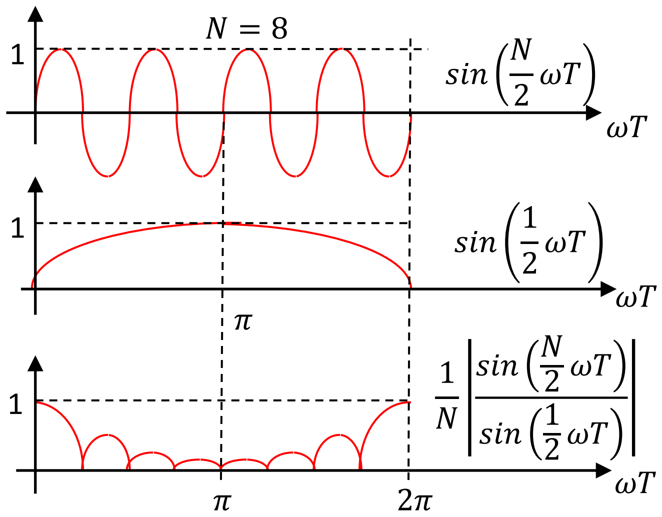
3. Példa: Csúszó-ablakos átlagolás, frekvenciatartománybeli viselkedése:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1}}{N}\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \qquad H\left(e^{j\omega T}\right) = \frac{e^{-j\omega T}}{N}\frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T}}{N}\frac{e^{j\frac{N\omega T}{2}} - e^{-j\frac{N\omega T}{2}}}{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T}}{N}\frac{sin\frac{N\omega T}{2}}{sin\frac{\omega T}{2}}.$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika: $\left|H(e^{j\omega T})\right| = \dfrac{1}{N}\left|\dfrac{sin\frac{N\omega T}{2}}{sin\frac{\omega T}{2}}\right|$

a fázis-karakterisztika: $\phi(\omega) = -\dfrac{N+1}{2}\omega T$

az $\omega T = k\frac{2\pi}{N}$ helyen, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$
(az előjelváltás miatt) π fázisugrással,
kivéve azokat a helyeket, ahol $sin\frac{\omega T}{2}$
is előjelet vált.



7.2. Jelek reprezentációja jelterekben

Jelterek: az euklideszi tér általánosításai

- általánosított távolság→ metrikus tér
- algebrai alapműveletek + linearitás → lineáris tér
- norma (kapcsolat a metrikával) → normált lineáris tér
- skalár v. belső szorzat → $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}$.

Lineáris vektortér: Bázisvektorok: $\boldsymbol{\phi}_m, m = 0,1,\dots,N-1$.

Ezekkel az $\boldsymbol{x}$ vektor reprezentációja:

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \boldsymbol{\phi}_m,}$$

ahol $\{\alpha_m\}$, $m = 0,1,\dots,N-1$, a báziselemekből készített lineáris kombináció súlytényezője.

A súlytényezők meghatározása: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\phi}_n) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m (\boldsymbol{\phi}_m,\boldsymbol{\phi}_n)$, $n = 0,1,\dots,N-1$ egyenletrendszer megoldásával.

Hasznos az ún. reciprok bázis alkalmazása: $\boldsymbol{\theta}_m$, $m = 0,1,\dots,N-1$, ahol $(\boldsymbol{\phi}_m,\boldsymbol{\theta}_n) = \delta_{mn}$, $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad m = n \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

Ezzel: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_n) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m (\boldsymbol{\phi}_m,\boldsymbol{\theta}_n) \rightarrow \alpha_m = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}_m)$. A bázis ortonormált, ha $(\boldsymbol{\phi}_m,\boldsymbol{\phi}_n) = \delta_{mn}$, amivel

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \sum_{m=0}^{N-1} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{\phi}_m)\, \boldsymbol{\phi}_m.}$$

Megjegyzés: $\boldsymbol{\phi}_m = [\phi_m(0),\phi_m(1),\dots,\phi_m(N-1)]^T$, ahol a zárójelben megadott indexek értelmezhetők diszkrét időindexként.

Lineáris tér: A bázisok folytonos függvények (végtelen dimenziós „vektorok”), azaz $\boldsymbol{\phi}_m \rightarrow \phi_m(t)$, $\boldsymbol{\theta}_m \rightarrow \theta_m(t)$.

Ezzel az $x(t)$ jel reprezentációja:

$$x(t) = \sum_{m=0\,(-\infty)}^{\infty} \alpha_m \phi_m(t) \text{ ahol } \alpha_m = (x(t),\theta_m(t))$$

Példa: Fourier sorfejtés:

$\phi_m(t) = exp(j2\pi mt)$,

$\theta_m(t) = exp(-j2\pi mt)$, $m = 0,1,\dots$.

Integrál-transzformáció:

a bázisoknál m szerint is végtelen finom felbontás, ill. végtelen dimenzió: a bázisokból összeáll egy kétváltozós függvény, a súlyozó együttható helyére pedig egy egyváltozós függvény lép. $m \rightarrow s$, ilyenkor

$$x(t) = \int_S \alpha(s)\phi(t,s)ds \qquad \alpha(s) = \int_T x(t)\theta(s,t)dt$$

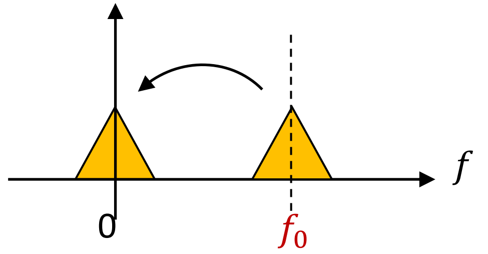
integrál-transz-formáció párok.

Példa: Fourier integrál:

$\phi(t,s) = 1/\theta(s,t) = exp(j2\pi st)$.

Megjegyzés:

A Fourier integrál hatása: Az $x(t)$ jelet szorozzuk az $exp(-j2\pi f_0 t)$ komplex exponenciálissal, aminek hatására a jel spektruma balra tolódik f_0-val.

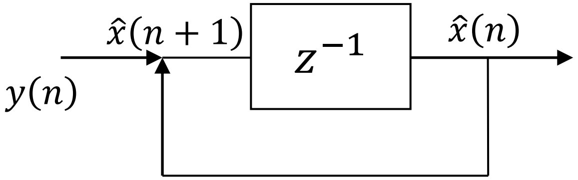


Az integrálás végtelen keskeny alul-áteresztő szűrőnek felel meg, amelynek kimenetén az f_0 frekvenciánál érvényes spektrum-értéket kapjuk.

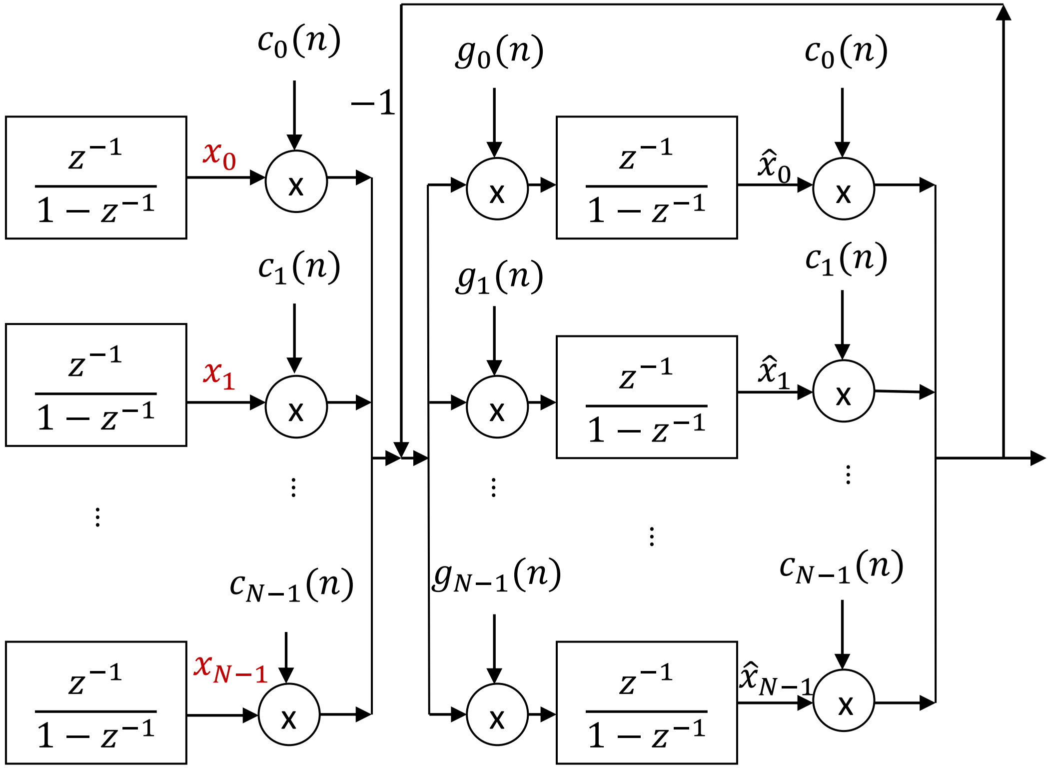
7.3. Megfigyelő jelfeldolgozási feladatokra

A mérendő jelről azt tételezzük fel, hogy a bázis-rendszer elemek lineáris kombinációjaként áll elő, és a bázisvektorok dimenziójának megfelelő mintából álló diszkrét jel.

A súlyozó együtthatókat bemenet nélküli, diszkrét integrátorokban tárolt értékek adják: $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$



$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + y(n),$$
$$\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = z^{-1} + z^{-2} + \cdots.$$



Jelölés: $\{c_m(n)\}$, $\{g_m(n)\}$ jelöli a bázis/reciprok bázis rendszereket, $m, n = 0,1,\ldots,N-1$.

n: „diszkrét idő” index

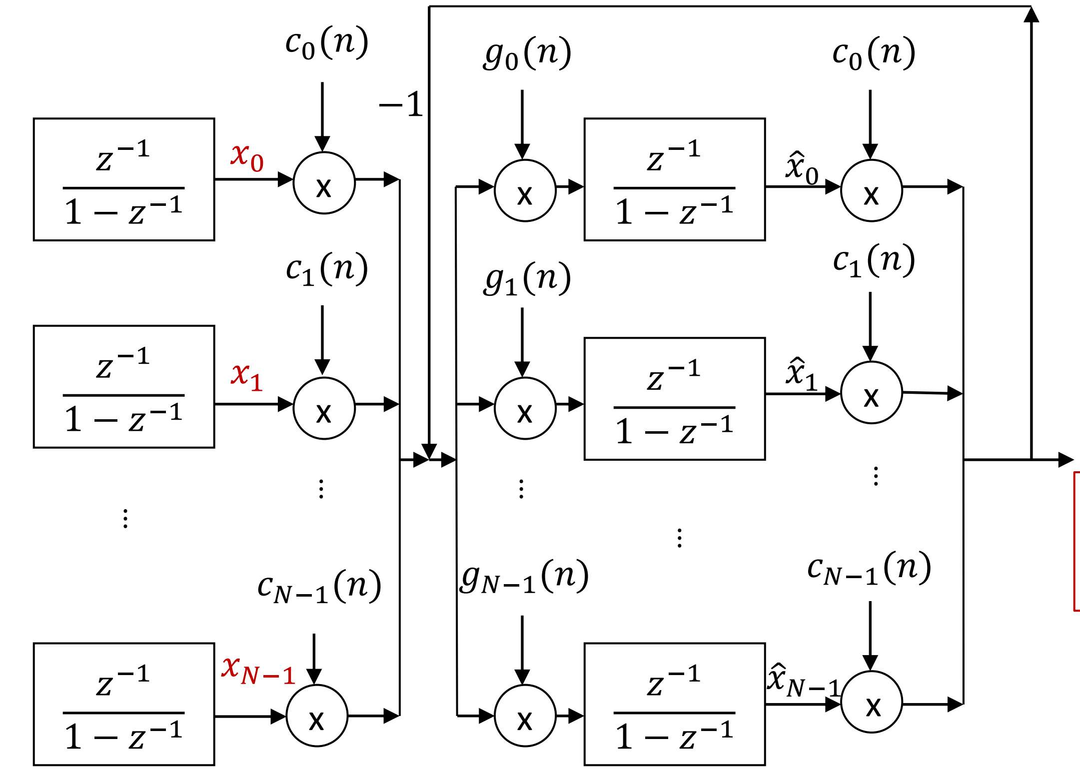
m: „diszkrét frekvencia” index

$\boldsymbol{x}(n) = [x_0(n) \quad x_1(n) \quad \cdots \quad x_{N-1}(n)]^T$ a jelet generáló hipotetikus rendszer állapotváltozói. Ezek

$\hat{\boldsymbol{x}}(n) = [\hat{x}_0(n) \quad \hat{x}_1(n) \quad \cdots \quad \hat{x}_{N-1}(n)]^T$ becslőjét megfigyelővel állítjuk elő.

A hipotetikus jelgeneráló rendszert leíró egyenletek:

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{x}(n); \quad y(n) = \boldsymbol{c}^T(n)\boldsymbol{x}(n),$$



$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{x}(n); \quad y(n) = \boldsymbol{c}^T(n)\boldsymbol{x}(n).$ A megfigyelő:

$\hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{g}(n)\boldsymbol{c}^T(n)[\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)]$ A hibarendszer:

$$\boldsymbol{x}(n+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(n)\boldsymbol{c}^T(n)\right)[\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)],$$

illetve a kezdeti értékek eltéréséből indítva:

$$\boldsymbol{x}(n+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \prod_{k=0}^{n} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T(k))[\boldsymbol{x}(0) - \hat{\boldsymbol{x}}(0)]$$

N lépéses konvergenciát akkor kapunk, ha:

$$\boxed{\prod_{k=0}^{N-1} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T(k)) = 0\,.}$$

Ez viszont teljesül, ha $\{c_m(n)\}$, és $\{g_m(n)\}$ bázis/reciprok bázis párt alkotnak $(m, n = 0,1,\dots,N-1)$!

Bizonyítás:

A szorzat minden olyan tagja, melyben szerepel $\boldsymbol{g}(i)\boldsymbol{c}^T(i)\boldsymbol{g}(j)\boldsymbol{c}^T(j)$, és $i \neq j$: nullát ad a bázis/reciprok bázis elemek ortogonalitásának köszönhetően. Ami marad:

$$\prod_{k=0}^{N-1} \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T(k)\right) = \boldsymbol{I} - \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{g}(i)\boldsymbol{c}^T(i) = 0.$$

Írjuk fel a $\boldsymbol{g}(k)\boldsymbol{c}^T(k)$ diadikus szorzatot:

$$\begin{bmatrix} g_0(k) \\ g_1(k) \\ \vdots \\ g_{N-1}(k) \end{bmatrix} [c_0(k) \quad c_1(k) \quad \cdots \quad c_{N-1}(k)] = \begin{bmatrix} g_0(k)c_0(k) & g_0(k)c_1(k) & \cdots & g_0(k)c_{N-1}(k) \\ g_1(k)c_0(k) & g_1(k)c_1(k) & \cdots & g_1(k)c_{N-1}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}(k)c_0(k) & g_{N-1}(k)c_1(k) & \cdots & g_{N-1}(k)c_{N-1}(k) \end{bmatrix}$$

Ha ezek után, k-t futtatva, minden mátrix elemre végrehajtjuk az összegzést, akkor minden elem helyén egy-egy bázis-reciprok bázis vektor skalár-szorzatát számítjuk ki, aminek eredményeképpen a főátlóban 1-esek, az összes többi helyen pedig nullák fognak állni.

Megjegyzések:

1. A diszkrét Fourier transzformáció (DFT) esetén: $\left\{c_m(n) = exp\left(j\frac{2\pi}{N}mn\right)\right\}$, $\left\{g_m(n) = \frac{1}{N}exp\left(-j\frac{2\pi}{N}mn\right)\right\}$

2. Az $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Ty}$ jeltranszformáció értelmezése a bázis/reciprok bázis rendszerrel: Először írjuk fel, hogyan képzeljük el a jel létrejöttét:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0(0) & c_1(0) & \cdots & c_{N-1}(0) \\ c_0(1) & c_1(1) & \cdots & c_{N-1}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0(N-1) & c_1(N-1) & \cdots & c_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

ahol az $\boldsymbol{x}$ vektor elemei a mátrix oszlopaiként megjelenő bázis vektorok súlytényezői. A jel-transzformáció célja a jelből ($\boldsymbol{y}$ vektor) kinyerni ezeket a súlytényezőket.

Ennek módja az $\boldsymbol{y}$ vektor szorzása a

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_0^T \\ \boldsymbol{g}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{N-1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0(0) & g_0(1) & \cdots & g_0(N-1) \\ g_1(0) & g_1(1) & \cdots & g_1(N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}(0) & g_{N-1}(1) & \cdots & g_{N-1}(N-1) \end{bmatrix}$$

mátrixszal.

A jel-transzformáció mátrixának sorai tehát a reciprok-bázis vektorok!

3. A megfigyelővel a „megfigyelés” az első N lépés után folytatható, a kapott eredmény mindig az utolsó N mintára vonatkozik (Csúszó-ablakos feldolgozás).

Ehhez $\boldsymbol{c}(N) = \boldsymbol{c}(0)$, $\boldsymbol{g}(N) = \boldsymbol{g}(0)'$ ill. $\boldsymbol{c}(k) = \boldsymbol{c}(k\,mod\,N)$, $\boldsymbol{g}(k) = \boldsymbol{g}(k\,mod\,N)$

4. A megadott módon tetszőleges diszkrét transzformáció megvalósítható csúszó-ablak (rekurzív) jelleggel. A számításigény N hosszú blokkra $\sim N^2$-tel arányos, egy újabb lépés számításigénye pedig $\sim N$ -tel.

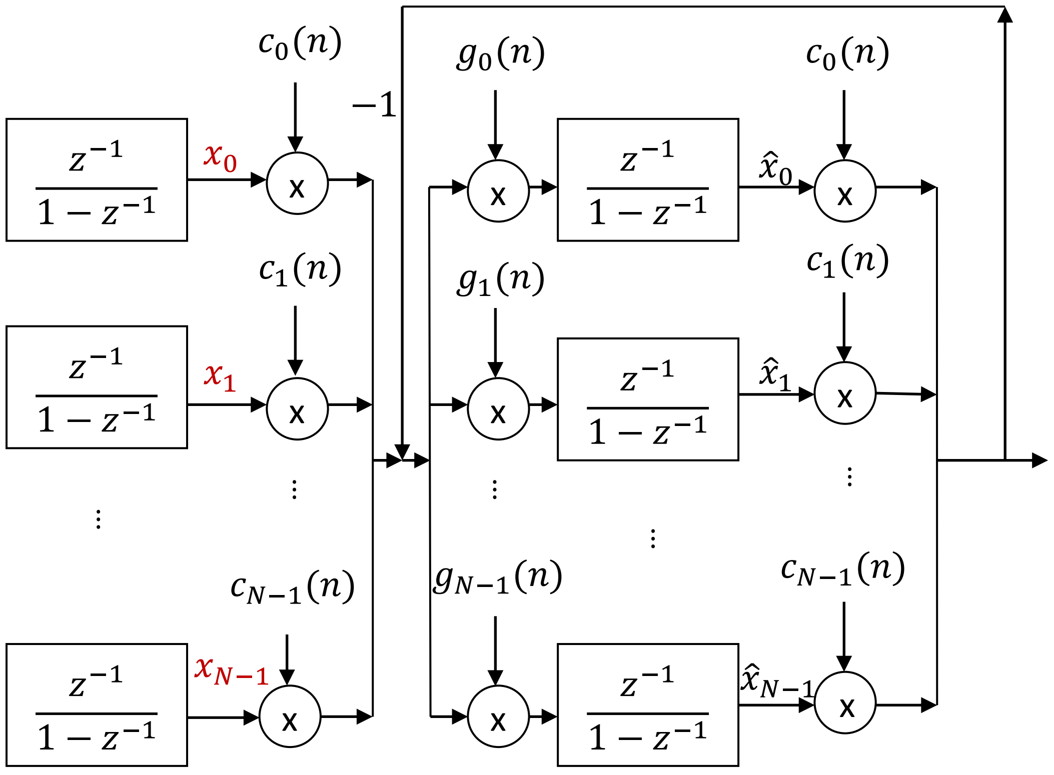
5. Gyakran használjuk a diszkrét Fourier transzformáció párt, amelynek összefüggései:

$$x(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}, m = 0,1,\ldots,N-1,$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)e^{j\frac{2\pi}{N}mn}, n = 0,1,\ldots,N-1.$$

Itt $y(n)$ a feldolgozandó diszkrét időfüggvény mintáit jelöli, $x(m)$ pedig a harmonikus komponensek súlytényezőit.

A rekurzív jelreprezentáció sajátosságai:



(1) Soros-párhuzamos átalakító: az időtartományban értelmezhető N mintából, az N minta beérkezését követően előáll a párhuzamos csatornákon N adat, amely egyértelműen reprezentálja az N időtartománybeli mintát.

(2) A számítást folytatva további N mintára ismét előáll a transzformált tartománybeli reprezentáció. Így folytatva, rendre az N mintából álló adatblokk egyértelmű reprezentációját kapjuk a blokkméretnek megfelelő mértékű mintavételi-frekvencia csökkentéssel (ún. decimációval.)

(3) Az ilyen előállítás minden lépésben a legutolsó N minta transzformáltját adja, azaz csúszó-ablakos/rekurzív transzformációt valósít meg.

(4) A megvalósított transzformációk a rekurzív előállítás következtében interpretálhatók N csatornás szűrőkként, ahol a szűrők kimenete kétféleképpen képezhető:

(a) A diszkrét integrátorok kimenete, mint szűrő kimenet, amely folyamatosan az $n = 0$ időpontban indított, majd periodikusan folytatott bázis-vektorok súlytényezőit becsüli (Fourier esetben ezek a diszkrét „Fourier-sorfejtés” együtthatói). Ideális esetben (N-re periodikus, megfelelően sávkorlátozott jel), miután a megfigyelő az első N lépésben konvergált, a bemenőjel tulajdonságaiból fakadóan a diszkrét integrátorok kimenete állandó marad;

(b) A diszkrét integrátorok utáni keverők kimenetei, amelyek a legutolsó N minta Fourier transzformáltját szolgáltatják, amelyek megegyeznek a folyamatosan feldolgozott jel komponenseinek aktuális mintáival (Fourier esetben ezek az ún. „Fourier komponensek”). Ezek a komponensek minden N periódus kezdetén megegyeznek a bázis-vektorok előzőekben értelmezett súlytényezőivel.

Kis kitérő: A valós együtthatós és a komplex együtthatós diszkrét Fourier sorfejtés kapcsolata

Ha a jel egy periódusa N mintából áll, és időtartama N/f_m, ahol f_m a mintavételi frekvencia, akkor a valós együtthatós diszkrét Fourier sorfejtés:

N páros esetén: $0, \frac{f_m}{N}, 2\frac{f_m}{N}, \dots, \frac{f_m}{2}$ frekvenciájú komponensekből fog állni.

N páratlan esetén: $0, \frac{f_m}{N}, 2\frac{f_m}{N}, \dots, (N-1)\frac{f_m}{2N}$ frekvenciájú komponensekből fog állni.

Egy valós értékkészletű $y(n)$ diszkrét jel sorfejtett alakja:

N páros esetén:

$$y(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[A_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)\right] + A_{\frac{N}{2}}\cos(\pi n) =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[A_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2} + B_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} - e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2j}\right] + A_{\frac{N}{2}}\frac{e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}}{2} =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[\underbrace{\left(\frac{A_k - jB_k}{2}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}_{} + \underbrace{\left(\frac{A_k + jB_k}{2}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{}\right] + A_{\frac{N}{2}}e^{j\pi n}$$

Konjugált komplex párok

N páratlan esetén:

$$y(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left[A_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)\right] =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left[A_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2} + B_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} - e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2j}\right]$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left[\underbrace{\left(\frac{A_k - jB_k}{2}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}_{} + \underbrace{\left(\frac{A_k + jB_k}{2}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{}\right]$$

Konjugált komplex párok

A diszkrét inverz Fourier transzformáció összefüggése: $y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} Y(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

A diszkrét Fourier transzformáció összefüggése: $Y(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$y(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left[\left(\frac{A_k - jB_k}{2}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + \left(\frac{A_k + jB_k}{2}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right] + A_{\frac{N}{2}}e^{j\pi n}$$

$$\boldsymbol{A_0 = Y(0),\qquad \frac{A_k - jB_k}{2} = C_k = Y(k),\qquad k = 1,\dots,\frac{N}{2}-1,\qquad A_{\frac{N}{2}} = Y\left(\frac{N}{2}\right),}$$

$$\boldsymbol{\frac{A_{k-\frac{N}{2}} + jB_{k-\frac{N}{2}}}{2} = C^*_{k-\frac{N}{2}} = Y(k),\qquad k = \frac{N}{2}+1,\dots,N-1}$$

$$y(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}}\left[\left(\frac{A_k - jB_k}{2}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + \left(\frac{A_k + jB_k}{2}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right]$$

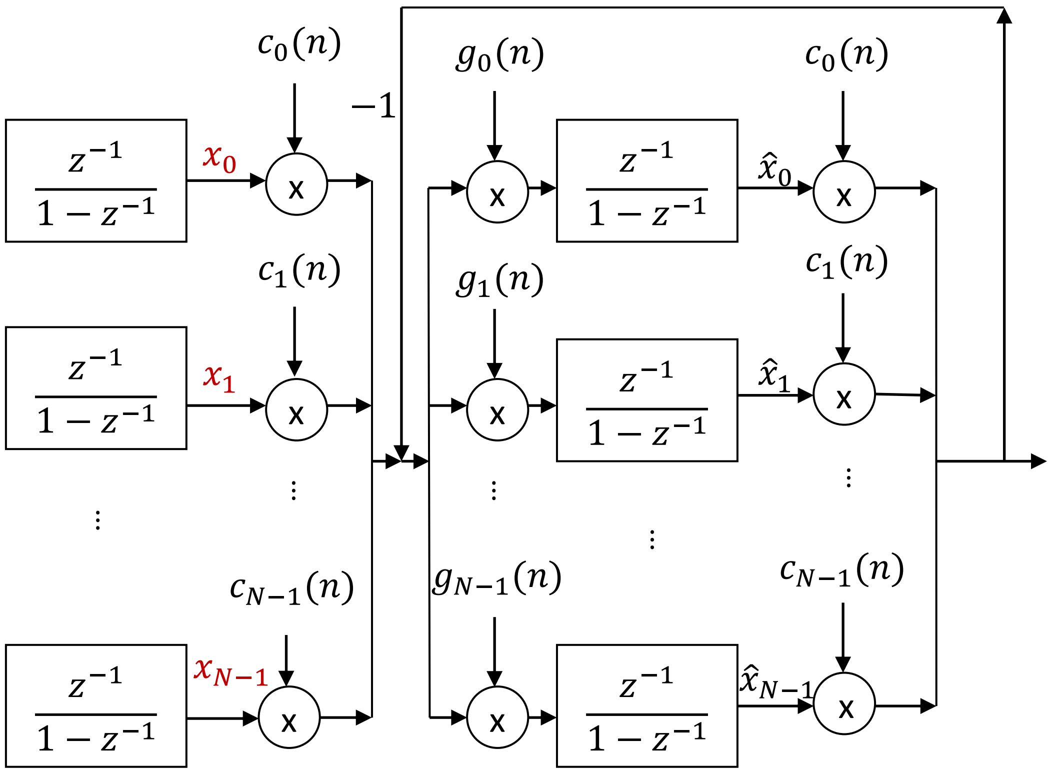
$$\boldsymbol{A_0 = Y(0),\qquad \frac{A_k - jB_k}{2} = C_k = Y(k),\qquad k = 1,\dots,\frac{N-1}{2},}$$

$$\boldsymbol{\frac{A_{k-\frac{N-1}{2}} + jB_{k-\frac{N-1}{2}}}{2} = C^*_{k-\frac{N-1}{2}} = Y(k),\qquad k = \frac{N+1}{2},\dots,N-1.}$$

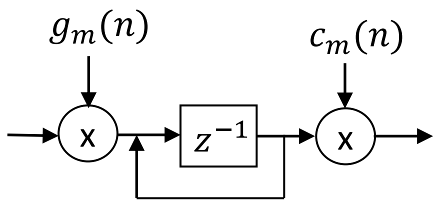
$$\boxed{y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} Y(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}\qquad \boxed{Y(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

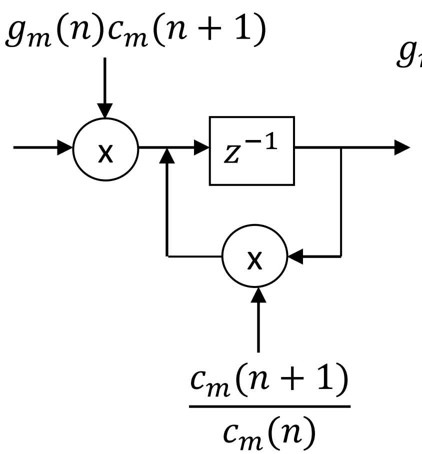
Látható, hogy a komplex forma sokkal tömörebb írásmódot tesz lehetővé.

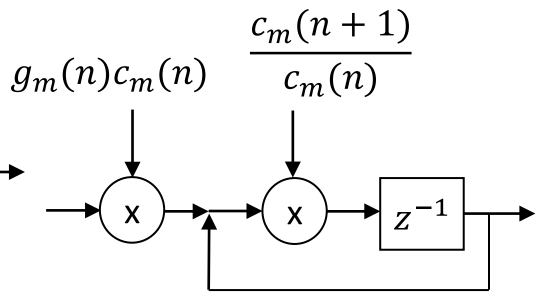
A továbbiakban a komplex formát használjuk. (Kitérő vége.)



Keverés-integrálás-keverés helyett sávszűrés:



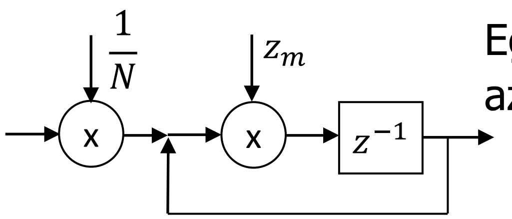




ezzel az átalakítással az elrendezés független lett az n diszkrét időváltozótól!

A DFT esetében

$$\boxed{\frac{c_m(n+1)}{c_m(n)} = e^{j\frac{2\pi}{N}m} = z_m,}\qquad \boxed{g_m(n)c_m(n) = \frac{1}{N}}$$



Egy ilyennek az átviteli függvénye az m-edik csatorna esetében:

$$H_m(z) = \frac{1}{N}\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}, \quad \boxed{z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m}}$$

Az átalakítással létrejött részegységet rezonátornak nevezzük, mert egyetlen (komplex) pólusa az egységsugarú körön, és ezzel a stabilitás határán helyezkedik el.

A megfigyelő csatornáinak összegzésével létrejövő kimenetre vonatkozó átviteli függvény:

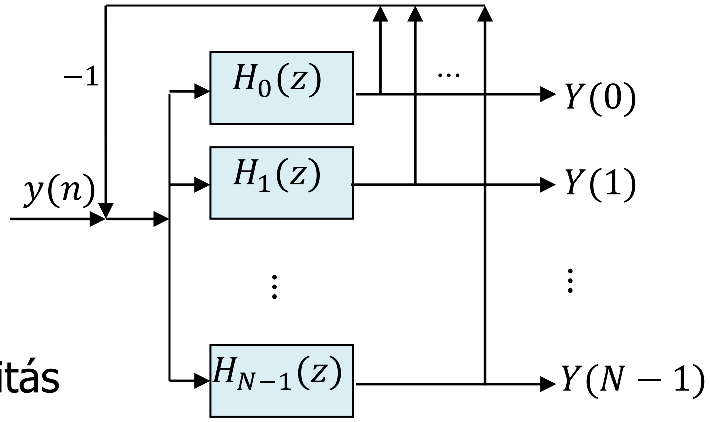
$$H_P(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}$$

Mivel ez a megfigyelő N lépésben konvergált, és utána már hibátlanul előállítja a bemenőjelet, ezért $H_P(z) = z^{-N}$ kell, hogy legyen!

A $H_P(z)$ összefüggés számlálóját és nevezőjét is szorozva $\prod_{n=0}^{N-1}(1 - z_n z^{-1}) = 1 - z^{-N}$ tényezővel:

$$= N(z^{-N} + (z^{-N})^2 + (z^{-N})^3 + \ldots) = N\frac{z^{-N}}{1 - z^{-N}}$$

mivel az N-edik egységgyökök (és hatványaik) összege a N-edik hatvány kivételével nulla.



A megfigyelő egyetlen csatornájának átviteli függvénye:

$$T_m(z) = \frac{H_m(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N}\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}$$

Fontos tulajdonság, hogy $T_m(z)|_{z=z_m} = 1$, ill. $T_m(z)|_{z=z_n, z\neq z_m} = 0$.

A rezonátor pólusnak megfelelő frekvencián a hurokerősítés végtelen!

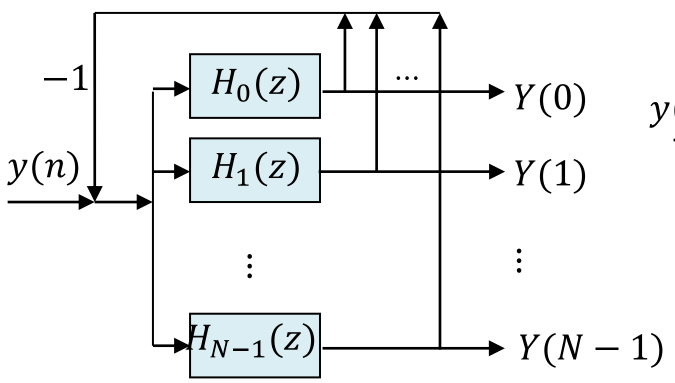
Fontos tulajdonság, hogy $H_P(z)|_{z=z_n} = 1$.

$$H_P(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N}(1 - z^{-N})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{(1 - z^{-N}) + \underbrace{\frac{1}{N}(1 - z^{-N})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}_{z^{-N}}} = z^{-N}$$

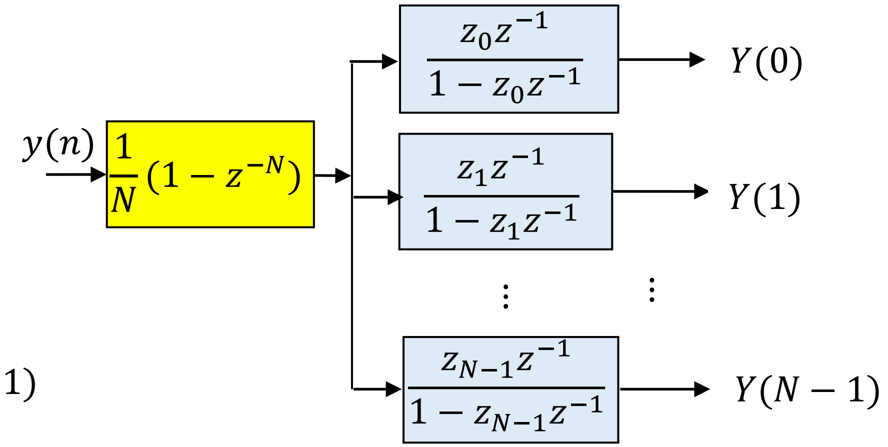
$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \sum_{n=0}^{N-1}[z_n z^{-1} + (z_n z^{-1})^2 + (z_n z^{-1})^3 + \ldots] =$$

$H_P(z)$ alternatív megvalósítása: $H_P(z) = \frac{1}{N}(1 - z^{-N})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = z^{-N}$.

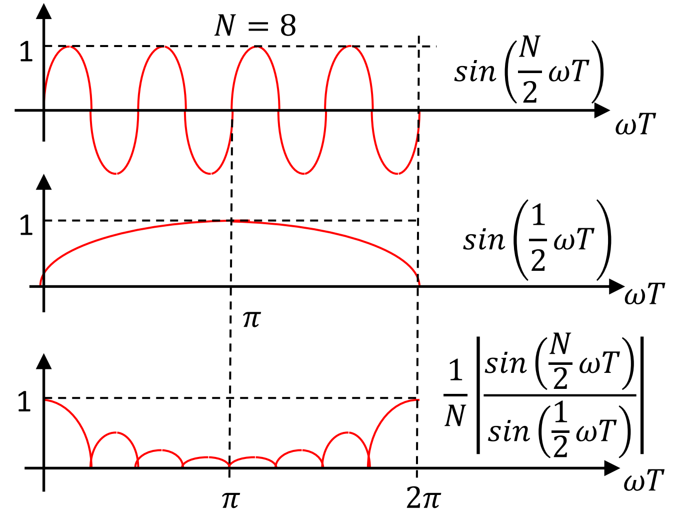
$T_m(z)$ alternatív megvalósítása: $T_m(z) = \frac{1}{N}(1 - z^{-N})\frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}$.



Rezonátoros struktúra



Lagrange struktúra



$H_P(z) = \frac{1}{N}(1-z^{-N})\sum_{n=0}^{N-1}\frac{z_n z^{-1}}{1-z_n z^{-1}} = z^{-N}.$ $\quad T_m(z) = \frac{1}{N}(1-z^{-N})\frac{z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}.$

$T_m(z)$ impulzusválasza/súlyfüggvénye az m-edik (reciprok) bázisvektor, amely N mintából áll.

$$T_m(z) = z_m z^{-1} + (z_m z^{-1})^2 + (z_m z^{-1})^3 + \cdots + (z_m z^{-1})^N \rightarrow \quad Y(m) =$$

$$= \frac{1}{N}\left[y(n-N)\left(e^{j\frac{2\pi}{N}m}\right)^N + y(n-N+1)\left(e^{j\frac{2\pi}{N}m}\right)^{N-1} + \cdots + \left(e^{j\frac{2\pi}{N}m}\right)^1 y(n-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\left[y(n-N)\left(e^{j\frac{2\pi}{N}m}\right)^0 + y(n-N+1)\left(e^{j\frac{2\pi}{N}m}\right)^{-1} + \cdots + \left(e^{j\frac{2\pi}{N}m}\right)^{-(N-1)} y(n-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\left[y(n-N)\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}m}\right)^0 + y(n-N+1)\left(e^{-j\frac{2\pi}{N}m}\right)^{1} + \cdots + \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}m}\right)^{(N-1)} y(n-1)\right]$$

Véges impulzusválaszú szűrő, mert számlálója osztható a nevezőjével. Számlálója az ún. fésűs szűrőt valósítja meg, amelynek *m* indexű fogát a pólus „kitöri”.

$m=0$ esetén ($z_0 = 1$) megegyezik a csúszó ablakos átlagoló átviteli függvényével:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1}}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}, \quad H\left(e^{j\omega T}\right) = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T}}{N}\frac{sin\frac{N\omega T}{2}}{sin\frac{\omega T}{2}}.$$

Ez olyan amplitúdó-karakterisztikájú szűrő, amelynek sávközepe nem nulla frekvencián, hanem a z_m gyöktényező által kijelölt frekvencián, azaz a mintavételi frekvencia m/N-szeresénél van. A szűrő a N szélességű ablakra nézve periodikus jelek komponenseit, a m-edik kivételével, tökéletesen kiszűrik, mert a harmonikus frekvencia pozíciókban a számláló átvitele nulla.