

# Méréselmélet

## 4. fejezet: Modellillesztés

2022. március 23.

# 4. Modellillesztés

(Jegyzet 40-57. oldalak)

A modellillesztés problémája meglehetősen szerteágazó.

Célja a megismerendő környezet további információszerezést segítő leírása.

A vizsgált környezetet a továbbiakban a megadott modell-struktúra és a hozzátartozó paraméterek segítségével tudjuk jellemezni, további változásait becsülni/követni.

A modellillesztés egyik klasszikus példája a **regresszió számítás**. Lásd a **17. ábrát!**

## 4.1. Regresszió-számítás

A modellezéshez egy általunk kézben tartott, tipikusan paraméterek segítségével módosítható („hangolható”)  $\hat{y} = \hat{g}(u)$  függvényt használunk.

A cél egy olyan „beállítás” elérése, amely valamilyen értelemben optimális.

Tipikusan **négyzetes kritériumot** használunk:

$$J(\hat{y}) = E\{(y - \hat{y})^2\} \tag{171}$$

**Lineáris regresszió:** egy lineáris skalár függvényt illesztünk:

$$\hat{y} = \hat{g}(u) = a_0 + a_1 u \tag{173}$$

Ennek paraméterei minimalizálják a négyzetes  $J(\hat{y}) = E\{(y - \hat{g}(u))^2\}$  költségfüggvényt.

$$J(a_0, a_1) = E\{(y - a_0 - a_1 u)^2\}. \tag{174}$$

$$\frac{\partial J(a_0, a_1)}{\partial a_0} = -2(E[y] - a_0 - a_1 E[u]) = 0 \tag{175}$$

Ennek deriváltjai  $a_0$  és  $a_1$  szerint:

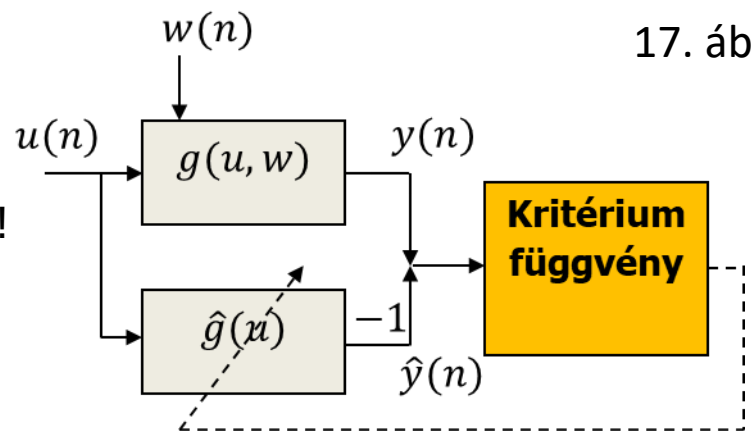
$$\frac{\partial J(a_0, a_1)}{\partial a_1} = -2(E[uy] - a_0 E[u] - a_1 E[u^2]) = 0$$

ahonnan:

$$a_0 = \frac{E[u^2]E[y] - E[u]E[uy]}{E[u^2] - E^2[u]}, a_1 = \frac{E[uy] - E[u]E[y]}{E[u^2] - E^2[u]} \tag{176}$$

Ehhez ismerni kell a következő momentumokat:

$$E[u], E[y], E[uy], E[u^2]. \tag{177}$$



17. ábra

**Optimalizálás**

**Polinomiális regresszió:** A lineáris regresszió feladatának egyfajta **általánosítása**. Ebben az esetben az illesztett függvény:

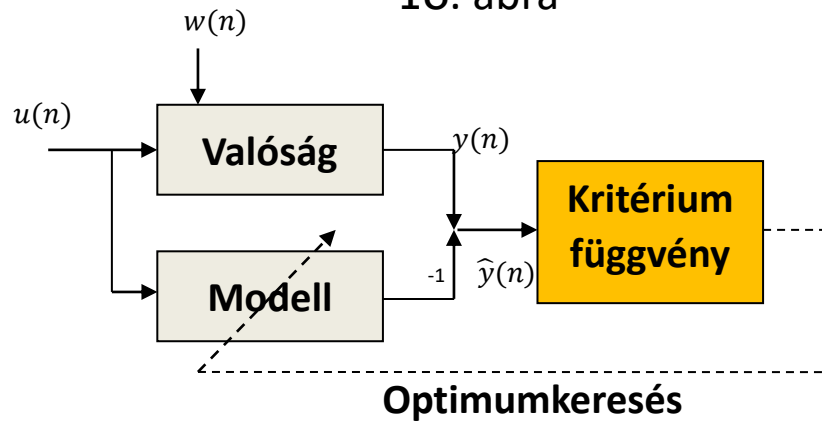
$$\hat{g}(u) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k u^k, \quad (178)$$

amelynek fontos tulajdonsága, hogy **paramétereiben lineáris**.

A **paramétereiben lineáris modelleket** azért kedveljük, mert **négyzetes hibakritérium** esetén a szélsőérték-keresés **lineáris egyenletrendszer** megoldására vezet, mivel a négyzetes kifejezések paraméterek szerinti deriválása lineáris összefüggést eredményez.

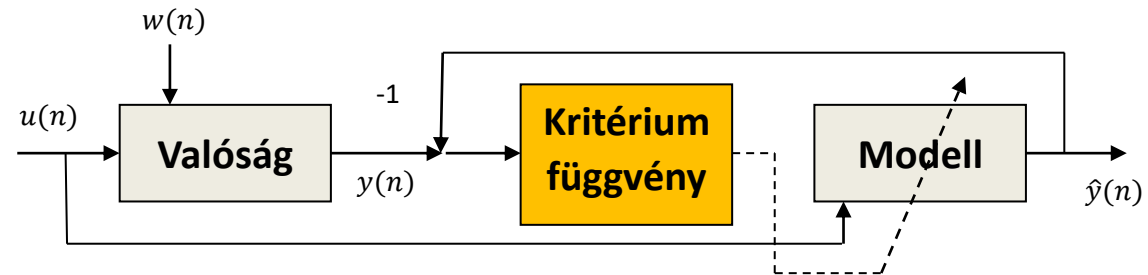
A **18. ábrán** a modell-illesztést a regressziós sémát követő módon mutatjuk be. Az  $u$  bemenetre adott  $y$  választ szeretnénk valamilyen kritérium szerint (többnyire négyzetes értelemben) legjobban megközelíteni a modell  $\hat{y}$  válaszával.

18. ábra

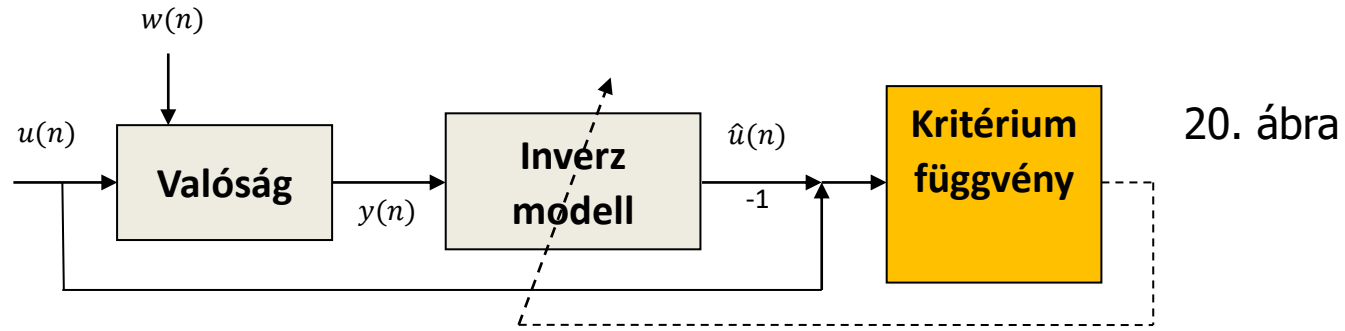


Érdekes összevetni ezt a sémát a **megfigyelő sémával** (lásd **2. ábra**). Ehhez rajzoljuk át a **19. ábra** szerinti formára!

19. ábra



**Megjegyzés:** A modell-illesztési probléma megragadható „soros” formában is, amikor tulajdonképpen az ún. inverz-modellt illesztjük (lásd **20. ábra**), és amikor az inverz-modell által a bemenetet becsüljük.



20. ábra

Ennek a megközelítésnek hátránya dinamikus rendszerek esetében a soros „kapcsolás” eredő késleltetése, ezért az inverz-modellel „jóslásra” kényszerülünk, vagy az  $u(n)$  bemenetet kell késleltetnünk, ami sok nehézséggel jár.

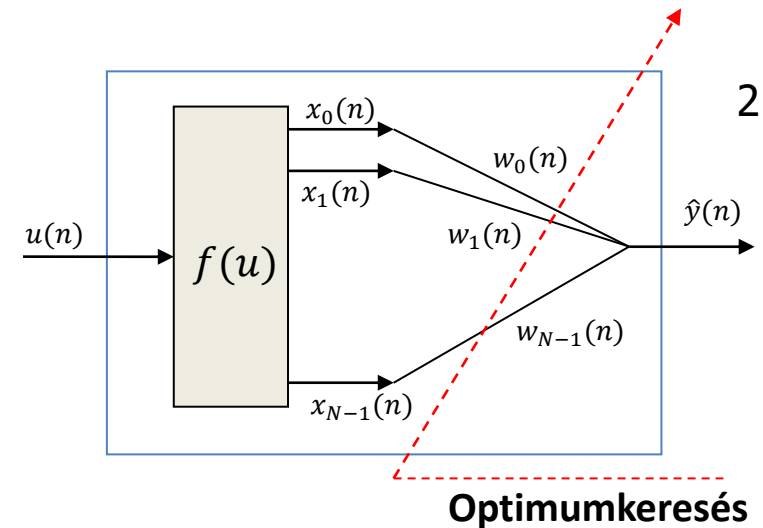
### Adaptív lineáris kombinátor:

Az általánosított regressziós séma kapcsán az egyik gyakran használt modell-családot a **21. ábra** mutatja be.

Ebben az  $u(n)$  diszkrét értéksorozatból egy  $\mathbf{X}^T(n) = [x_0(n) \ x_1(n) \ \dots \ x_{N-1}(n)]$  értéksorozatot állítunk elő először, majd ezen értékek lineáris kombinációjaként állítjuk elő az  $\hat{y}(n)$  értéket.

Az optimumkeresés során a  $\mathbf{W}^T(n) = [w_0(n) \ w_1(n) \ \dots \ w_{N-1}(n)]$  paraméterek legkedvezőbb, minimális négyzetes hibát eredményező beállítására törekszünk. Keressük a következő összefüggés minimumát:

$$J(\mathbf{W}(n)) = E\{[y(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)]^T [y(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)]\} = \\ = E\{y^T(n)y(n)\} - 2\mathbf{W}^T(n)E\{\mathbf{X}(n)y(n)\} + \mathbf{W}^T(n)E\{\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\}\mathbf{W}(n).$$



21. ábra

$$\begin{aligned}
 J(\mathbf{W}(n)) &= E\{[y(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)]^T [y(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)]\} = \\
 &= E\{y^T(n)y(n)\} - 2\mathbf{W}^T(n)E\{\mathbf{X}(n)y(n)\} + \mathbf{W}^T(n)E\{\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\}\mathbf{W}(n).
 \end{aligned}
 \tag{181}$$

Vezessük be a  $E\{\mathbf{X}(n)y(n)\} = \mathbf{P}$ , és a  $E\{\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\} = \mathbf{R}$  jelölést! Ezzel a szélsőérték keresés:

$$\frac{\partial J(\mathbf{W}(n))}{\partial \mathbf{W}(n)} = -2\mathbf{P} + 2\mathbf{R}\mathbf{W}(n) = \mathbf{0}, \tag{182}$$

Amiből az optimális beállítást az ún. Wiener-Hopf egyenlet adja:  $\mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}$  (183)

**Megjegyzések:** 1. A (183) összefüggést visszahelyettesítve a (181) kifejezésbe:

$$J_{min} = E\{y^T(n)y(n)\} - \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} = E\{y^T(n)y(n)\} - \mathbf{P}^T \mathbf{W}^* \tag{184}$$

$$J(\mathbf{W}(n)) = J_{min} + (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*)^T \mathbf{R} (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*) = J_{min} + \mathbf{V}^T(n) \mathbf{R} \mathbf{V}(n) \tag{185}$$

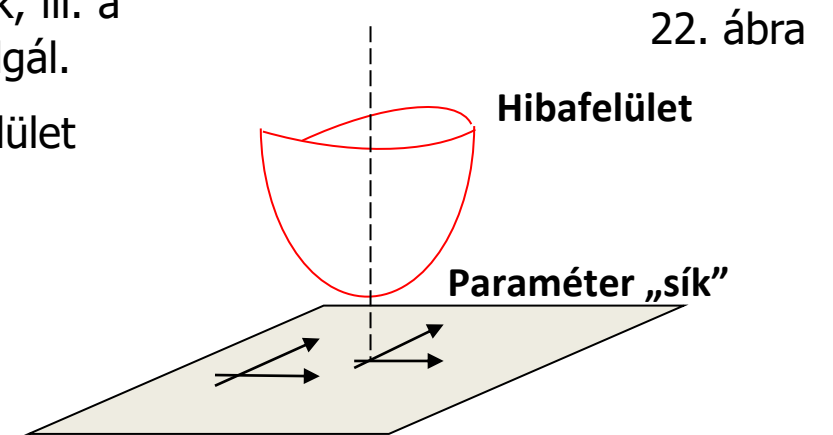
ahol  $\mathbf{V}(n) = \mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*$

2. A (185) összefüggés mutatja a négyzetes hiba alakulását a paraméterek, ill. a paraméterhiba függvényében. A viszonyok illusztrálására a **22. ábra** szolgál.

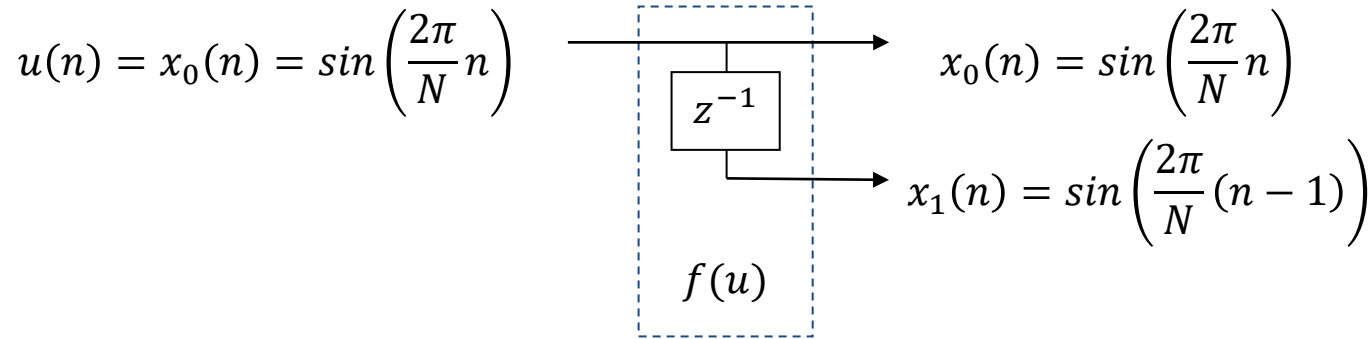
A hibafelület tetszőleges pontjában a hiba csökkenés fajlagos mértékét a felület meredekségével (gradiensével) mérhetjük:

$$\nabla(n) = \frac{\partial J(\mathbf{W}(n))}{\partial \mathbf{W}(n)} = 2\mathbf{R}[\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*] = 2\mathbf{R}\mathbf{V}(n) = 2(\mathbf{R}\mathbf{W}(n) - \mathbf{P}) \tag{186}$$

**Példa:** Legyen  $\mathbf{X}^T(n) = [\sin(2\pi n/N) \quad \sin(2\pi(n-1)/N)]$ , azaz egy szinuszos hullámforma két egymás utáni mintája. (Lásd **23. ábra.**)



23. ábra



Az  $R$  és a  $P$  mátrixok a szinuszos, ill. koszinuszos hullámformák teljes ( $N > 2$ ) periódusra történő átlagolásával származtathatók:

$$E\{x_0^2(n)\} = E\{x_1^2(n)\} = E\{\sin^2(2\pi n/N)\} = E\{\sin^2(2\pi(n-1)/N)\} = 0.5,$$

$$E\{x_0(n)x_1(n)\} = E\{\sin(2\pi n/N) \sin(2\pi(n-1)/N)\} = 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right),$$

$$E\{x_0(n)y(n)\} = E\{2 \sin(2\pi n/N) \cos(2\pi n/N)\} = 0,$$

$$E\{x_1(n)y(n)\} = E\{2 \sin(2\pi(n-1)/N) \cos(2\pi n/N)\} = -\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right).$$

Képezve  $R$  inverzét:

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{0.25 \sin^2\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) \\ -0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (190)$$

A regressziós vektor és a paraméter vektor ebben a példában kétdimenziós.

Itt most  $N$  azt jelöli, hogy a szinuszos hullámforma egy periódusa hány mintából áll.

A jel, amihez az illesztést végezzük:  $y(n) = 2 \cos(2\pi n/N)$ .

Hogyan válasszuk meg a

$$\mathbf{W}^T(n) = [w_0(n) \quad w_1(n)] \quad (187)$$

paramétereket ahhoz, hogy a közelítés négyzetes hibája minimális legyen?

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) \\ 0.5 \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (188) \quad (189)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{N}\right) \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\tan(2\pi/N)} \\ \frac{2}{\sin(2\pi/N)} \end{bmatrix}$$

Ezzel a paraméter-beállítással az illesztett modell kimenete:

$$\hat{y}(n) = X^T(n)W^* = 2 \frac{\sin(2\pi n/N)}{\tan(2\pi/N)} - 2 \frac{\sin(2\pi(n-1)/N)}{\sin(2\pi/N)} = 2 \cos(2\pi n/N) \quad (191)$$

## 4.2. Út az adaptív eljárásokhoz

(183) és (186) alapján:  $W^* = R^{-1}P$ ,  $\nabla(n) = 2(RW(n) - P)$ . Ez utóbbi mindkét oldalát megszorozva az  $\frac{1}{2}R^{-1}$  mátrixszal:

$$W^* = W(n) - \frac{1}{2}R^{-1}\nabla(n). \quad (192) \quad W(n+1) = W(n) - \frac{1}{2}\hat{R}^{-1}\hat{\nabla}(n). \quad (193) \quad W(n+1) = W(n) - \mu R^{-1}\nabla(n) \quad (194)$$

ahol  $0 < \mu < 1$  az ún. konvergencia/"bátorsági" tényező.

### Megjegyzések:

1. Ha pontosan ismerjük az  $R$  mátrixot és gradienst, akkor  $\mu = \frac{1}{2}$  egy lépéses konvergenciát biztosít tetszőleges  $W(n)$  kezdőpontból.
3. A modell-illesztés gradiens módszereit a szerint különböztetjük meg, hogy a (194) szerinti összefüggés (közelítő) alkalmazásához milyen előzetes ismeretek állnak rendelkezésünkre.

Amennyiben az  $R$  és a  $P$  mátrixok pontosan ismertek, akkor az adaptív lineáris kombinátor működését a (194) és (195) egyenletek írják le.

2. Mivel  $\nabla(n) = 2R[W(n) - W^*]$ , ezért ezt a (194) összefüggésbe behelyettesítve, és az egyenlet mindkét oldalából levonva  $W^*$  értékét:

$$W(n+1) - W^* = (1 - 2\mu)(W(n) - W^*) = V(n+1) = (1 - 2\mu)^{n+1}V(0), \quad (195)$$

vagyis a kezdeti hiba exponenciális jelleggel csökken, ha  $\mu \neq \frac{1}{2}$ . Ha  $0 < \mu < 0.5$ , akkor monoton csökkenő hibával, ellenkező esetben pedig monoton csökkenő amplitúdójú, de lengő jellegű hibával közelítjük meg.

A (185) összefüggésből jól látható módon az illesztésnél használt négyzetes alakú, **paraboloid formájú**, hibafelület az  $R$  mátrixtól függ.

Előjáróban azt mutatjuk be, hogy milyen feltételek esetén lehetséges az optimum-keresést úgy megvalósítani, hogy egyenként változtatjuk a változtatható paramétereket, mégpedig úgy, hogy mindig megkeressük a lokális minimumot, és eközben a hiba egyetlen lépés során sem nő.

Ehhez egy olyan koordináta-rendszerben történő keresés tartozik, amelynek tengelyei a paraboloid formájú hibafelület főtengelyeinek irányába mutatnak.

Ezt a koordináta-rendszert az  $R$  mátrix **sajátvektorai** jelölik ki, tehát a továbbiakban fontos szerepet játszik tehát az  $R$  **sajátérték/sajátvektor rendszere**. Példaként a (189) szerinti esetben vizsgálódva:

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \cos \frac{2\pi}{N} \\ 0.5 \cos \frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix} \quad (196)$$

A  $\det[\lambda I - R] = 0$  egyenlet gyökei adják a sajátértékeket:

$$(\lambda - 0.5)^2 - 0.25 \cos^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right) = \lambda^2 - \lambda + 0.25 \sin^2 \left( \frac{2\pi}{N} \right) = 0 \quad (197)$$

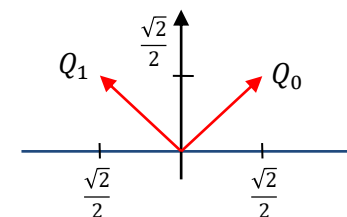
$$\lambda_0 = 0.5 + 0.5 \cos \left( \frac{2\pi}{N} \right), \quad \lambda_1 = 0.5 - 0.5 \cos \left( \frac{2\pi}{N} \right) \quad (198)$$

A sajátvektorok az  $RQ_0 = \lambda_0 Q_0$ ,  $RQ_1 = \lambda_1 Q_1$  egyenletekből származtathatók.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \cos \left( \frac{2\pi}{N} \right) \\ 0.5 \cos \left( \frac{2\pi}{N} \right) & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{01} \end{bmatrix} = (0.5 + \cos \left( \frac{2\pi}{N} \right)) \begin{bmatrix} q_{00} \\ q_{01} \end{bmatrix} \Rightarrow q_{00} = q_{01} \quad (199)$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{2}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad (201)$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \cos \left( \frac{2\pi}{N} \right) \\ 0.5 \cos \left( \frac{2\pi}{N} \right) & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{11} \end{bmatrix} = (0.5 - \cos \left( \frac{2\pi}{N} \right)) \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow q_{10} = -q_{11} \quad (200)$$



24. ábra



**Általában:**  $det(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Rightarrow \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}, \quad (\mathbf{R} - \lambda_n\mathbf{I})\mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (202)$

A sajátvektorokat mátrixba rendezve:  $\mathbf{R} \underbrace{[\mathbf{Q}_0 \quad \mathbf{Q}_1 \quad \dots \quad \mathbf{Q}_{N-1}]}_{\mathbf{Q}} = \underbrace{[\mathbf{Q}_0 \quad \mathbf{Q}_1 \quad \dots \quad \mathbf{Q}_{N-1}]}_{\mathbf{Q}} \underbrace{diag\langle \lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_{N-1} \rangle}_{\mathbf{\Lambda}} \quad (203)$

ahonnan  $\mathbf{R}$  ún. normál formája:  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}. \quad (204)$

Mivel az  $\mathbf{R}$  definíció szerint szimmetrikus mátrix, ezért  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$ .

Fontos tulajdonság, hogy ilyenkor a sajátvektorok ortogonálisak:  $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j = 0$ , ha  $\forall i \neq j$ , egyébként  $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_i = c_i \quad \forall i$ .  
Ha  $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_i = 1 \quad \forall i$  -re, akkor a sajátvektorok ortonormáltak, és  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , azaz  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ .

**Az ortogonalitás bizonyítása:** A definíció alapján  $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{R}^T = \lambda_i \mathbf{Q}_i^T$ , ill.  $\mathbf{R}\mathbf{Q}_j = \lambda_j \mathbf{Q}_j$ .

Az első egyenlet mindkét oldalát jobbról szorozva  $\mathbf{Q}_j$ -vel, a második egyenlet mindkét oldalát balról szorozva  $\mathbf{Q}_i^T$ -vel:

$$\mathbf{Q}_i^T \mathbf{R}^T \mathbf{Q}_j = \lambda_i \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j, \text{ ill. } \mathbf{Q}_i^T \mathbf{R} \mathbf{Q}_j = \lambda_j \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j.$$

Mivel  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$ , ezért az egyenletek baloldala egyenlő, ezáltal  $\lambda_i \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j = \lambda_j \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j$ .

Mivel  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , ezért az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha  $\mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_j = 0$ .

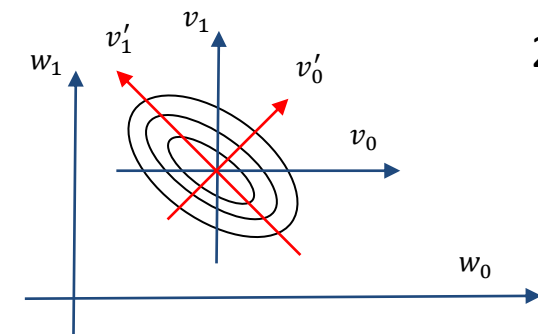
**Megjegyzés:** Az  $\mathbf{R}$  korrelációs mátrix sajátvektorai a hibafelület főtengelezeit jelölik ki.

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}(n)) &= J_{min} + (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*)^T \mathbf{R} (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*) = J_{min} + \mathbf{V}^T(n) \mathbf{R} \mathbf{V}(n) = \\ &= J_{min} + \mathbf{V}^T(n) \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{V}(n) = J_{min} + [\mathbf{Q}^T \mathbf{V}(n)]^T \mathbf{\Lambda} [\mathbf{Q}^T \mathbf{V}(n)] = J_{min} + \mathbf{V}'^T(n) \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}'(n), \end{aligned} \quad (205)$$

$$\mathbf{V}'(n) = \mathbf{Q}^T \mathbf{V}(n). \quad (206)$$

**A gradiens:**  $\nabla(n) = 2\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}'(n) = 2[\lambda_0 v'_0 \quad \lambda_1 v'_1 \quad \dots \quad \lambda_{N-1} v'_{N-1}]^T \quad (207)$

A viszonyokat a **25. ábra** illusztrálja: a sajátvektorok mátrixával transzformált paraméter-hiba vektorok koordinátái a paraboloid főtengelei mentén értelmezhetők.



25. ábra

### Példa: Egyváltozós eset:

$$w(n+1) = w(n) + \mu(-\nabla(n)), \nabla(n) = 2\lambda(w(n) - w^*), \text{ amivel } w(n+1) - w^* = (1 - 2\mu\lambda)(w(n) - w^*),$$

$$\text{ill. } r = 1 - 2\mu\lambda \text{ and } v(n) = w(n) - w^* \text{ jelöléssel } v(n+1) = rv(n) = r^{n+1}v(0).$$

A konvergenciához  $|r| = |1 - 2\mu\lambda| < 1$  betartása szükséges.

$$\text{Ebből a sajátérték és a bátorsági tényező megkívánt viszonyára vonatkozó feltétel: } 0 < \mu < \frac{1}{\lambda} \quad (208)$$

Maga az iterációs eljárás:

ha  $0 < \mu < \frac{1}{2\lambda}$ , akkor **túlcsillapított**, ha  $\mu = \frac{1}{2\lambda}$ , akkor **kritikusan csillapított**, ha  $\frac{1}{2\lambda} < \mu < \frac{1}{\lambda}$ , akkor **alulcsillapított**.

$$\text{Többsváltozós eset: } V'(n+1) = (I - 2\mu\Lambda)^{n+1}V'(0).$$

Ha egy skalár  $\mu$ -t használunk, akkor ahhoz, hogy az eljárás konvergáljon:

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{max}} \quad (209)$$

Ha az  $R$  mátrix sajátértékei nem ismertek, csak a diagonálisa, akkor felhasználhatjuk, hogy  $\lambda_{max} < \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i = tr[\Lambda] = tr[R]$ , és mivel a sajátértékek nemnegatívak, ezért  $\mu$  beállítható a következő tartományba:

$$0 < \mu < \frac{1}{tr[R]} \quad (210)$$

## 4.3. Iteratív modellillesztési módszerek

### Newton módszer:

Erre a Wiener-Hopf egyenletből kiindulva jutunk.  
Feltételezzük, hogy ismerjük az  $R$  és a  $P$  mátrixot.

$$\begin{aligned} W(n+1) &= W(n) - \mu R^{-1} \nabla(n) \\ V(n+1) &= (1 - 2\mu)^{n+1} V(0) \end{aligned} \quad (211)$$

## Legmeredekebb lejtő módszere:

Nem feltételezi az  $R$  és a  $P$  mátrixok ismeretét, csak a lokális viszonyok ismeretét:

$$\nabla J(\mathbf{W}(n)) = \frac{\partial J(\mathbf{W}(n))}{\partial \mathbf{W}(n)} \approx \frac{\Delta J(\mathbf{W}(n))}{\Delta \mathbf{W}(n)} = \hat{\nabla}(n) \quad (212)$$
$$\begin{aligned} \mathbf{W}(n+1) &= \mathbf{W}(n) - \mu \nabla(n) \\ \mathbf{V}'(n+1) &= (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{\Lambda})^{n+1} \mathbf{V}'(0) \end{aligned} \quad (213)$$

## Legkisebb átlagos négyzetes (Least-Mean-Square (LMS)) módszer:

A hiba pillanatértékéből indulunk ki:

$$J(\mathbf{W}(n)) = [y(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)]^T [y(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n)] = e^T(n)e(n) \quad (214)$$

Ennek deriválásával becsüljük a gradienst:

$$\hat{\nabla}(n) = \frac{\partial J(\mathbf{W}(n))}{\partial \mathbf{W}(n)} = -2\mathbf{X}(n)y(n) + 2\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\mathbf{W}(n) = -2\mathbf{X}(n)e(n) \quad (215)$$

## Megjegyzés:

Általános tapasztalat, hogy ha **eléggé kis**  $\mu$  értékkel dolgozunk, akkor elég jól megközelíthetjük az optimális paraméter-vektort, **nagyobb**  $\mu$  esetén a megmaradó paraméter-hiba nagyobb lesz.

Ennek az az oka, hogy ilyenkor a paraboloid legalsó pontja környezetében **ide-oda ugrálunk** a pillanatnyi derivált szerint, és a **nem eléggé kis**  $\mu$  miatt képtelenek vagyunk még lejjebb ereszkedni.

Mindenképpen célszerű tehát a minimum környezetében a  $\mu$  érték **további csökkentése**.

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu \mathbf{X}(n)e(n). \quad (216)$$

$$\mathbf{V}(n+1) = \left[ \prod_{i=0}^n (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{X}(i)\mathbf{X}^T(i)) \right] \mathbf{V}(0) \quad (218)$$

## $\alpha$ -LMS módszer:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \frac{\alpha}{\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)} \mathbf{X}(n)e(n) \quad (219)$$

$$\mathbf{V}(n+1) = \left[ \prod_{i=0}^n \left( \mathbf{I} - \frac{\alpha}{\mathbf{X}^T(i)\mathbf{X}(i)} \mathbf{X}(i)\mathbf{X}^T(i) \right) \right] \mathbf{V}(0)$$

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}(n)e(n)$$

**LMS-Newton módszer:**

$$\mathbf{V}(n+1) = \left[ \prod_{i=0}^n (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}(i)\mathbf{X}^T(i)) \right] \mathbf{V}(0) \quad (220)$$

$$\mathbf{R}(n+1) = \lambda\mathbf{R}(n) + \nu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n),$$

$$0 < \lambda < 1, 0 < \nu < 1, \lambda = 1 - \nu, \\ (\lambda = 0.9 \dots 0.99).$$

**Megjegyzések:**

- A modellillesztés feladatát alapvetően kétféle módszerrel oldhatjuk meg:
  - „batch”** vagy **„off-line”** jelleggel, amikor felvett regisztrátumot utólag dolgozunk fel;
  - iteratív, rekurzív, „on-line”** jelleggel, amikor a felvétellel párhuzamos a feldolgozás.
- A modellillesztés célját illetően is alapvetően két nagy csoportot különböztetünk meg:
  - identifikáció:** a lehető legpontosabban szeretnénk megragadni a valóságot,
  - adaptáció:** a lehető legjobban szeretnénk követni a valóságot, a valóság változásait.
- Az adaptációt megvalósító ún. adaptív rendszerek esetében többnyire **iteratív/rekurzív** eljárásokat alkalmazunk, az identifikáció esetében a kétféle megközelítés lényegében egyenértékű.

**A kritériumfüggvény Taylor sorfejtése:**

$$J(\mathbf{W}) \cong J(\mathbf{W}(n)) + [\nabla J(\mathbf{W}(n))]^T [\mathbf{W} - \mathbf{W}(n)] + \\ + \frac{1}{2} [\mathbf{W} - \mathbf{W}(n)]^T \mathbf{H}(\mathbf{W}(n)) [\mathbf{W} - \mathbf{W}(n)] + \dots \quad (223)$$

ahol

$$\mathbf{H}(\mathbf{W}(n)) = \left. \frac{\partial \nabla J(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} \right|_{\mathbf{W}=\mathbf{W}(n)} \quad (224)$$

Ha a sorbafejtett  $J(\mathbf{W})$  minimumát deriválással keressük, és ehhez a sorfejtésnek csak első három tagját vesszük figyelembe, akkor a feltételi egyenlet:

$$\nabla J(\mathbf{W}(n+1)) = \nabla J(\mathbf{W}(n)) + \\ + \mathbf{H}(\mathbf{W}(n))(\mathbf{W}(n+1) - \mathbf{W}(n)) = \mathbf{0} \quad (225)$$

amiből a Newton módszer adódik:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{W}(n))\nabla J(\mathbf{W}(n)) \quad (226)$$

**Megjegyzés:** Az  $\frac{1}{2}$ -es szorzó itt nem jelenik meg, mert jelen van a (223) összefüggésben.

## 4.4. Adaptív IIR rendszerek

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k(n)x(n-k) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k(n)\hat{y}(n-k), \quad (227)$$

Csak az ún. direkt struktúrára szorítkozunk. Formálisan továbbra is egy **adaptív lineáris kombinátort** alkalmazunk, azonban az aktuális paraméter becslések korábbi becslések függvényei lesznek (implicit függés).

$$\mathbf{W}^T(n) = [a_0(n), a_1(n), \dots, a_{M-1}(n); b_1(n), b_2(n), \dots, b_{N-1}(n)], \quad (228)$$

$$\mathbf{X}^T(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1); \hat{y}(n-1), \hat{y}(n-2), \dots, \hat{y}(n-N+1)]. \quad (229)$$

Pszedo-Lineáris Regresszió (PLR):

Fennáll a lokális minimumok veszélye!

**Equation-Error (EE) forma:**

**Alternatív hibafüggvény** segítségével visszavezetjük FIR problémára.

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\hat{Y}(z)}{X(z)} \quad (230)$$

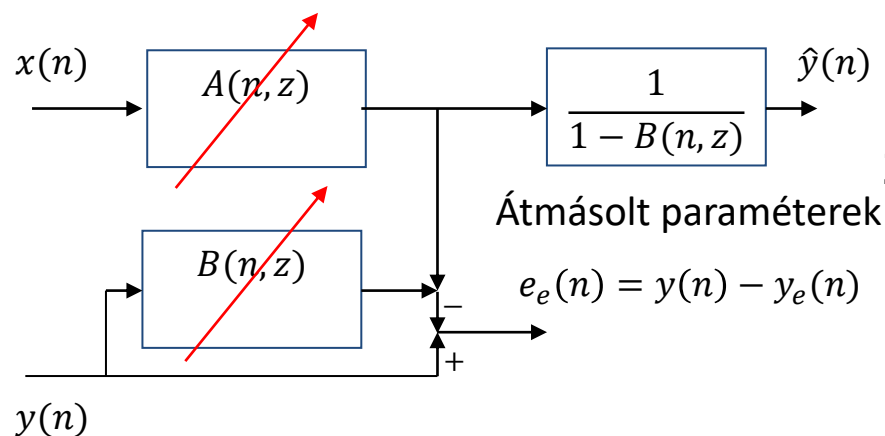
Célszerűen az  $e(n) = y(n) - \hat{y}(n)$  közelítési hiba helyett annak egy szűrt változatát, az  $e_e(n) = D(z)e(n)$  hibát minimalizáljuk, mert ez a hiba független lesz  $\hat{y}(n)$  értékétől. Bevezetve a következő jelöléseket:

$$N(z) = A(n, z) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k(n)z^{-k}, \quad B(n, z) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k(n)z^{-k}, \quad D(z) = 1 - B(n, z) \quad \text{és felhasználva a (230) összefüggést:}$$

$$e_e(n) = D(z)e(n) = \underbrace{y(n) - B(n, z)y(n)}_{D(z)y(n)} - \underbrace{A(n, z)x(n)}_{D(z)\hat{y}(n)} = y(n) - \frac{y_e(n)}{B(n, z)y(n) + A(n, z)x(n)}, \quad (232) \quad \text{ahol (228) felhasználásával:}$$

$$y_e(n) = \mathbf{W}^T(n)\mathbf{X}_e(n), \quad \text{ahol} \quad \mathbf{X}_e^T(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1); y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N+1)]. \quad (233)$$

Mivel (232) paramétereiben lineáris, ezért inentől bátran alkalmazható minden olyan módszer, ami az adaptív lineáris kombinátor megközelítésben megfelelőnek bizonyult. A módszer „blokkvázlata” a **26. ábrán** látható.



26. ábra

**Megjegyzés:** zajos megfigyelés esetén torzítás lép(het) fel a paraméterbecslés során, azaz a becslő várható értéke nem fog megegyezni a paraméter „ideális” értékével.

### Output-Error (OE) forma:

Ha megpróbáljuk elkerülni a paraméterek torzítását, akkor a kimeneti hiba (OE) módszer előnyösebb, de a lokális minimum veszélye itt is fennáll. Ha ezt elfogadjuk, akkor a különféle gradiens módszereket alkalmazhatjuk.

**Pillanatnyi gradiens (LMS-szerű) módszer:** itt megpróbáljuk minimalizálni a pillanatnyi kimeneti hiba négyzetét:  $e^2(n) = e_o^2(n)$ . A közelítő gradiens formája olyan, mint az előzőekben tárgyalté:

$$\hat{\mathbf{V}}(n) = -2e(n) \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \mathbf{W}(n)} = -2e(n) \nabla \hat{y}(n) \quad (234)$$

$$\nabla^T \hat{y}(n) =$$

$$= \left[ \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_0(n)}, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_1(n)}, \dots, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_{M-1}(n)}, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_1(n)}, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_2(n)}, \dots, \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_{N-1}(n)} \right], \quad (235)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_k(n)} = x(n-k) + \sum_{i=1}^{N-1} b_i(n) \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial a_k(n)} \quad (236)$$

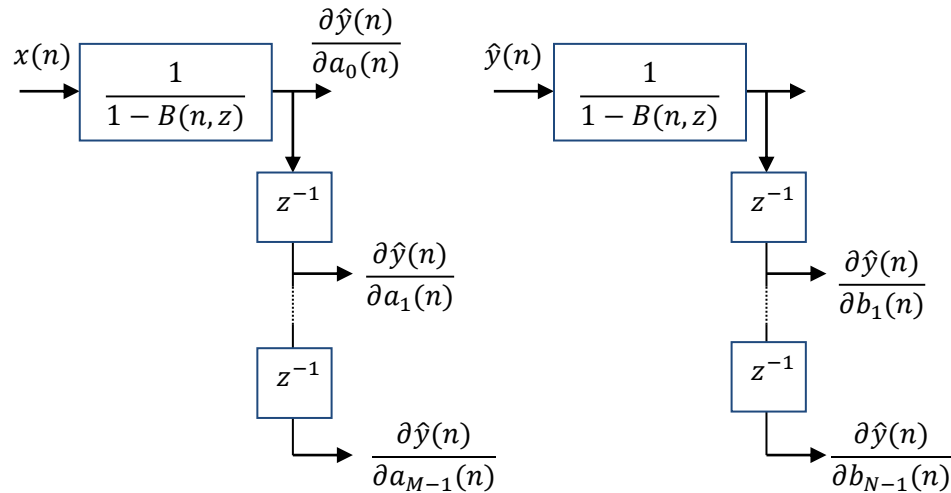
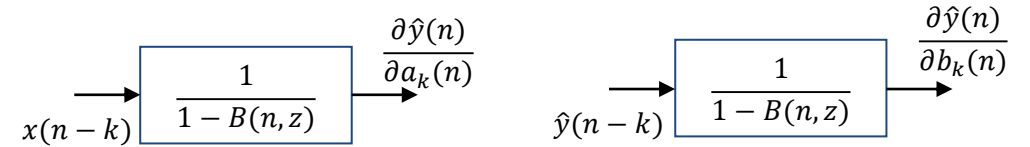
$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial b_k(n)} = \hat{y}(n-k) + \sum_{i=1}^{N-1} b_i(n) \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial b_k(n)}$$

A (236) összefüggések alapján jól látható az implicit függés mibenléte: Az IIR szűrők végtelen memóriája miatt az aktuális „paraméter-érzékenységre” valamennyi korábbi bemenőjel-minta kihat.

(236) Számítása nagyon nehéz. Egyszerűsítésekre van szükség!

Ha elegendően kis lépésközzel dolgozunk az iterációk során (azaz kicsi a  $\mu$ ), akkor alkalmazható a következő közelítés:

$$\frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial a_k(n)} \cong \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial a_k(n-i)}, \quad \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial b_k(n)} \cong \frac{\partial \hat{y}(n-i)}{\partial b_k(n-i)}, \quad (237)$$



28. ábra: Egyszerűsített gradiens szűrők

### Az adaptív IIR algoritmusok általános formája:

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu \mathbf{R}^{-1}(n+1) \mathbf{X}_f(n) e_f(n) \quad (240)$$

ahol  $\mathbf{X}_f(n)$  a "szűrt" információs (vagy regressziós) vector,  $e_f(n)$  pedig a "szűrt" hibavektor.

27. ábra: Gradiens szűrők

### Szűrt-hiba algoritmus (Filtered-Error (FE) Algorithm):

$$e(n) \Rightarrow e_f(n) = [1 + C(n, z)]e(n), \quad (238)$$

ahol  $C(n, z)$ -t úgy választjuk, hogy

$$\frac{1 + C(n, z)}{1 - B_*(z)} \quad (239)$$

Strictly Positive Real (**SPR**) tulajdonságú legyen.

Itt  $B_*(z) = B(n, z)$  ha  $\mathbf{W}(n) = \mathbf{W}^*$ .

### Megjegyzés:

Az **SPR** tulajdonság azt jelenti, hogy gerjesztés nélkül a rendszer belső energiája disszipálódni fog, és a rendszer eléri minimális energiájú állapotát.

Ez megfeleltethető a költségfüggvény minimalizálás során biztosítandó konvergenciának.

## Stabilitáseleméleti megközelítés:

A megközelítés alapgondolatát az LMS eljárásen keresztül mutatjuk be, lásd (216) és (218):

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{X}(n), \quad \mathbf{V}(n+1) = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]\mathbf{V}(n). \quad (241)$$

Ez utóbbi egy autonóm rendszer, amely globálisan aszimptotikusan stabil esetben:

$$\mathbf{V}(n) \Rightarrow 0, \text{ amivel } \mathbf{W}(n) \Rightarrow \mathbf{W}^*. \quad (242)$$

Ljapunov módszerével keresünk egy alkalmas energiafüggvényt. Esetünkben erre alkalmas:

$$G(n) = \mathbf{V}^T(n)\mathbf{V}(n). \quad (243)$$

Azt keressük, hogy ez miként csökkenthető:

$$\Delta G(n+1) = G(n+1) - G(n) \leq 0, \quad (244)$$

minden  $n$ -re. Ha  $G(0)$  véges, akkor  $\Delta G(n) \Rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} \Delta G(n+1) &= \mathbf{V}^T(n+1)\mathbf{V}(n+1) - \mathbf{V}^T(n)\mathbf{V}(n) = \\ &= \mathbf{V}^T(n)[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]^T[\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]\mathbf{V}(n) - \mathbf{V}^T(n)\mathbf{V}(n) = \\ &= -4\mu e^2(n)(1 - \mu\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)). \end{aligned} \quad (245)$$

Ahol felhasználtuk, hogy  $\mathbf{V}^T(n)\mathbf{X}(n) = \mathbf{X}^T(n)\mathbf{V}(n) = e(n)$

$$\text{Mivel } \mu > 0, \text{ ezért ha } 0 < \mu < \frac{1}{\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)} \quad (246)$$

$\forall n$ -re, akkor  $\Delta G \Rightarrow 0$  magával vonja  $\mu e^2(n) \rightarrow 0$ , illetve  $\mathbf{V}^T(n)\mathbf{X}(n) \rightarrow 0$ .

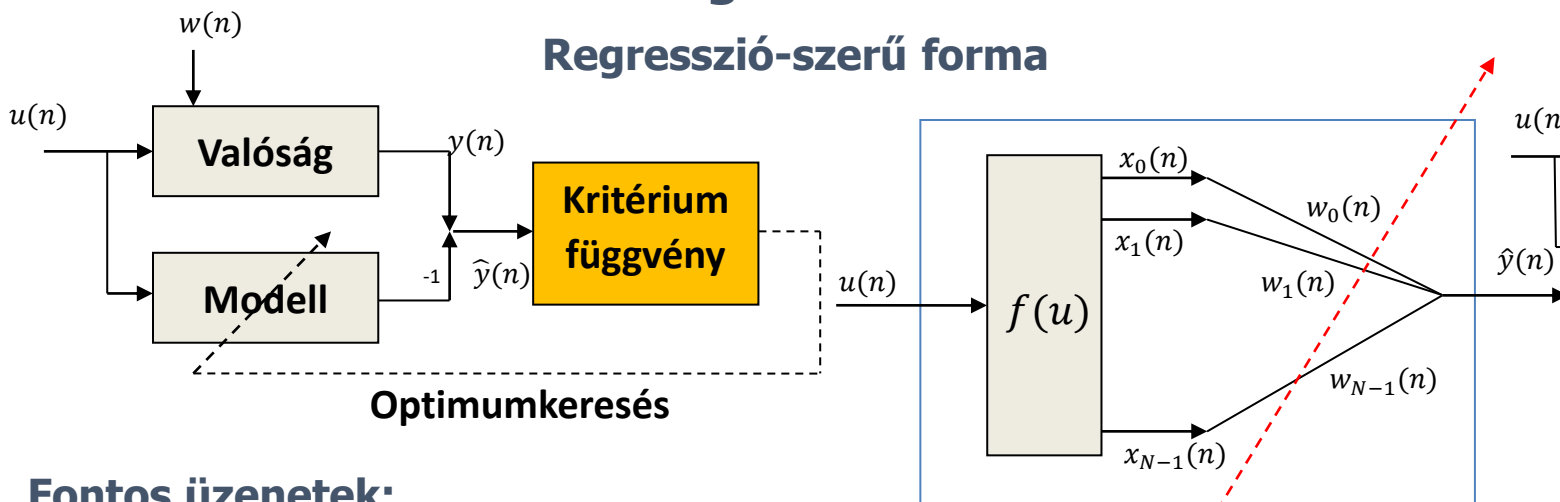
## Megjegyzések:

1. A (246) feltétel implicit módon azt is tartalmazza, hogy az  $\mathbf{X}(n)$  korlátos, és  $1/[1 - B(n, z)]$  stabil. (Az átviteli függvény pólusai az egységsugarú körön belül helyezkednek el.)
2. Az  $e(n) = (\mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*)^T\mathbf{X}(n)$  hiba lehet azért nulla, mert a két vektor ortogonális. Ezt nyilván kerülni kell.

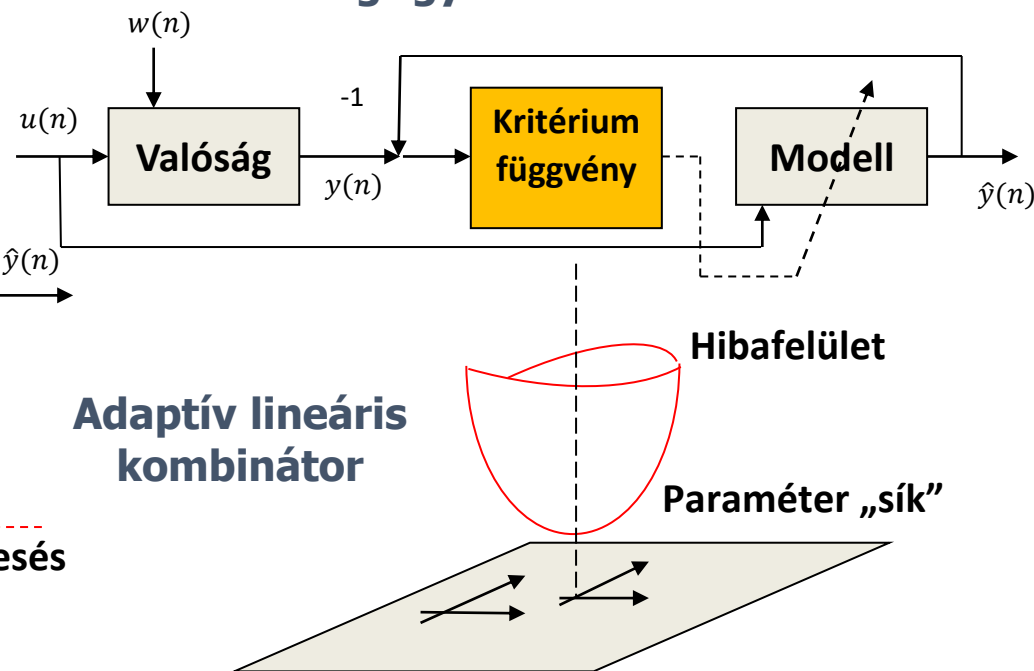


# Modellillesztés: Összefoglalás

## Regresszió-szerű forma



## Megfigyelő-szerű forma



## Fontos üzenetek:

1. A paramétereiben **lineáris** modelleket azért kedveljük, mert **Optimumkeresés négyzetes hibakritérium** esetén a szélsőérték-keresés lineáris egyenletrendszer megoldására vezet, mivel a négyzetes kifejezések paraméterek szerinti deriválása **lineáris** összefüggést eredményez.
2. A modellillesztés feladatát alapvetően kétféle módszerrel oldhatjuk meg:
  - (a) **„batch”** vagy **„off-line”** jelleggel, amikor felvett regisztrátumot utólag dolgozunk fel;
  - (b) **iteratív, rekurzív, „on-line”** jelleggel, amikor a felvétellel párhuzamos a feldolgozás.
3. A modellillesztés célját illetően is alapvetően két nagy csoportot különböztetünk meg:
  - (a) **identifikáció:** a lehető legpontosabban szeretnénk megragadni a valóságot,
  - (b) **adaptáció:** a lehető legjobban szeretnénk követni a valóságot, a valóság változásait.

## Equation-Error (EE) forma

