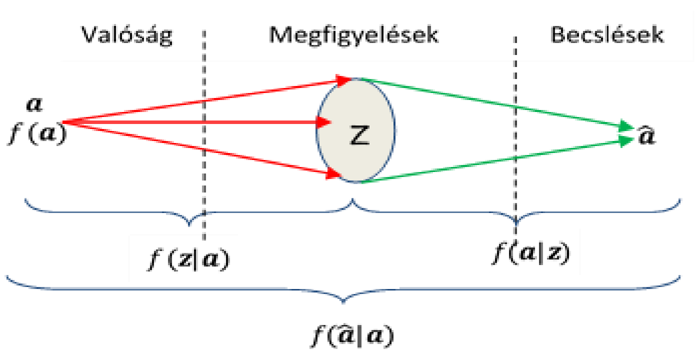
Méréselmélet

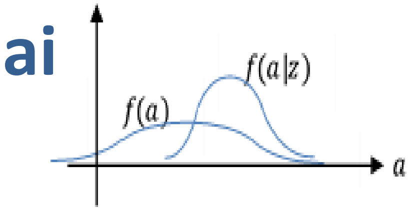
3. fejezet: A becsléselmélet alapjai

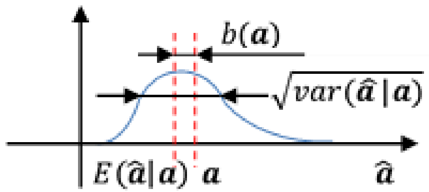
2022. március 16.

Ismétlés

3. A becsléselmélet alapjai

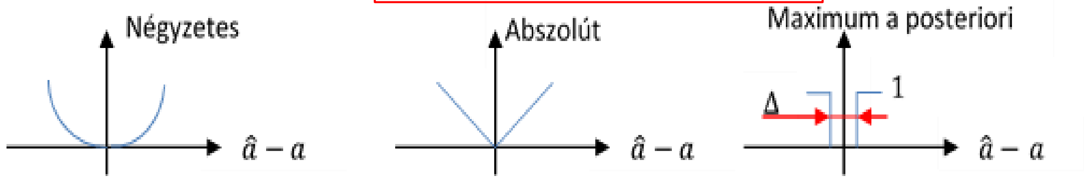






3.1. Bayes becslők

$$f(a|z) = \frac{f(z|a)f(a)}{f(z)},$$

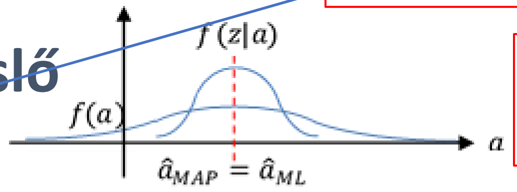


$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a f(a|z)da$$

$\hat{a}_{ABS} = f(a|z)$ **mediánja.**

$\hat{a}_{MAP} = f(a|z)$ **maximumhelye.**

3.2. Maximum Likelihood (ML) becslő



$$\left.\frac{\partial f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right|_{a=\hat{a}_{ML}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right|_{a=\hat{a}_{ML}} = 0$$

Gauss eloszlások esetén:

Ha a megfigyelés modellje lineáris:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{n}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{MS} = \underbrace{\boldsymbol{\mu_a}}_{\text{apriori ismeret}} + \underbrace{[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{\mu_a})}_{\text{korrekció } \boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{\mu_a} \text{ függvényében}}$$

$$cov\{a, a|\boldsymbol{z}\} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1}]^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{GM} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}\boldsymbol{z} \longleftarrow \boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1} = \boldsymbol{0} \longrightarrow cov(\hat{\boldsymbol{a}}_{GM}, \hat{\boldsymbol{a}}_{GM}) = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$

3.3. Becslők determinisztikus modellel jellemzett paraméterek esetén

Torzítatlan becslő: $E(a-\hat{a}) = 0$

A minimális variancia kritériuma: $mse(\hat{a}) = E[(\hat{a}-a)^2] = var(\hat{a}) + b^2(a).$

Minimális varianciájú, torzítatlan becslők (MVU):

Cramer-Rao alsó korlát (Cramer-Rao Lower Bound: CRLB, skalár paraméter esete) $var(\hat{a}) \geq CRLB(a)$

Ha $E\left[\frac{\partial \ln f(z;a)}{\partial a}\right] = 0$ akkor $var(\hat{a}) \geq \left[-E\left(\frac{\partial^2 \ln f(z;a)}{\partial a^2}\right)\right]^{-1}$ $\quad \frac{\partial \ln f(z;a)}{\partial a} = I(a)(g(z)-a)$ $\quad \hat{a} = g(z)$ a variancia minimum: $= \frac{1}{I(a)}.$

Cramer-Rao alsó korlát (Cramer-Rao Lower Bound: CRLB, vektor-paraméter esete)

Ha $E\left[\frac{\partial \ln f(z;\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right] = 0.$ akkor $\boldsymbol{C}_{\hat{a}} - \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{a}) \geq 0$ $\quad \boldsymbol{I}_{ij}(\boldsymbol{a}) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(z;\boldsymbol{a})}{\partial a_i \partial a_j}\right)$ $\quad \frac{\partial \ln f(z;\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{g}(z)-\boldsymbol{a})$ $\quad \hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{g}(z)$ $\quad \boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{a})$

Gauss eloszlások esetén:

Ismétlés

Ha a megfigyelés modellje lineáris: $\boxed{z = Ua + w}$	z	N*1	dimenziós megfigyelési vektor
	U	N*M	dimenziós, ismert megfigyelési mátrix
	a	M*1	dimenziós, becsülendő paramétervektor
	w	N*1	dimenziós zaj vektor, amelynek valószínűség sűrűségfüggvénye $\mathcal{N}(0,\boldsymbol{C})$.

Jelölés egyeztetés: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Sigma}_{nn}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{n}$

$$\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{z},\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}}\left[\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z} - 2\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{a}\right] = \left[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{a}\right], \quad \boxed{\hat{\boldsymbol{a}} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z},} \quad \boxed{\boldsymbol{C}_{\hat{\boldsymbol{a}}} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}.}$$

$\boxed{\hat{\boldsymbol{a}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{a}, \left(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\right)}$ $\boxed{E(\hat{\boldsymbol{a}}) = (\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}E(\boldsymbol{U}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{a}}$ Ha a csatornazaj Gauss, akkor a GM (ML) becslő MVU becslő.

Megjegyzés: A házi feladatban színes zajt kell generálni. Ha $\boldsymbol{w}$ fehér zaj, egységnyi szórással, akkor transzformáljuk: $\boldsymbol{B}$-vel

$E[(\boldsymbol{Bw})((\boldsymbol{Bw}))^T] = E[\boldsymbol{Bww}^T\boldsymbol{B}^T] = \boldsymbol{BB}^T = \boldsymbol{C}$ Lehetséges megoldások: 1. MATLAB: mvnrnd( ) függvény. 2. MATLAB: sqrtm(C)*randn( ) 3. **Cholesky faktorizáció** MATLAB: chol( ) függvény.

A legjobb lineáris torzítatlan becslő (BLUE):

- Az MVU becslő nem mindig létezik vagy lehetetlenség megtalálni.
- Az adatok valószínűség sűrűségfüggvénye nem ismert.

A **BLUE** becslő egy **szuboptimális** becslő, amelyik:

- az adatok **lineáris** függvénye: $\boxed{\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{Hz};}$
- csak **torzítatlan** lehet: $\boxed{E(\hat{\boldsymbol{a}}) = \boldsymbol{H}E(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{a};}$
- **minimalizálja** a becslő **varianciáját**;
- csak az adatok **átlagára** és **varianciájára** van szükség.

A megfigyelési egyenlet legyen: $\boxed{\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Ua} + \boldsymbol{w}}$ Mivel: $E(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{Ua} \rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{HU} = \boldsymbol{I}}$ $\quad \boldsymbol{C}_{\hat{\boldsymbol{a}}} = \boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{z}))(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{z}))^T\boldsymbol{H}^T\right] = \boldsymbol{HCH}^T$

Minimalizálandó: $\boxed{var(\hat{a}_i) = \boldsymbol{h}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_i^T}$ a $\boxed{\boldsymbol{h}_i\boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}}$ feltétel betartása mellett.

A költségfüggvény: $J_i = \boldsymbol{h}_i\boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_i^T + \sum_{j=0}^{M-1}\lambda_j^{(i)}(\boldsymbol{h}_i\boldsymbol{u}_j - \delta_{ij})$, ahol $\boldsymbol{h}_i$ a $\boldsymbol{H}$ mátrix i-edik sora, $\boldsymbol{u}_j$ pedig az $\boldsymbol{U}$ mátrix j-edik oszlopa.

$$\frac{\partial J_i}{\partial \boldsymbol{h}_i^T} = 2\boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_i^T + \sum_{j=0}^{M-1}\lambda_j^{(i)}\boldsymbol{u}_j$$ Bevezetve: $\boldsymbol{\lambda}_i = \left[\lambda_0^{(i)}\ \lambda_1^{(i)}\ \dots\ \lambda_{M-1}^{(i)}\right]^T$ $\quad \frac{\partial J_i}{\partial \boldsymbol{h}_i^T} = 2\boldsymbol{C}\boldsymbol{h}_i^T + \boldsymbol{U}\boldsymbol{\lambda}_i = 0 \quad \boldsymbol{h}_i^T = -\frac{1}{2}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\lambda}_i$

Mivel $\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{h}_i^T = -\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{e}_i \rightarrow -\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}_i = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{e}_i$, $\quad \boldsymbol{h}_i^T = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{e}_i$, $\quad \boldsymbol{e}_i$ az i-edik egységvektor.

$\boxed{var(\hat{a}_i) = \boldsymbol{h}_i \boldsymbol{C} \boldsymbol{h}_i^T} = \boldsymbol{e}_i^T [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{C} \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{U} [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{e}_i \boxed{= \boldsymbol{e}_i^T [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{e}_i}$ $\boxed{\hat{\boldsymbol{a}}_i = \boldsymbol{h}_i \boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}_i^T [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{z}}$

Ismétlés

Vektoros formában $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}$, ahol w nulla várható értékű zaj, melynek kovariancia mátrixa $\boldsymbol{C}$,sűrűségfüggvénye tetszőleges, akkor az $\boldsymbol{a}$ paraméter **BLUE** becslője és a becslés kovariancia mátrixa: $\boxed{\hat{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{U})^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{z},}$ $\boxed{\boldsymbol{C}_{\hat{\boldsymbol{a}}} = (\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{U})^{-1}}$

$\boxed{var(\hat{a}_i) = [\boldsymbol{C}_{\hat{\boldsymbol{a}}}]_{ii} = [(\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{U})^{-1}]_{ii}}$ **Megjegyzés:** Ha a zaj Gauss eloszlású, akkor a BLUE egy MVU becslő.

2. Példa: DC szint zajban: $\boxed{z_k = A + w_k,}$ w_k sűrűségfüggvényét nem ismerjük, csak a varianciáját: $var(w_k) = \sigma_k^2$.

$U = [1,1,\dots,1]^T,$
$a = A.$

A kovariancia mátrix: $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_0^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_{N-1}^2} \end{bmatrix}$

$$\boxed{\hat{a} = (\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{U})^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{z} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_k^2}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k}{\sigma_k^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{C}_{\hat{a}} = (\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}^{-1} \boldsymbol{U})^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_k^2}\right)^{-1}}$$

3.3.5. Maximum Likelihood (ML) becslők

Probléma, hogy **MVU becslők** esetlegesen léteznek vagy nem találhatók meg. A BLUE becslő **lineáris modellekre** szorítkozik.

A **Maximum Likelihood (ML) becslők** determinisztikus modellel leírt paraméterek esetén is használhatók. Tulajdonságaik:

- mindig használhatók, ha a valószínűségsűrűség függvény (**csatornakarakterisztika**) ismert;
- nagy adatméret esetén **optimálisak** (aszimptotikusan hatásosak, elérik a CRLB értéket);
- számítástechnikailag komplexek, numerikus módszerek használatát igénylik.

Likelihood függvény: az $f(\boldsymbol{z};\boldsymbol{a})$ sűrűségfüggvény, ahol $\boldsymbol{a}$ változó (nem paraméter)

ML becslő: $\boldsymbol{a}$ azon értéke, amelyhez a likelihood függvény maximuma tartozik.

Eljárása: képezzük a $\ln f(\boldsymbol{z};\boldsymbol{a})$ log-likelihood függvényt, és deriváljuk $\boldsymbol{a}$ szerint, majd ezt nullával egyenlővé téve megoldjuk $\boldsymbol{a}$-ra.

$\boxed{\text{Eredményül az } \hat{\boldsymbol{a}}_{ML} \text{ becslőt kapjuk.}}$

Ismétlés

1. Példa: Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérése ismeretlen zaj variancia mellett: $\boxed{z_n = A + w_n.}$

Tegyük fel, hogy $A > 0$ és $\sigma^2 = A$. A valószínűség sűrűségfüggvény:

$$\boxed{f(z;A) = \frac{1}{(2\pi A)^{\frac{N}{2}}} exp\left[-\frac{1}{2A}\sum_{n=0}^{N-1}(z_n - A)^2\right].}$$

$$\boxed{\frac{\partial lnf(z;A)}{\partial A} = -\frac{N}{2A} + \frac{1}{A}\sum_{n=0}^{N-1}(z_n - A) + \frac{1}{2A^2}\sum_{n=0}^{N-1}(z_n - A)^2}$$

CRLB?

Létezik MVU becslő?

Az ML becslőt a derivált egyenlő nulla feltételből kapjuk: $\boxed{\hat{A}_{ML} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z_n^2 + \frac{1}{4}}}$

3.3.6. Legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslők

Nincs előzetes ismeretünk sem a mérendő paraméterről, sem a csatorna karakterisztikáról (a zajról).

Minden megfigyelést a következőképpen képzelünk el: $\boxed{z_k = s_k(\boldsymbol{a}) + e_k,}$ ahol e_k a mérési és a modellezési hiba.

A cél az LS költség minimalizálása: $\boxed{J(\boldsymbol{a}) = \sum_{k=0}^{N-1}\left(z_k - s_k(\boldsymbol{a})\right)^2.}$ Nincs valószínűségi feltételezés csak egy determinisztikus jelmodell.

Ha a megfigyelési egyenlet lineáris: $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}$, akkor explicit megoldás adható.

Feltételezzük, hogy az $\boldsymbol{a}$ paraméter $\hat{\boldsymbol{a}}$ értéket vesz fel, és felállítjuk a megfigyelés modelljét: $\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}}$.

$$\boxed{J(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{a}}) = (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}})^T(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}}) = \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}} - \hat{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z} + \hat{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z} - 2\hat{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z} + \hat{\boldsymbol{a}}^T\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}}}$$

melynek szélsőértékét (minimumát) keressük:

$$\boxed{\left.\frac{\partial J(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{a}})}{\partial \hat{\boldsymbol{a}}}\right|_{\hat{\boldsymbol{a}}=\hat{\boldsymbol{a}}_{LS}} = -2\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z} + 2\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}} = 0} \rightarrow \boxed{\hat{\boldsymbol{a}}_{LS} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z}}$$

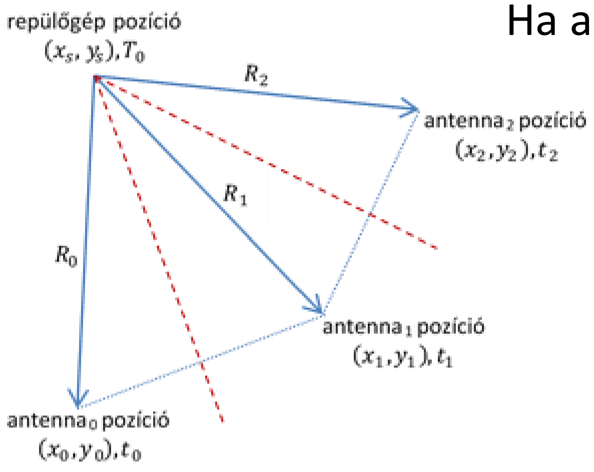
A minimális LS költség: $\boxed{J(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{a}}_{LS}) = \boldsymbol{z}^T(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}}_{LS})}$

Megjegyzések: Súlyozott négyzetes kritériumot is használhatunk, ha bevezetünk egy $\boldsymbol{Q}$ négyzetes súlyozó mátrixot, amivel:

$$\boxed{J(\boldsymbol{a},\hat{\boldsymbol{a}}) = (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}})^T\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}\hat{\boldsymbol{a}}),} \quad \boxed{\hat{\boldsymbol{a}}_{LS} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}.}$$

Ha $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}$, akkor formálisan a Gauss-Markov becslőt kapjuk, tehát a GM becslő egy súlyozott legkisebb négyzetes hibájú becslő, ahol a súlyozást a megfigyelési zaj kovariancia mátrixának inverze adja.

Példa: Lokalizáció, célkövetés Az **ismeretlen pozíciójú** repülőgép által sugárzott jel vétele több, **ismert pozíciójú antennával**.



Ha a kisugárzott jel vételi időpontjaira fennáll, hogy: $t_1 - t_0 = 0, t_2 - t_1 = 0,$ akkor $R_0 = R_1 = R_2,$ és ekkor a repülőgép pozíciót **az antenna pozíciókat** összekötő szakaszok **felező merőlegeseinek** metszés-pontja adja. Ha a különbségek nem nullák, akkor a felező merőlegesek helyett **hiperbolák metszés-pontja** adja az ismeretlen pozíciót. A **k-adik** antenna távolsága

$$\boxed{R_k(x_s, y_s) = \sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2}}$$

A mérés modellje: $$\boxed{t_k = T_0 + \frac{R_k}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1,}$$

ahol c a terjedési sebesség, w_k nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú zaj, mintái korrelálatlanok. A zaj sűrűségfüggvényét nem ismerjük. → **BLUE?** Keresett: $\boxed{\boldsymbol{a} = [x_s \quad y_s]^T.}$

Mivel R_k a paramétervektor nemlineáris függvénye → $\boxed{\text{megpróbálunk linearizálni.}}$ Ehhez feltételezzük, hogy – például az előző mérés eredményeként – rendelkezésre állnak egy, **az ismeretlenhez közeleső pozíció** x_n, y_n és $R_{nk}, k = 0,1,\cdots,N-1,$ adatai. Ennek felhasználásával Taylor sorfejtés:

$$\boxed{R_k \cong R_{nk} + \left.\frac{\partial R_k}{\partial x_s}\right|_{x_s = x_n} \delta x_s + \left.\frac{\partial R_k}{\partial y_s}\right|_{y_s = y_n} \delta y_s = R_{nk} + \underbrace{\frac{x_n - x_k}{R_{nk}}}_{cos(\alpha_k)} \delta x_s + \underbrace{\frac{y_n - y_k}{R_{nk}}}_{sin(\alpha_k)} \delta y_s,}$$

Ezt behelyettesítve t_k kifejezésébe, és bevezetve új paramétervektorként:

$\boxed{\boldsymbol{a}' = [\delta x_s \quad \delta y_s]^T}$ → **lineáris összefüggés!**

$$\boxed{t_k = T_0 + \frac{R_{nk} + cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.}$$

Itt R_{nk}/c minden antenna pozícióban **ismert konstans**, ezért bevezethetjük:

$$\boxed{\tau_k = t_k - \frac{R_{nk}}{c} = T_0 + \frac{cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.}$$

Itt a T_0 a repülőgéptől megszerezhető információ, aminek használhatósága azon múlik, hogy az egyes antennáknál működő órák mennyire szinkronizáltak.

Egy további transzformációval azonban T_0 **kiiktatható:** ez **az érkezési idők különbsége** (time difference of arrivals: TDOA) **módszer.**

$$\boxed{z_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{[cos(\alpha_k) - cos(\alpha_{k-1})]\delta x_s + [sin(\alpha_k) - sin(\alpha_{k-1})]\delta y_s}{c} + [w_k - w_{k-1}], k = 1,\cdots,N-1.}$$

$$z_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{[cos(\alpha_k)-cos(\alpha_{k-1})]\delta x_s+[sin(\alpha_k)-sin(\alpha_{k-1})]\delta y_s}{c} + [w_k - w_{k-1}], k = 1,\cdots,N-1.$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} cos(\alpha_1)-cos(\alpha_0) & sin(\alpha_1)-sin(\alpha_0) \\ \vdots & \vdots \\ cos(\alpha_{N-1})-cos(\alpha_{N-2}) & sin(\alpha_{N-1})-sin(\alpha_{N-2}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_s \\ \delta y_s\end{bmatrix} + \boldsymbol{w'} = \boldsymbol{U a'} + \boldsymbol{w'},$$

Ez már ismert forma! Jöhet a **BLUE**!

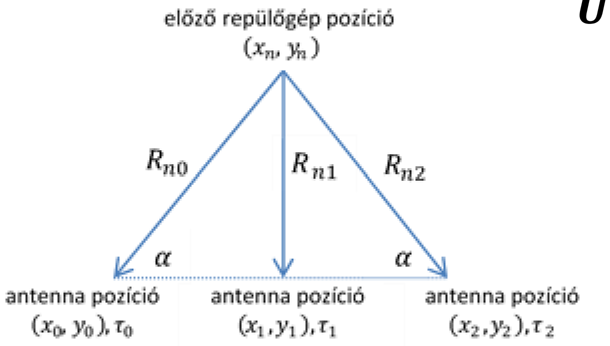
Ehhez:

$$\boldsymbol{w'} = \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_{N-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1}\end{bmatrix} = \boldsymbol{Aw}, \quad \boldsymbol{C_{w'}} = E[\boldsymbol{Aww'A^T}] = \sigma_w^2[\boldsymbol{AA^T}].$$

$$\boldsymbol{\hat{a}'} = [\boldsymbol{U^T}[\boldsymbol{AA^T}]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\, \boldsymbol{U^T}[\boldsymbol{AA^T}]^{-1}\boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{C_{\hat{a}'}} = \sigma_w^2[\boldsymbol{U^T}[\boldsymbol{AA^T}]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}.$$

Egyszerű numerikus példa:



$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} -cos\alpha & 1-sin\alpha \\ -cos\alpha & sin\alpha - 1\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{AA^T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2\end{bmatrix} \quad [\boldsymbol{AA^T}]^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\hat{a}'} = \begin{bmatrix}\widehat{\delta x_s} \\ \widehat{\delta y_s}\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} \frac{-1}{2cos\alpha} & \frac{-1}{2cos\alpha} \\ \frac{1}{2(1-sin\alpha)} & \frac{-1}{2(1-sin\alpha)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C_{\hat{a}'}} = \sigma_w^2[\boldsymbol{U^T}[\boldsymbol{AA^T}]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1} = \sigma_w^2 c^2\begin{bmatrix} \frac{1}{2cos^2\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{3/2}{(1-sin\alpha)^2}\end{bmatrix}$$

Ha z_1 és z_2 értéke azonos és negatív, akkor csak vízszintes, pozitív előjelű elmozdulás lesz.

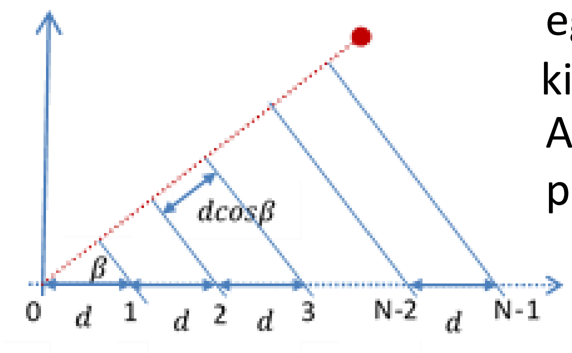
Az ábra szerinti elrendezésben, ha a repülőgép távolsága a középső antennától $\sim 30\ km$, és $c = 300\ 000\ km/s$, akkor a terjedési idő: $\sim 100 \mu s$, azaz ilyen nagyságrendű időtartamok különbségének mérését kell pontosan megoldani.

Ha a terjedési idő megfigyelésének szórása $1\mu s$ és $\alpha = 30$ fok, akkor $\sqrt{var[\delta x_s]} \sim \sqrt{6} * 100m$, $\sqrt{var[\delta y_s]} \sim 3\sqrt{6} * 100m$.

A megadott távolság és szögadat mellett a szomszédos antenna pozíciók egymástól mért távolsága $\sim \sqrt{3} * 30\ km$.

Ha α kicsi, akkor jobb eredményt kapunk.

Példa: Irányszög mérése A feladat β **irányszög mérése** az ismeretlen pozícióból kibocsátott **szinuszos hullámforma** egymástól egyforma távolságra elhelyezett N **vevő** segítségével. Ha a forrás **kellően messze van**, akkor a kibocsátott hullámok **síkhullámoknak tekinthetők**, és a haladásuk két antenna között azonos idejű. A hullám a $(k-1)$-edik antenna pozícióban $dcos\beta/c$ idővel **le van maradva** az k-adik antenna pozícióhoz képest. A kibocsátott jel: $Acos(2\pi f_0 t+\varphi)$, ami az k-adik antenna pozícióhoz



$$t_k = t_0 - k\frac{dcos\beta}{c}, k=0,1,\dots,N-1$$

időpontban jut el, ahol t_0 a **nulladik pozícióban** lévő antennához rendelt terjedési/késleltetési idő.

A k-adik pozíciójú antenna által vett jel: $s_k(t) = Acos(2\pi f_0(t-t_k)+\varphi) = Acos\left(2\pi f_0\frac{dcos\beta}{c}k + 2\pi f_0(t-t_0)+\varphi\right)$

Ha egy t_s időpillanatban ebből a jelből **minden antenna pozícióban** mintát veszünk: **egy térben haladó szinuszjel** mintáit kapjuk.

Ennek (a mintavételi frekvenciára relatív) frekvenciája és fázisa:

$$f_s = f_0\frac{dcos\beta}{c}, \qquad \varphi' = 2\pi f_0(t_s-t_0)+\varphi.$$

A megfigyelési egyenlet:

$$z_k = s_k(t_s) + w_k, \qquad k=0,1,\dots,N-1$$

Gauss eloszlású, fehér zaj

Ebből becsüljük az $\boldsymbol{a} = [A \quad f_s \quad \varphi']^T$ paramétervektort. A keresett β szöget **származtatott jellemzőként** állítjuk elő.

A származtatott jellemző:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} A \\ \beta \\ \varphi' \end{bmatrix} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{g}\left(\begin{bmatrix} A \\ f_s \\ \varphi' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A \\ arccos\left(\frac{f_s c}{f_0 d}\right) \\ \varphi' \end{bmatrix},$$

Elvégezve a parmétervektor szerinti deriválást:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial arccos\left(\frac{f_s c}{f_0 d}\right)}{\partial f_s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{f_0 d sin\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

CRLB β becslésének varianciájára:

$$\left[\boldsymbol{C}_{\hat{\alpha}} - \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{a})\left[\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right]^{\boldsymbol{T}}\right]_{11} \geq 0.$$

$$var[\hat{\beta}] \geq \frac{c^2}{f_0^2 d^2 sin^2\beta} CRLB\{var[f_s]\} = \frac{c^2}{f_0^2 d^2 sin^2\beta}\frac{6\sigma_w^2}{\pi^2 A^2 N(N^2-1)},$$

$CRLB\{var[f_s]\}$ jön!

vezessük be a hullámhossz (λ), az antenna-sor kiterjedése (L) és a jel/zaj viszony (η) kifejezését:

$$\lambda = \frac{c}{f_0}, L=(N-1)d, \eta = \frac{A^2}{2\sigma_w^2}$$

$$var[\hat{\beta}] \geq \frac{3}{\pi^2\eta\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 N\left(\frac{N+1}{N-1}\right)sin^2\beta}$$

$$\boxed{var[\hat{\beta}] \geq \frac{3}{\pi^2\eta\left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 N\left(\frac{N+1}{N-1}\right)\sin^2\beta}}$$

Megjegyzések: A mintavételi tétel értelmében $0 \leq f_s < \frac{1}{2}$, ezért a $d < \lambda$ feltétel betartandó. Ha $\beta = 0$, akkor **a mérés lehetetlen**. A **pontosság nő**, ha közeledünk $\beta = 90^o$-hoz.

Ilyenkor minden antenna nagyon jó közelítéssel azonos távolságra van a (távoli) forrástól, és ugyanazt a jelértéket veszi.

Ha például $f_0 = 1MHz$, akkor $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ feltételezésével $\lambda = 300m$. Legyen $\beta = 90^o$, $d = \frac{\lambda}{2}$, $\eta = 0dB$ és $N = 10$! Ekkor

$$\boxed{var[\hat{\beta}] \geq \frac{3}{\pi^2 1\left(\frac{9}{2}\right)^2 10\left(\frac{11}{9}\right)1} = 0{,}0012281, \sqrt{var[\hat{\beta}]} \geq 0{,}035\, rad \cong 2^o,}$$

A szögmérés 2^o-os szórásúnál nem tud pontosabb lenni. Javítani η javításával, ill. N növelésével lehet.

Ha az antennákat egy repülőgép szárnyán szeretnénk elhelyezni, akkor **a jelfrekvenciát** jelentős mértékben **növelnünk kell**! Egyébként változatlan adatok mellett $f_0 = 500MHz$ esetén $d = 0{,}3\ m$ adódik.

CRLB szinusz-jel frekvenciájának becsléséhez: A megfigyelés modellje:

$$\boxed{z_k = A\cos(2\pi f_0 k + \varphi) + w_k = A\cos(\alpha_k) + w_k = s_k(A, f_0, \varphi) + w_k, k = 0,1,\dots,N-1,}$$

$$\boxed{var(\hat{f}_0) \geq \frac{\sigma_w^2}{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\partial s_k(f_0)}{\partial f_0}\right)^2}}$$

$$var(\hat{f}_0) \geq \frac{\sigma_w^2}{\sum_{k=0}^{N-1}(-A\sin(\alpha_k)2\pi k)^2} = \frac{\sigma_w^2}{A^2 4\pi^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sin^2(\alpha_k)} \approx \frac{\sigma_w^2}{A^2 2\pi^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^2}$$

Mivel $\sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$, ezért jó közelítéssel

$$\boxed{var(\hat{f}_0) \geq \frac{3\sigma_w^2}{A^2\pi^2 N(N-1)(2N-1)},}$$

ami akkor használható, ha A és φ ismert.

$$\boxed{var(\hat{f}_0) \geq \frac{6\sigma_w^2}{\pi^2 A^2 N(N^2-1)},}$$

ami akkor használható, amikor a három paramétert együtt mérjük.

Megjegyzés: A $\sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$ összefüggés teljes indukcióval bizonyítható: $N = 1{,}2$ behelyettesítéssel, majd N helyére $N + 1$-et írva az összefüggés helyes eredményt ad.

Méréselmélet 1. zárthelyi **2020. március 24.**

1. Zajos megfigyelés(ek)re alapozva eldöntendő, hogy a megfigyelési csatornában az $a_0 = 1$ vagy egy attól eltérő a_1 jelszint van-e jelen? H_0 jelöli azt a hipotézist, hogy az a_0 jelszint van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_0 = 0.7$. H_1 jelöli azt a hipotézist, hogy az a_1 jelszint van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_1 = 0.3$. A költségek: $C_{10} = C_{01} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 1$. A feltételes valószínűségsűrűség függvények:

$$f\{z|H_0\} = \begin{cases} \frac{1-cos(\pi z)}{2}, & 0 \le z \le 2 \\ 0\ egyébként \end{cases}$$

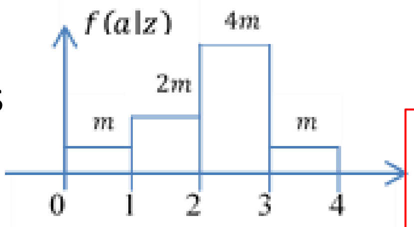
$$f\{z|H_1\} = \begin{cases} \frac{z}{2}, & 0 \le z \le 2 \\ 0\ egyébként \end{cases}$$

Az elsőként megfigyelt érték $z_0 = 1.6$.
Hogyan dönt (max. 3 pont)?
Elvégzünk egy második mérést is, aminek eredménye $z_1 = 1.8$.
Erre a mérésre alapozva hogyan dönt (max. 1 pont)?
Hogyan dönt, ha mindkét megfigyelt értéket figyelembe veszi (max. 1 pont)?

A döntéseink rendre: H_0, H_1, H_1

Megoldás:
A megfigyelt értéket behelyettesítjük a likelihood arány függvénybe, és ha $\Lambda(z) > \eta$, akkor a döntés H_1, ha $\Lambda(z) < \eta$, akkor a döntés a H_0.
$$\eta = \frac{0.7(10-1)}{0.3(10-1)} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \cong 2{,}33,$$
$$\Lambda(z_0) = \frac{f(z_0|H_1)}{f(z_0|H_0)} \cong \frac{0.8}{0.345} = 2.32 < \eta,$$
$$\Lambda(z_1) = \frac{f(z_1|H_1)}{f(z_1|H_0)} \cong \frac{0.9}{0.095} \cong 9.47 > \eta,$$
$$\Lambda(z_0, z_1) = \frac{f(z_0|H_1)}{f(z_0|H_0)}\frac{f(z_1|H_1)}{f(z_1|H_0)} \cong \frac{0.8}{0.345}\frac{0.9}{0.095} \cong \frac{0.72}{0.033} \cong 21{,}8 > \eta$$
$$E[a_1] = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f\{z|H_1\}dz = \int_0^2 \frac{z^2}{2}dz = \left.\frac{z^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

2. Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 2 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 1 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) számértékét! Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő varianciáját (max. 3 pont)?



Megoldás: $m = \frac{1}{8}$ mert $m + 2m + 4m + m = 1$,

$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a f(a|z)da = \int_0^1 \frac{a}{8}da + \int_1^2 \frac{a}{4}da + \int_2^3 \frac{a}{2}da + \int_3^4 \frac{a}{8}da =$$
$$\left.\frac{a^2}{16}\right]_0^1 + \left.\frac{a^2}{8}\right]_1^2 + \left.\frac{a^2}{4}\right]_2^3 + \left.\frac{a^2}{16}\right]_3^4 = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8},$$

$\hat{a}_{ABS}$: $m + 2m + 4mx = 4m(1-x) + m \to x = \frac{1}{4}$, $\hat{a}_{ABS} = 2\frac{1}{4}$

$\hat{a}_{MAP} = 2\frac{1}{2}$

$$\boxed{var(\hat{a}_{MS}) = E[a^2] - \hat{a}_{MS}^{\ 2}} = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f(a|z)da - \hat{a}_{MS}^{\ 2} = \int_0^1 a^2 \frac{1}{8} da + \int_1^2 a^2 \frac{1}{4} da + \int_2^3 a^2 \frac{1}{2} da + \int_3^4 a^2 \frac{1}{8} da - \hat{a}_{MS}^{\ 2} =$$

$$= \frac{a^3}{24}\Big]_0^1 + \frac{a^3}{12}\Big]_1^2 + \frac{a^3}{6}\Big]_2^3 + \frac{a^3}{24}\Big]_3^4 - \hat{a}_{MS}^{\ 2} \quad \boxed{= 5\frac{1}{3} - \left(2\frac{1}{8}\right)^2 = 0{,}8177}$$

3. Mérendő egy két komponens összegéből álló jel komponenseinek ismeretlen A és B amplitúdója N megfigyelésre alapozva: $z(n) = Acos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + Bcos\left(\frac{4\pi}{N}n\right) + w(n), n = 0,1, \dots N-1$. Az ismeretlen A és B paraméterek eloszlása nem ismert. A w_k megfigyelési zaj nulla várható értékű, Gauss eloszlású, színes zaj, kovariancia mátrixa C_w.
Vezesse le a paraméter legjobb maximum likelihood (ML) becslésének ($\hat{a}_{ML}, C_{\hat{a}_{ML}}$) összefüggéseit ($\hat{\boldsymbol{a}}_{ML} = [\hat{A}_{ML} \quad \hat{B}_{ML}]^T$) (max. 3 pont)!

Határozza meg $C_{\hat{a}_{ML}}$számértékét $\sigma_w = 0.1V, \rho = 0.5$ és $C_w = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}$ mellett (max. 3 pont)!

Megoldás:

Az együttes sűrűségfüggvény logaritmusának az $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ paramétertől függő része: $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Ua})^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Ua})$

Ennek deriváltja $\boldsymbol{a}$ szerint: $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}A)^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Ua})\right] = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}a) = 0,$ ahonnan $\boxed{\hat{\boldsymbol{a}}_{ML} = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{z}.}$

A becslő kovariancia mátrixa:

$$\boldsymbol{C}_{\hat{A}_{ML}} = E\left[\left(\hat{\boldsymbol{a}}_{ML} - E(\hat{\boldsymbol{a}}_{ML})\right)\left(\hat{\boldsymbol{a}}_{ML} - E(\hat{\boldsymbol{a}}_{ML})\right)^T\right] = E[\{[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Ua})\}\{[\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Ua})\}^T] =$$

$$= [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \ \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} E\{(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Ua})(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Ua})^T\} \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U} [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1}$$

ahol felhasználtuk, hogy $E(\hat{\boldsymbol{a}}_{ML}) = [\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{U}]^{-1} \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{C}_w^{-1} \boldsymbol{Ua},$ valamint, hogy definíciója szerint $\boldsymbol{E}\{(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Ua})(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Ua})^T\} = \boldsymbol{C}_w$

A numerikus értékek meghatározásához: ahol most $N=3$. inverze:

$$\boldsymbol{U}^T=\begin{bmatrix}1 & cos\frac{2\pi}{N} & \cdots & cos\frac{2\pi}{N}(N-1)\\ 1 & cos\frac{4\pi}{N} & \cdots & cos\frac{4\pi}{N}(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -0.5 & -0.5\\ 1 & -0.5 & -0.5\end{bmatrix}\quad C_w=\sigma_w^2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \rho\\ 0 & \rho & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_w^{-1}=\frac{1}{\sigma_w^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{1-\rho^2} & -\frac{\rho}{1-\rho^2}\\ 0 & -\frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2}\end{bmatrix}=\frac{100}{V^2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4/3 & -2/3\\ 0 & -2/3 & 4/3\end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]=\frac{100}{V^2}\begin{bmatrix}1 & -0.5 & -0.5\\ 1 & -0.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4/3 & -2/3\\ 0 & -2/3 & 4/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -0.5 & -0.5\\ -0.5 & -0.5\end{bmatrix}=\frac{400}{3V^2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

Ezt a mátrixot most itt invertálni kellene, de ez szinguláris!

Hogyan lehetséges ez?

Ennek oka, hogy **a méréstervezés hibás**, és ennek következtében a $\boldsymbol{U}$ mátrix két oszlopa egymással megegyezik.

A hiba ott van, hogy a $Bcos\left(\frac{4\pi}{N}n\right)$ komponensre $N=3$ esetén **nem teljesül a mintavételi tétel**, és ezért nem kapunk megfelelő információt erről a komponensről, úgy tűnik, mintha az is $cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ hullámformájú komponens lenne.

Így aztán értelmezhetetlen a mért jelet két paraméterrel jellemezni!

4. A vizsgált környezetről feltételezzük, hogy jellemezhető $y(t)=a_1u(t)+a_2u^2(t)+w(t)$ időfüggvénnyel. Elvégzünk N mérést.
Határozza meg az időfüggvény paramétereinek legkisebb négyzetes hibájú $\hat{a}_{LS}$ becslőjét (max. 3 pont)!
Határozza meg a becslő közelítő számértékét arra az esetre, amikor adott $E\{u^2(t)\}=1$, $E\{u^3(t)\}=2$, $E\{u^4(t)\}=5$, $E\{u^2(t)y(t)\}=3$,$E\{u(t)y(t)\}=1$ (max. 2 pont)!

Megoldás:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{a}}_{LS}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z},}\quad [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2 & \sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\\ \sum_{n=0}^{N-1}u_n^3 & \sum_{n=0}^{N-1}u_n^4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}\sum_{n=0}^{N-1}u_ny_n\\ \sum_{n=0}^{N-1}u_n^2y_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_0 & u_0^2\\ u_1 & u_1^2\\ \vdots & \vdots\\ u_{N-1} & u_{N-1}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}w_0\\ w_1\\ \vdots\\ w_{N-1}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\hat{a}_0\\ \hat{a}_1\end{bmatrix}=\frac{1}{\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^4\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\right)^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^4 & -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\\ -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3 & \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_ny_n\\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2y_n\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\hat{a}_0\\ \hat{a}_1\end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^4\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\right)^2}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^4\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n y_n\right)-\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2 y_n\right)\\ -\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^3\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n y_n\right)+\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}u_n^2 y_n\right)\end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

5. Mutassa be, hogy mire szolgál a Cramer-Rao alsó korlát (CRLB): skalár paraméter esetére adja meg (1) alkalmazásának feltételeit (max. 2 pont); (2) számításának módját (max. 2 pont); (3) az alsó korlát elérésének feltételét (max. 2 pont)! Vezesse le a CRLB számítás explicit összefüggését arra az esetre, amikor a megfigyeléseink a becsülendő a paramétertől függő jel zajos mintái, és a zajról feltételezhetjük, hogy Gauss eloszlású fehér zaj σ_w^2 varianciával (max. 3 pont)!

Megoldás: **Cramer-Rao alsó korlát** (Cramer-Rao Lower Bound: CRLB, skalár paraméter esete a jegyzet alapján)

Bármely torzítatlan becslő esetében a becslés varianciájára alsó korlátot ad: $\boxed{var(\hat{a}) \geq CRLB(a)}$

A CRLB *a* függvénye. Megmondja mi az elérhető legkisebb variancia. Ha egy becslővel elérjük ezt a varianciát, akkor a becslőt hatásosnak nevezzük. Maga a CRLB elvezethet az MVU becslőhöz. A CRLB-re vonatkozó állítás:

Tételezzük fel, hogy a mérési adatok valószínűség sűrűségfüggvényére teljesül minden *a* esetében: $\boxed{E\left[\frac{\partial ln f(z;a)}{\partial a}\right] = 0}$

Ez az ún. regularitási feltétel, amihez az integrálás és a deriválás felcserélhetősége kötődik. Képezve ugyanis a várható értéket, majd az integrálást és a deriválást felcserélve:

$$E\left[\frac{\partial ln f(z;a)}{\partial a}\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial ln f(z;a)}{\partial a} f(z;a)dz = \frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty} f(z;a)dz = \frac{\partial}{\partial a}1 = 0$$

Ekkor bármely torzítatlan becslőre igaz, hogy: $\boxed{var(\hat{a}) \geq \left[-E\left(\frac{\partial^2 ln f(z;a)}{\partial a^2}\right)\right]^{-1}}$

Egy olyan torzítatlan becslő, amelyik eléri a Cramer-Rao alsó korlátot akkor és csak akkor található, ha:

$$\boxed{\frac{\partial ln f(z;a)}{\partial a} = I(a)(g(z) - a)}$$

struktúrájú, ahol $g(z)$ és $I(a)$ alkalmas függvények.
Ilyenkor a becslő $\hat{a} = g(z)$, és a variancia minimum $\frac{1}{I(a)}$.

Ismeretlen a jelparaméter varianciájának alsó korlátja: A megfigyelt értékek egy a-tól függő jel zajos mintái:
$x_k = s(k;a) + w_k = s_k(a) + w_k, k = 0,1,\dots,N-1;$ $\{w_k\}$ Gauss eloszlású, fehér zaj ismert σ_w^2 varianciával.

$$f(z;a)=\frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k-s_k(a))^2}\quad \frac{\partial \ln f(z;a)}{\partial a}=\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_k-s_k(a))\frac{\partial s_k(a)}{\partial a}\quad \frac{\partial^2 \ln f(z;a)}{\partial a^2}=\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[(x_k-s_k(a))\frac{\partial^2 s_k(a)}{\partial a^2}-\left[\frac{\partial s_k(a)}{\partial a}\right]^2\right]$$

Képezve a várható értéket: $\boxed{I(a)=-E\left[\frac{\partial^2 \ln f(z;a)}{\partial a^2}\right]=\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\partial s_n(a)}{\partial a}\right]^2}$ Ezzel a becsült paraméter varianciájának alsó korlátja: $\boxed{var(\hat{a})\geq\frac{\sigma_w^2}{\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{\partial s_n(a)}{\partial a}\right]^2}}$

6. Távolságot mérünk radarral: $R=\tau\frac{c}{2}$, ahol τ a reflektálódott elektromágneses hullám terjedési ideje, c a fénysebesség. A terjedési idő megfigyelésére van lehetőségünk, összesen négy megfigyelést végzünk. A megfigyelési egyenlet: $z_k=\tau_k+w_k$, ahol w_k nulla várható értékű, $C_w=\sigma_w^2 I$ kovariancia mátrixú, Gauss eloszlású zaj.

Válasszon olyan mérési módszert, amely minimális varianciájú, torzítatlan becslést eredményez!

Vezesse le a becslés varianciájának CRLB értékét, és fejezze ki a becslőt és annak szórását (max. 4 pont)!

Adja meg a numerikus értékeket is, ha $z_0=95\mu s, z_1=105\mu s, z_2=97\mu s, z_3=103\mu s, \sigma_w=4\mu s$ (max. 1 pont)!

Ezt követően határozza meg a távolság értékét és szórását ($c=3\cdot 10^5\frac{km}{s}$) (max. 1 pont)!

Megoldás: Az együttes sűrűségfüggvény logaritmusának a τ paramétertől függő része: $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)$

Ennek deriváltja τ szerint: $\frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)\right]=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)$, ahonnan $\boxed{\hat{\tau}_{ML}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z},}$

illetve

$$\frac{\partial \ln f(z,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)\right]=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\tau)=\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}([\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z}-\tau)=\boxed{I(\tau)(g(z)-\tau)}$$

azaz a becslő varianciája: $\boxed{var(\hat{\tau}_{ML})=I^{-1}(\tau)=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}}$ A numerikus értékek érdekében:

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}=\frac{1}{\sigma_w^2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{4}{\sigma_w^2},\quad \boxed{var(\hat{\tau}_{ML})=I^{-1}(\tau)=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}=\frac{\sigma_w^2}{4},\hat{\tau}_{ML}=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}_w^{-1}\boldsymbol{z}=\frac{z_0+z_1+z_3+z_4}{4}}$$

$$\boxed{\hat{\tau}_{ML}=100\mu s,\sqrt{var(\hat{\tau}_{ML})}=\sqrt{4}=2\mu s}$$

$$\boxed{\hat{R}_{ML}=\hat{\tau}_{ML}\frac{c}{2}=10^{-4}\frac{3\cdot 10^5}{2}km=15km,}\quad \boxed{\sqrt{var(\hat{R}_{ML})}=\frac{c}{2}\sqrt{var(\hat{\tau}_{ML})}=\frac{3\cdot 10^5}{2}2\cdot 10^{-6}\approx 300m}$$