

Méréselmélet

7. fejezet: Modellalapú jelfeldolgozás (folyt.)

2022. május 4.

A 2. házi feladat megbeszélése:

1.1. Állítson elő $u(n), n = 0, 1, \dots$ diszkrét értéksorozatot multiszinusz generátor „segítségével”, mégpedig úgy, hogy a diszkrét jel $M = 100$ harmonikus komponensből álljon, az egyes harmonikus komponensek amplitúdója egységnyi, kezdőfázisa véletlen, és a sorozat várható értéke pedig 1 legyen! A multiszinusz generátort a jegyzet 46. ábrának megfelelően készítse el! Ügyeljen arra, hogy a generált jel a vizsgált frekvenciatartomány egészében megfelelő gerjesztést adjon (max. 3 pont)!

Célszerűen $N = 2M + 1$, a harmonikusok $\frac{mf_m}{N}$ frekvenciájúak, ahol $m = 1, 2, \dots, M$. $x_0 = 1$. Az összesen M harmonikus mindegyikének fázisa $[0, 2\pi]$ vagy $[-\pi, \pi]$ tartományba eső véletlen szám. A generált jel valós (képzetes része nulla)!

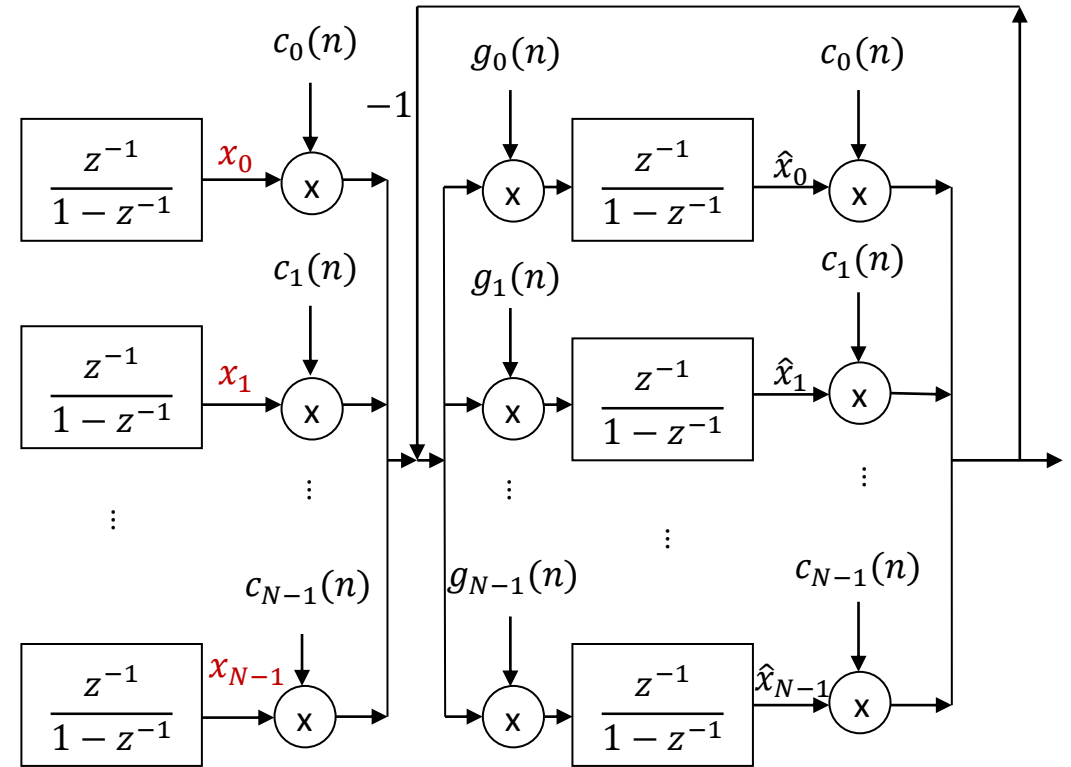
$$c_m(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}mn}, g_m(n) = \frac{1}{N} e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}, m = 0, 1, \dots, N-1, n = 0, 1, \dots,$$

$$x_0 = 1, x_m = x_{N-m}^* = \frac{1}{2} e^{j\varphi_m}, m = 1, \dots, M$$

Vizsgálja meg, hogy hogyan alakul a generált jel csúcsértéke, és hasonlítsa össze azzal az esettel, amikor a kezdőfázisok rendre nullák (max. 2 pont)!

1.2. Készítsen az előző pont szerinti generátor jelének, továbbá az ezzel a jellel gerjesztett rendszerek kimeneti jelének analizálására alkalmas rekurzív multiszinusz analizátort, ugyancsak a 46. ábrán látható elrendezést követve, amely a bemenetére kapcsolt jeltől képes kiszámítani az abban levő harmonikus komponensek amplitúdóját és fázisát! Az 1.1. pont szerinti jel és az analizátor által rekonstruált jel különbségét ábrázolva mutassa be, hogy a generátor-analizátor pár megfelelően működik (max. 5 pont)!

Ehhez működtesse az analizátort, és nézze meg, hogy mit ad becslőként! A helyes működést jól illusztrálja, ha az analizátort $2N$ lépésben futtatja, és kirajzolja a különbségi jel alakulását a vizsgált tartományban!



1.3. Ez az $u(n)$ sorozat legyen a bemenőjele a modellezendő/adaptálandó rendszernek, melynek átviteli függvénye (vagylagosan)

$$A: \frac{(1-r)z^{-1}}{1+rz^{-4}}, B: \frac{(1-r)z^{-1}}{1-rz^{-4}}, C: \frac{(1-r)z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-rz^{-4})}, D: \frac{(1-r)z^{-1}(1+z^{-2})}{2(1-rz^{-4})}, E: \frac{(1-r)z^{-1}(1-z^{-1})}{2(1-rz^{-4})}, F: \frac{(1-r)z^{-1}(1-z^{-2})}{2(1-rz^{-4})} \quad (1)$$

A multiszinusz analízátorral mérje meg a modellezendő/adaptálandó rendszer kimenőjelét, és a multiszinusz frekvenciákon – felhasználva a gerjesztés amplitúdójának és fázisának értékét – határozza meg az átvitel abszolút értékét és fázisát (max. 4 pont)!

Ennél a feladatnál minden harmonikus frekvencián meg tudja határozni az átviteli függvény abszolút értékét és fázisát. Az analízátort megfelelően működtetve - N lépés után - a megfigyelő és a generátor komplex súlytényezőinek hányadosa ugyanezt az átvitelt kell produkálja! Itt figyeljen arra, hogy csak az állandósult állapot elérése után mérjen, és a fázist megfelelően értelmezze!

1.4. Az adaptálandó rendszert lineáris kombinátorral igyekszünk modellezni. Ennek kimenőjele

$$\hat{y}(n) = w_1 u(n-1) + w_2 u(n-2) + \dots + w_P u(n-P). \quad (2)$$

Juttassa el a modellezendő/adaptálandó rendszert az állandósult állapotáig, majd ezt követően végezzen megfigyeléseket, és a rekurzív LS módszer alkalmazásával határozza meg (2) súlyozó együtthatóit! Hány lépés után ítélte úgy, hogy a rendszer kimenőjele elérte az állandósult állapotát? Hány lépés után állította le a paraméterek LS becslését? (A lineáris kombinátor súlytényezőiből alkotott állóvektort W , a regressziós vektort X jelölje!) (max. 6 pont)

Az állandósult állapot eléréséhez szükséges „időt”/lépésszámot a vizsgált szűrő súlyfüggvényének vizsgálatával határozhatjuk meg. Az állandósult állapotot akkor érjük el, amikor a súlyfüggvény lecsengett. Ennek mértéke az Önök (kísérlet)tervezői döntése! Hasonló megfontolás kell a rekurzív LS becslés leállításához.

1.5. Fejtsse mértani sorba az (1) átviteli függvényt! Vesse össze a sorfejtett alak és a lineáris kombinátor együtthatóit az (1) átviteli függvényű rendszer súlyfüggvényével! (max. 2 pont)!

Itt a sorfejtés célszerűen a nevezőpolinom alakjából adódóan a mértani sor szerinti. Ennek a súlyfüggvényt kell kiadnia. Az LS becslés akkor jó, ha a P súlytényező és a súlyfüggvény minták hasonló értékek.

2. Alkalmazza az 1.4. feladat esetére az LMS eljárást: $W(n+1) = W(n) + 2\mu e(n)X(n)$.

A paraméterek nulla kezdeti értékéből indulva futtassa az algoritmust a (közelítő) megoldás megtalálásáig. Ezt követően r értékét csökkentse q -val, majd folytassa a futtatást az új megoldás megtalálásáig. A bátorsági/konvergencia tényezőt Ön válassza meg! Indokolja választását! Rajzolja ki az együtthatók alakulását az iterációs lépések függvényében (konvergencia diagram)! Beadandó a program kommentezett listája és az együtthatók konvergencia diagramja (max. 5 pont)!

A konvergencia diagramokat úgy készítse el, hogy azokon a paraméterek állandósult állapota egyértelmű, értékük leolvasható legyen. A paraméter változtatást az előző beállítás végértékének elérését követően végezze, és tegye egyértelműen láthatóvá, hogy a paraméterek mely értékről mely értékre váltanak.

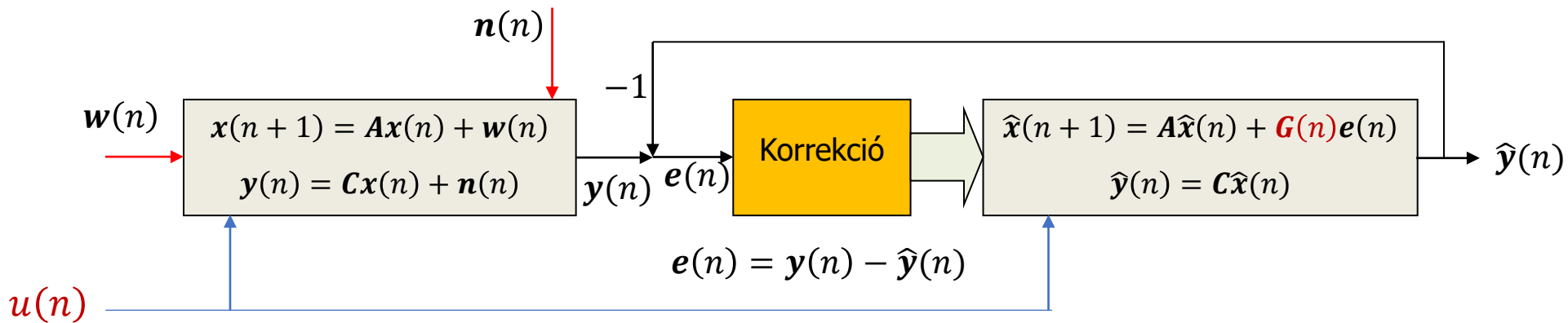
3. Végezze el a modellillesztést mindkét átviteli függvényre (r és $r - q$ esetek) az

$$\hat{y}(n) = a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2) + a_3 u(n-3) - b_1 \hat{y}(n-1) - b_2 \hat{y}(n-2) - b_3 \hat{y}(n-3) - b_4 \hat{y}(n-4)$$

alakú, végtelen impulzusválaszú modell alkalmazásával is! Az illesztés során a véges impulzusválaszú problémára visszavezetés módszerét (*equation-error formulation*) alkalmazza! Beadandó a program kommentezett listája és az együtthatók konvergencia diagramja (max. 5 pont)!

Itt lehetősége van a paraméterek pontos értékével való összehasonlításra: tegye meg!

4. Készítsen az (1) átviteli függvényű rendszerhez állapotváltozós leírást! Alkossa meg a rendszer állapotainak becslésére alkalmas Kalman prediktor programját! A megfigyelési zajt és a rendszer zajt úgy generálja, hogy azok Gauss eloszlású fehér zajok legyenek $\mathbf{R}(n) = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ és $\mathbf{Q}(n) = \sigma_w^2 \mathbf{I}$, kovariancia mátrixokkal. A σ_n szórást úgy állítsa be, hogy megfigyelt jel szórása a bemeneti jelszint 2%-a legyen! A σ_w szórást pedig úgy állítsa be, hogy minden harmonikus komponens szórása az amplitúdó 5%-a legyen! Az 1.1. pont szerinti bemenőjel alkalmazása mellett – a vizsgált rendszer állandósult állapotának elérését követően – futtassa a prediktort mindkét esetre (r és $r-q$ esetek), és ábrázolja grafikusan a hibarendszer állapotváltozóinak és a $\text{trace}\mathbf{P}(n)$ értékének alakulását a prediktor állandósult állapotának eléréséig terjedően! Ne feledkezzen meg $\mathbf{P}(0)$ alkalmas beállításáról (max. 8 pont)!



7.2. Jelek reprezentációja jelterekben

Jelterek: az euklideszi tér általánosításai

$$\mathbf{x} = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \boldsymbol{\phi}_m,$$

$$\alpha_m = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_m), \\ m = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\boldsymbol{\phi}_m(n) = \exp\left(j \frac{2\pi}{N} mn\right), \\ \boldsymbol{\theta}_m(n) = \frac{1}{N} \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} mn\right).$$

**Diszkrét Fourier
transzformáció**

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \phi_m(t)$$

$$\alpha_m = (x(t), \theta_m(t)) \\ m = 0, 1, \dots$$

$$\phi_m(t) = \exp(j2\pi mt), \\ \theta_m(t) = \exp(-j2\pi mt).$$

Fourier sorfejtés

$$x(t) = \int_S \alpha(s) \phi(t, s) ds$$

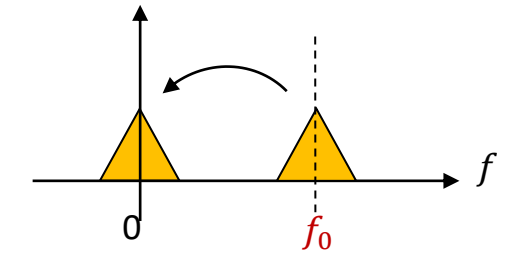
$$\alpha(s) = \int_T x(t) \theta(s, t) dt$$

$$\phi(t, s) = \exp(j2\pi st), \\ \theta(s, t) = \exp(-j2\pi st).$$

Fourier transzformáció

Fourier transzformáció: Az $x(t)$ jelet szorozzuk az $\exp(-j2\pi f_0 t)$ komplex exponenciálissal, aminek hatására a jel spektruma balra tolódik f_0 -val.

Az integrálás (lásd $\alpha(s)$ számítása) végtelenül keskeny aluláteresztő szűrésnek felel meg, aminek eredménye a spektrum f_0 -beli értéke.



Fourier sorfejtés: Az $x(t)$ jelet harmonikus viszonyban lévő komplex exponenciálisok segítségével írjuk le.

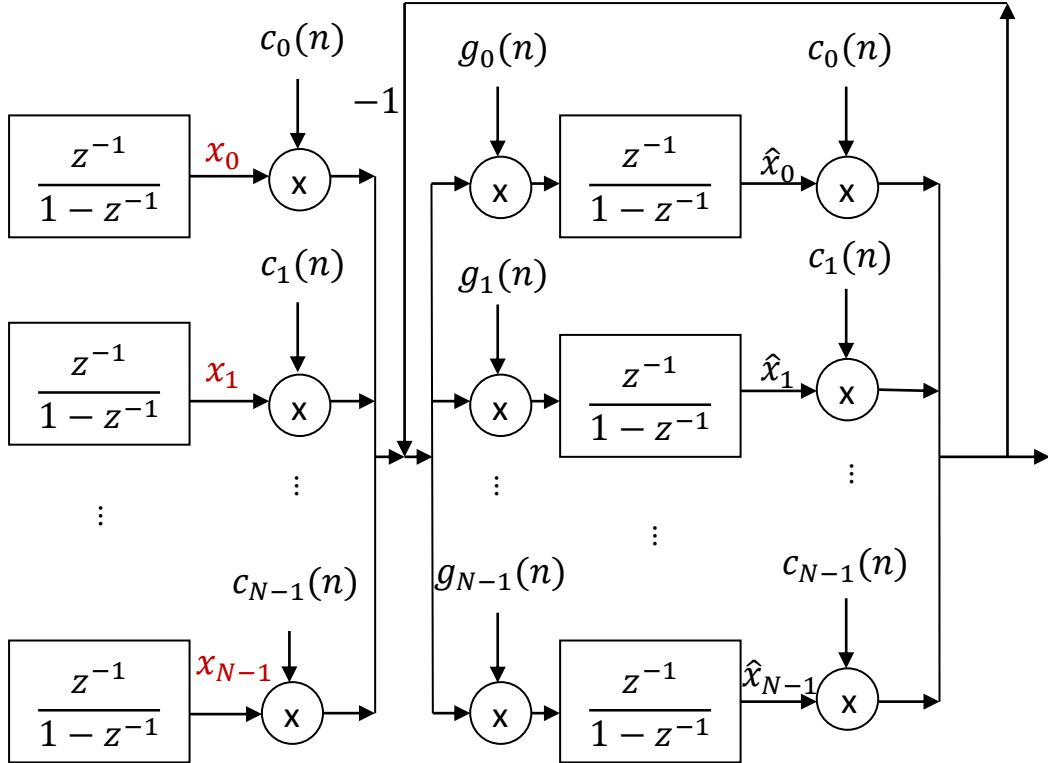
Az integrálás (lásd α_m számítása) végtelenül keskeny aluláteresztő szűrésnek felel meg, aminek eredménye a spektrum értéke az egymással harmonikus viszonyban lévő frekvenciákon.

Diszkrét Fourier transzformáció: Az x diszkrét jelet harmonikus viszonyban lévő, diszkrét komplex exponenciálisok segítségével írjuk le.

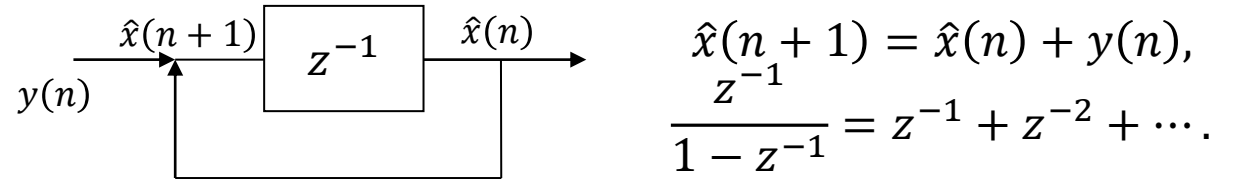
Az összegzés (lásd α_m számítása) véges sáv szélességű digitális aluláteresztő szűrésnek felel meg, aminek eredménye a spektrum közelítő értéke az egymással harmonikus viszonyban lévő frekvencia pozíciókban, ill. azok környezetében.

7.3. Megfigyelő jelfeldolgozási feladatokra

A súlyozó együtthatókat bemenet nélküli, diszkrét integrátorokban tárolt értékek adják: x_0, x_1, \dots, x_{N-1}



A mérendő jelről azt tételezzük fel, hogy a bázis-rendszer elemek lineáris kombinációjaként áll elő, és a bázisvektorok dimenziójának megfelelő mintából álló diszkrét jel.



Jelölés: $\{c_m(n)\}$, $\{g_m(n)\}$ jelöli a bázis/reciprok bázis rendszereket, $m, n = 0, 1, \dots, N-1$.

n : „diszkrét idő” index

m : „diszkrét frekvencia” index

$\mathbf{x}(n) = [x_0(n) \ x_1(n) \ \dots \ x_{N-1}(n)]^T$ a jelet generáló hipotetikus rendszer állapotváltozói.

$\hat{\mathbf{x}}(n) = [\hat{x}_0(n) \ \hat{x}_1(n) \ \dots \ \hat{x}_{N-1}(n)]^T$ becslőjét megfigyelővel állítjuk elő.

A hipotetikus jelgeneráló rendszert leíró egyenletek:

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{x}(n); \quad y(n) = \mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n),$$

A megfigyelő: $\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{g}(n)\mathbf{c}^T(n)[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)]$

A hibarendszer:

$$\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{g}(n)\mathbf{c}^T(n))[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)], \quad \mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1) = \prod_{k=0}^n (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k))[\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)]$$

$$\prod_{k=0}^{N-1} (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k)) = \mathbf{0}.$$

Ez viszont teljesül, ha $\{c_m(n)\}$, és $\{g_m(n)\}$ bázis/reciprok bázis párt alkotnak ($m, n = 0, 1, \dots, N-1$)!

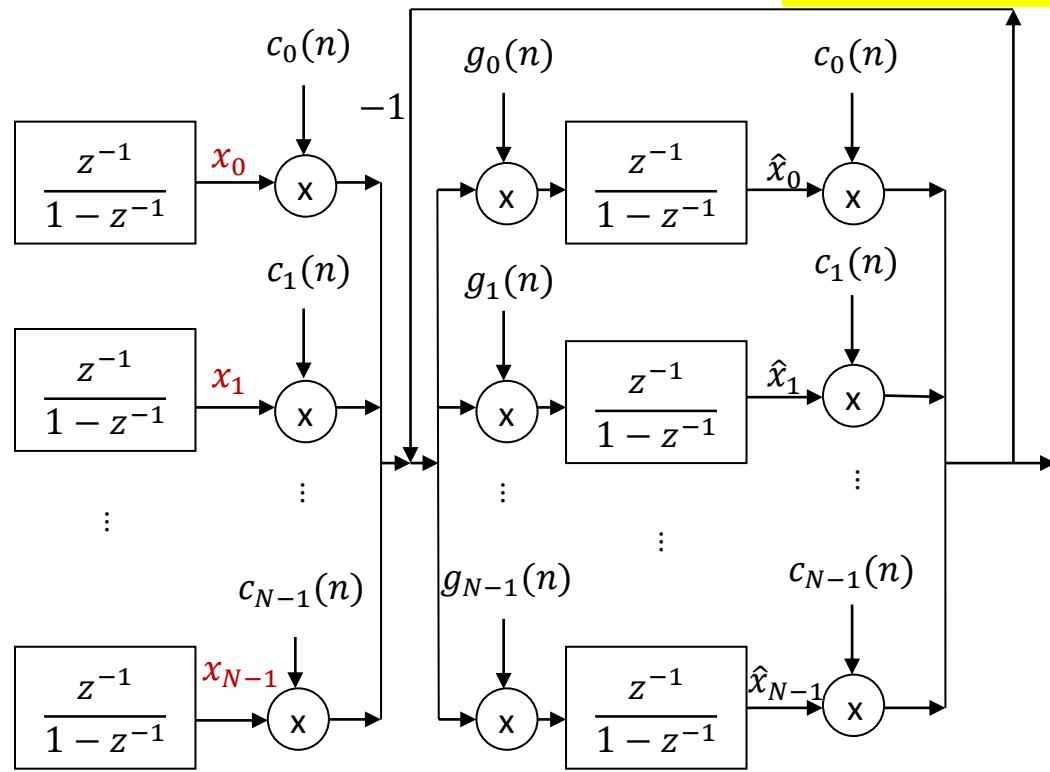
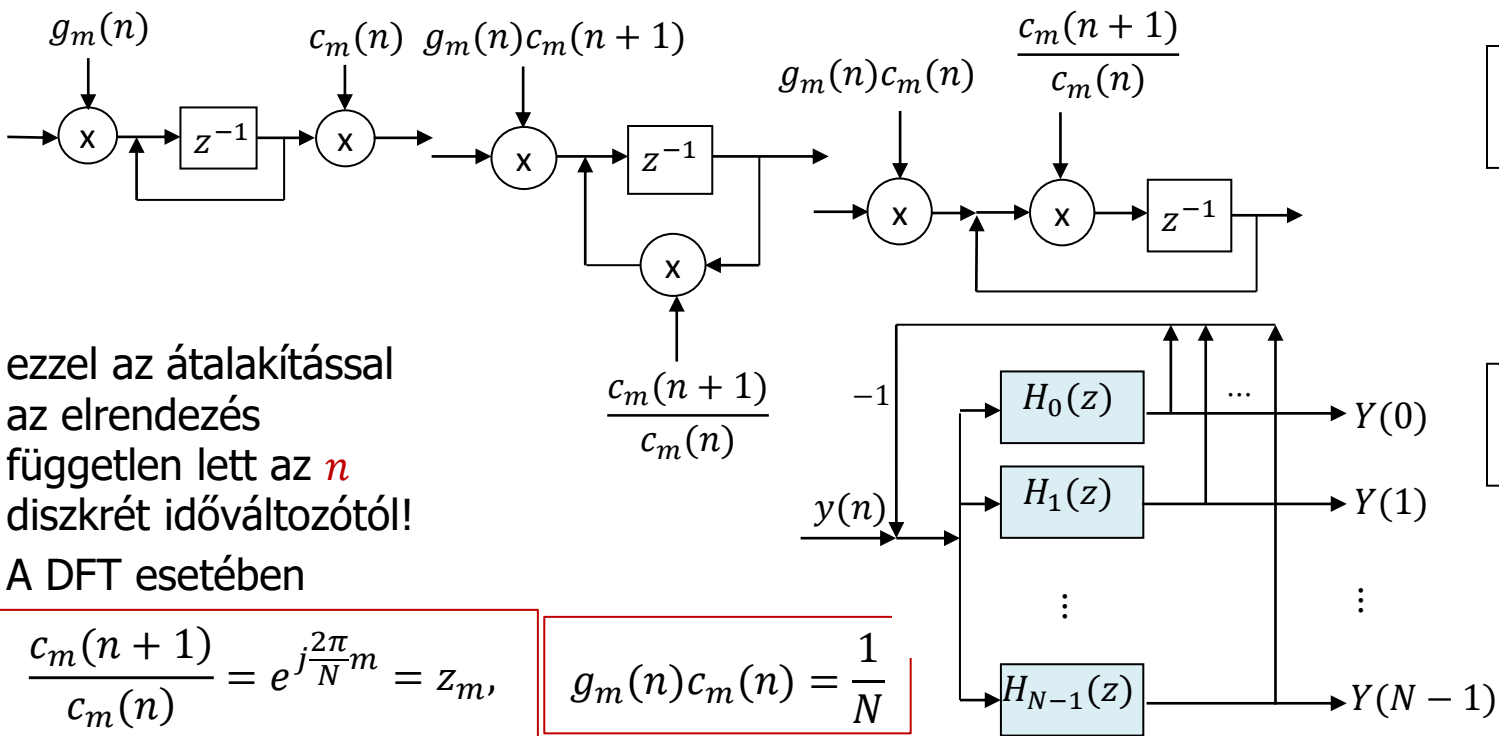
A diszkrét Fourier transzformáció (DFT) esetén:

$$\left\{ c_m(n) = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}mn\right) \right\}, \quad \left\{ g_m(n) = \frac{1}{N} \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}mn\right) \right\}$$

A rekurzív jelreprezentáció sajátosságai:

- (1) Soros-párhuzamos átalakító (2) Folytathatóság, decimáció
- (3) Csúzó-ablakos/rekurzív transzformáció (4) N csatornás szűrő
- (a) A diszkrét integrátorok kimenete
- (b) A diszkrét integrátorok utáni keverők kimenetei

Keverés-integrálás-keverés helyett sávszűrés:



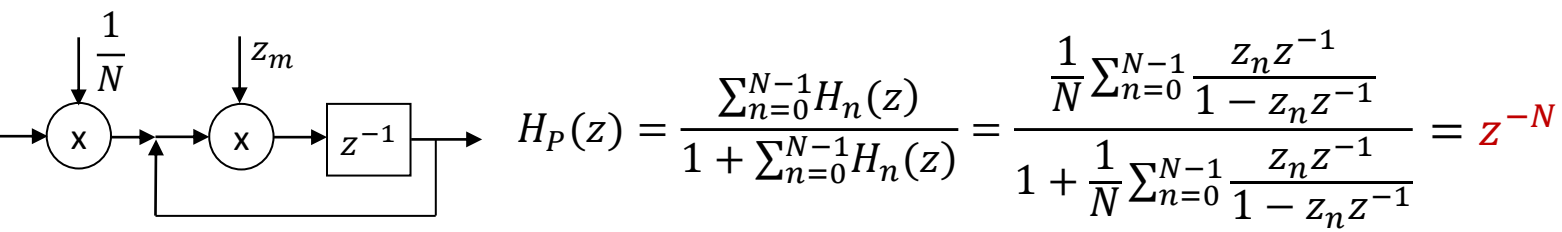
$$T_m(z) = \frac{H_m(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N} \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}$$

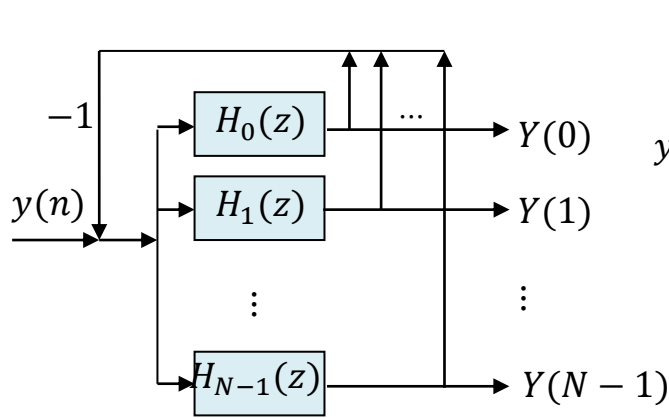
$T_m(z)$ alternatív megvalósítása:

$$T_m(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}$$

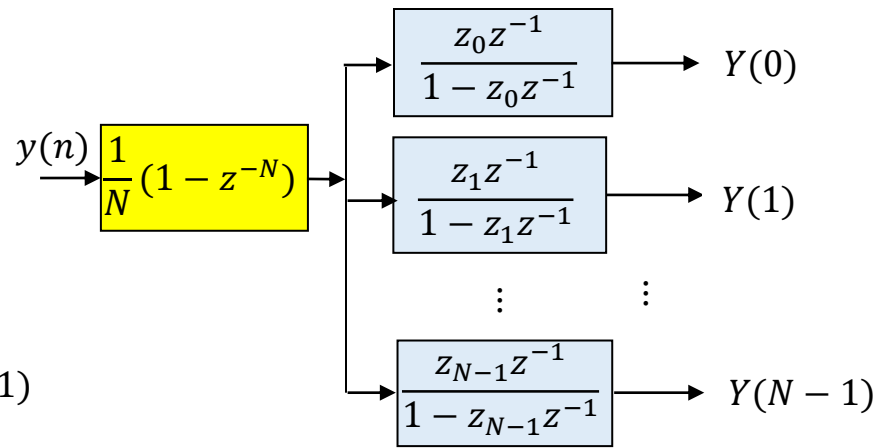
$H_P(z)$ alternatív megvalósítása:

$$H_P(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = z^{-N}$$

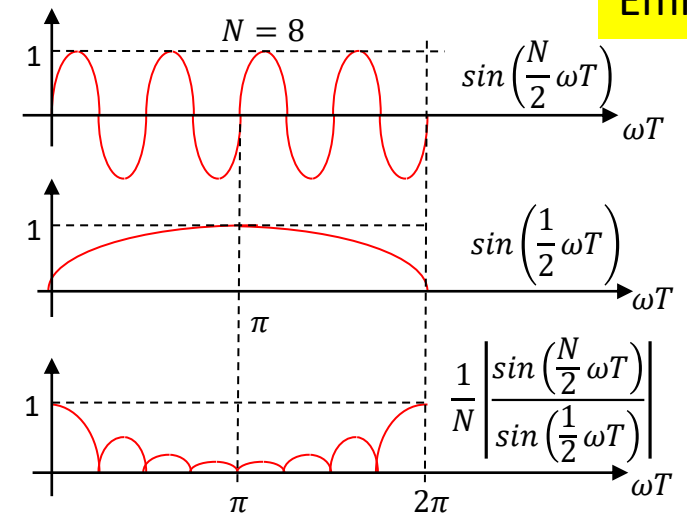




Rezonátoros struktúra



Lagrange struktúra



$m = 0$ esetén ($z_0 = 1$) megegyezik a csúszó ablakos átlagoló átviteli függvényével:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} (1 - z^{-N})}{N (1 - z^{-1})}, \quad H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T} \sin\frac{N\omega T}{2}}{N \sin\frac{\omega T}{2}}$$

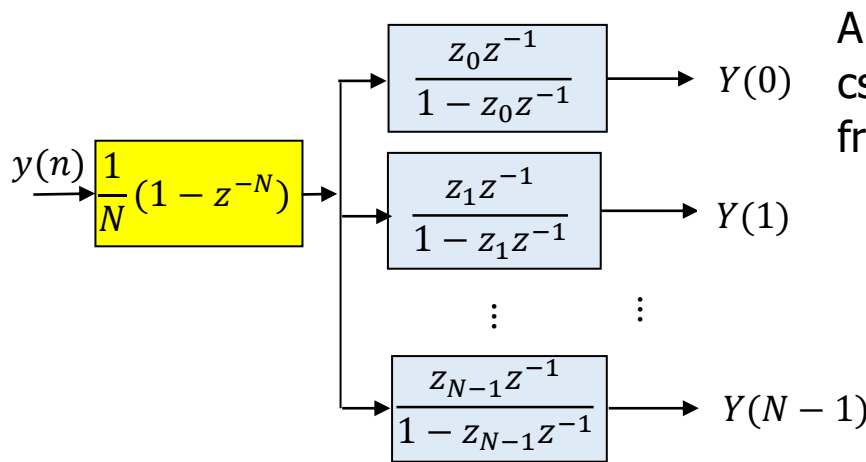
Ez olyan amplitúdó-karakterisztikájú szűrő, amelynek sávközepe nem nulla frekvencián, hanem a z_m gyöktényező által kijelölt frekvencián, azaz a mintavételi frekvencia m/N -szeresénél van. A szűrő a N szélességű ablakra nézve periodikus jelek komponenseit, a m -edik kivételével, tökéletesen kiszűri, mert a harmonikus frekvencia pozíciókban a számláló átvitele nulla.

$$H_P(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = z^{-N}. \quad T_m(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}$$

$T_m(z)$ impulzusválasza/súlyfüggvénye az m -edik (reciprok) bázisvektor, amely N mintából áll.

$$\begin{aligned} T_m(z) &= z_m z^{-1} + (z_m z^{-1})^2 + (z_m z^{-1})^3 + \dots + (z_m z^{-1})^N \rightarrow Y(m) = \\ &= \frac{1}{N} \left[y(n - N) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^N + y(n - N + 1) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^{N-1} + \dots + (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^1 y(n - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \left[y(n - N) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^0 + y(n - N + 1) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^{-1} + \dots + (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^{-(N-1)} y(n - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \left[y(n - N) (e^{-j\frac{2\pi}{N}m})^0 + y(n - N + 1) (e^{-j\frac{2\pi}{N}m})^1 + \dots + (e^{-j\frac{2\pi}{N}m})^{(N-1)} y(n - 1) \right] \end{aligned}$$

Véges impulzusválaszú szűrő, mert számlálója osztható a nevezőjével. Számlálója az ún. fésűs szűrőt valósítja meg, amelynek m indexű fogát a pólus „kitöri”.

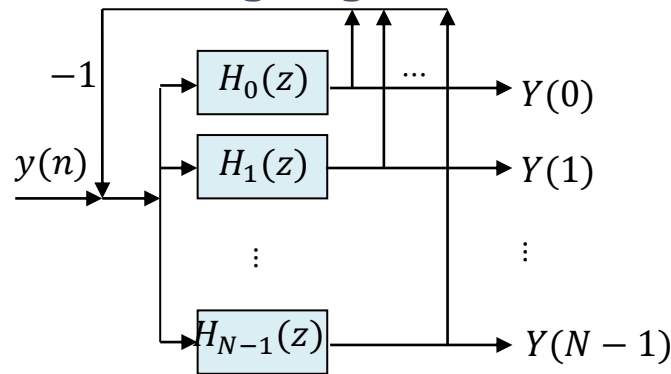


A Lagrange interpoláció frekvenciatartománybeli megvalósítására alkalmas. Az egyes csatornák átviteli függvényei a Lagrange polinomoknak feleltethetők meg, a frekvenciatartománybeli interpoláció pedig ezek lineáris kombinációja révén jön létre.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n T_n(z), \quad w_n = H(z_n), \quad \text{Ún. frekvencia-mintavételi eljárás: FIR szűrők.}$$

Stabilitás határán lévő rendszer, mert rezonátort tartalmaz, amely bemeneti jel nélkül is képes kimeneti jelet produkálni, ha nullától különböző kezdeti értékről indítjuk a működését. A pólus-zérus kiejtés nem lesz tökéletes.

Lagrange struktúra



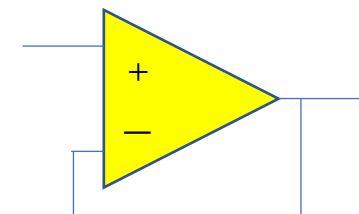
Rezonátoros struktúra

A numerikus/stabilitási problémák csökkentése : (a) az $1 - z^{-N}$ polinom helyett $\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})$ valósítandó meg, mégpedig azonos módon, mint a pólusokat. (b) Rezonátoros struktúrát alkalmazunk, ahol az egymást kiejtő zérust és pólust ugyanaz a hardver valósítja meg.

A megfigyelő alapú (rezonátoros) struktúra kedvezőbb tulajdonságokkal rendelkezik, mint a Lagrange struktúra. Minden olyan feladat ellátásra alkalmas, amire a Lagrange struktúrát kitalálták, számos egyéb lehetőséget is kínál: (a) Lagrange interpoláció tetszőleges (de különböző) rezonátor pólusok esetében; (b) tetszőleges átviteli függvény pólus megvalósítása.

Valós együtthatós, ill. valós együtthatós formára hozható átviteli függvények gyökei vagy valósak, vagy konjugált komplex párban jelentkeznek. A z_m komplex rezonátor pólusnak a $z_m^* = 1/z_m = z_m^{-1}$ konjugáltja mindig fellehető.

A 100%-ban negatív visszacsatolású rezonátor-struktúra kedvező tulajdonságai analógiába hozhatóak a hasonlóképpen visszacsatolt műveleti erősítő tulajdonságaival: az igen nagy hurokerősítés nagy pontosságot tesz lehetővé.



Kapcsolat a Lagrange interpolációs polinommal:

Adott $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ ún. alappontok felett egy függvény értékei: $y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1), \dots, y_{N-1} = y(x_{N-1})$.

Az ezeken a pontokon "áthaladó" Lagrange interpolációs polinom

$$Y(x) = \prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{a_m}{x - x_m}, \quad \text{ahol } a_m = \frac{y_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (x_m - x_n)}$$

Az összefüggések egybevetésével látható, hogy a frekvencia-mintavételi eljárás a Lagrange interpolációnak felel meg, és az is, hogy nem csak az N -edik egységgyökök esetében használható.

Kapcsolat az Hermite interpolációs polinommal:

(többszörös rezonátor pólusok esete)

Ha az x_m alappontban egy függvényből $N_0(m)$ számú adat (érték, első derivált értéke, második derivált értéke, stb.) áll rendelkezésre, akkor az ún. Hermite interpolációs polinom:

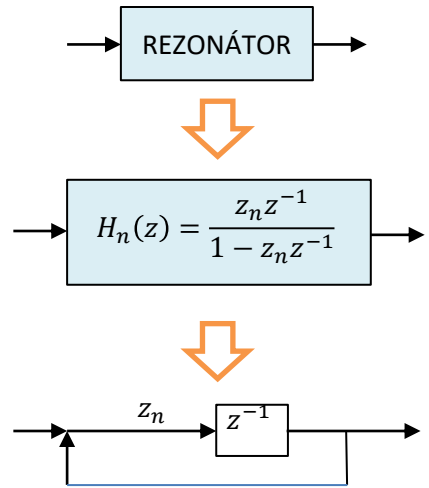
$$Y(x) = \prod_{n=0}^{N-1} (x - x_n)^{N_0(n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_0(m)-1} a_{mi} x^i}{(x - x_m)^{N_0(m)}}$$

ill. a megfelelő digitális szűrő-készlet:

$$H(z) = \prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})^{N_0(n)} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\sum_{i=0}^{N_0(m)-1} A_{mi} z^{-i}}{(1 - z_m z^{-1})^{N_0(m)}}$$

amelynek közös zérusai, a Lagrange interpolációhoz hasonlóan előállíthatók a közös visszacsatolás segítségével. A különbség csak annyi, hogy a multiplicitásnak megfelelő számú rezonátor sorosan kapcsolódik.

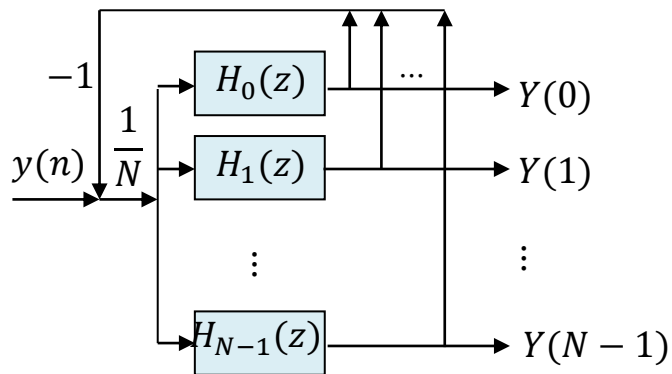
A rezonátor alapú rekurzív diszkrét Fourier transzformátor (RDFT) struktúra további alkalmazásai:



A rezonátor alapú rekurzív diszkrét Fourier transzformátor jelútjainak megfordításával - ezzel az ún. **transzponált struktúrához** jutunk - egy N bemenetű és egyetlen kimenetű szűrőt kapunk. Ez egy párhuzamos-soros átalakító, amelynek bemenetére N lépésenként elhelyezett bemeneti érték („impulzus”) súlyozza az adott bemenethez tartozó komplex exponenciális bázisfüggvényeket: ezek lineáris kombinációjaként jön létre a generált jel. A transzponált struktúra tehát egy **jelgenerátort** valósít meg. Az ebben megvalósuló visszacsatolás biztosítja, hogy az egyes rezonátorok ne éljenek „önálló életet”, pontatlanságaik a működés során ne akkumulálódnak, mint a visszacsatolás mentes rezonátorok esetében.

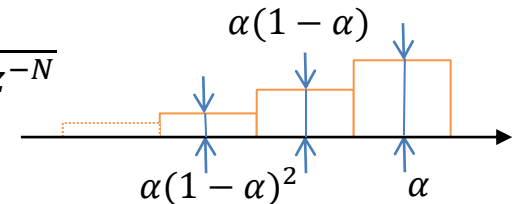
Csak páratlan harmonikus komponens tartalmazó jelek esetén érdekes lehet a -1 egységgyökeire alapozott bázis/reciprok bázis készlet, ill. transzformáció. Ilyenkor az első bázisvektor egy félperiódusú komplex exponenciális, a második egy másfél periódusú, stb. Ilyenkor $H_p(z) = -z^{-N}$, azaz a N lépésnyi késleltetés mellett fázist is fordít.

Ha az elrendezésben az $1/N$ tényező helyett α/N szerepel, ahol $0 < \alpha < 1$, akkor a csúszó ablakos transzformációt kombinálni tudjuk az exponenciális átlagolással. Ez azt jelenti, hogy az egymást követő, N hosszúságú blokkokat felejtő hatással átlagoljuk.



$$H_p(z) = \frac{\frac{\alpha}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \frac{\alpha}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} = \frac{\alpha z^{-N}}{1 - z^{-N} + \alpha z^{-N}} = \frac{\alpha z^{-N}}{1 - (1 - \alpha)z^{-N}}$$

$$H_p(z) = \alpha z^{-N} + \alpha(1 - \alpha)z^{-2N} + \alpha(1 - \alpha)^2 z^{-3N} + \dots,$$



További transzformációk megvalósítása: $x = Ty = V_1 Fy$, $x = Ty = V_2 Wy$, $x = Fy = V_3 Wy$

A rezonátor alapú megfigyelő, mint univerzális jelfeldolgozó eszköz

Általánosítsuk a rezonátor átviteli függvényét következőképpen:

$$H_m(z) = \frac{g_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}$$

Ezzel:

$$H_P(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}$$

Ha véges impulzusválaszú (FIR) viselkedést akarunk biztosítani, akkor a $H_P(z)$ összefüggés nevezőjének az alábbi kötetést kell teljesíteni:

$$1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \frac{1}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})},$$

mert ekkor lesz $H_P(z) z^{-1}$ polinomja, azaz véges impulzusválaszú. Ehhez a $\{g_m\}$ és az $\{r_m = \frac{g_m}{z_m}\}$:

Megjegyzések:

$$g_m = \frac{z_m}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}; \quad r_m = \frac{1}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}$$

1. A rezonátor pólus pozíciók szabadon megválaszthatók (de legyenek különbözők).
2. Ha a rezonátor pólus pozíciók az N -edik egységgyökök, akkor $r_m = 1/N$ minden m -re.

Ha végtelen impulzusválaszú (IIR) viselkedést akarunk, és adottak a megvalósítandó $p_m, m = 0, 1, \dots, N-1$, akkor:

$$1 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - p_n z^{-1})}{\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})}$$

$$g_m = z_m \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}; \quad r_m = \frac{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - p_n z_m^{-1})}{\prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{N-1} (1 - z_n z_m^{-1})}$$

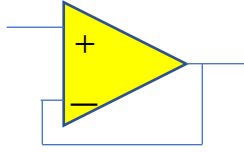
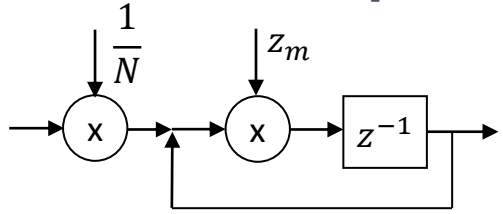
A szűrő kimenőjelét mindkét esetben is az egyes csatornák kimeneteinek lineáris kombinációjaként kapjuk.

Megjegyzés:

A rekurzív jeltranszformátort, továbbá FIR és IIR szűrőt megvalósító egyaránt alkalmas rezonátor-alapú jelfeldolgozó struktúra fontos tulajdonságai:

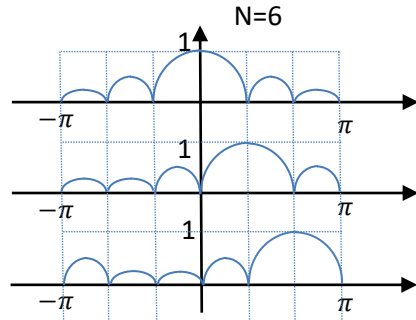
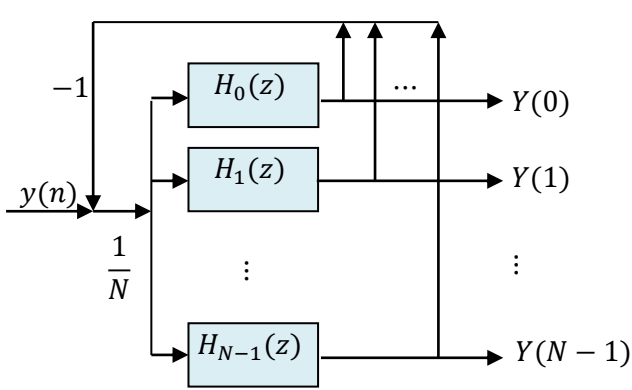
- (a) A jelet komponensekre bontja, majd (szükség szerint) lineáris kombináció képzéssel szintetizálja.
- (b) A rezonancia frekvenciákon a hurokerősítés végtelen, ezért az átvitel paraméter-érzékenysége – a kimeneti lineáris kombináció súlytényezőit leszámítva – ezeken a frekvenciákon nulla, az átvitel pontosságát kizárólag ezek a súlytényezők befolyásolják.
- (c) A rezonátor pólus pozíciók szisztematikus megválasztásával stabilitási és numerikus szempontból egyaránt kedvező számítási elrendezéshez jutunk.

A rezonátor alapú megfigyelő univerzális jelfeldolgozó eszköz: összefoglalás



A rekurzív jeltranszformátort, továbbá FIR és IIR szűrőt egyaránt megvalósítani képes rezonátor-alapú jelfeldolgozó struktúra fontos tulajdonságai:

- (a) A jelet komponensekre bontja, majd (szükség szerint) lineáris kombináció képzéssel szintetizálja.
- (b) A rezonancia frekvenciákon a hurokerősítés végtelen, ezért az átvitel paraméter-érzékenysége – a kimeneti lineáris kombináció súlytényezőit leszámítva – ezeken a frekvenciákon nulla, az átvitel pontosságát kizárólag ezek a súlytényezők befolyásolják.
- (c) A rezonátor pólus pozíciók szisztematikus megválasztásával stabilitási és numerikus szempontból egyaránt kedvező számítási elrendezéshez jutunk.



Rezonátorok megvalósítása valós aritmetikával: másodfokú, valós együtthatós rezonátor alaptagok

Valós együtthatós polinomok gyökei vagy valósak vagy konjugált komplex párok. Ugyanez igaz a belőlük származtatott rezonátoros alaptagokra. A párok összevonásával másodfokú, valós együtthatós rezonátor alaptagokhoz jutunk.

Első lépésként a konjugált komplex-pár alaptagok összegét képezzük, ezzel az átvitel valós részének kétszeresét kapjuk. Itt felhasználjuk, hogy z_m konjugáltja z_m^{-1} , és r_m valós.

$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} + \frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} = 2r_m \frac{z^{-1} \cos \phi_m - z^{-2}}{1 - 2z^{-1} \cos \phi_m + z^{-2}} = 2\text{Re}[csatorna_m]$$

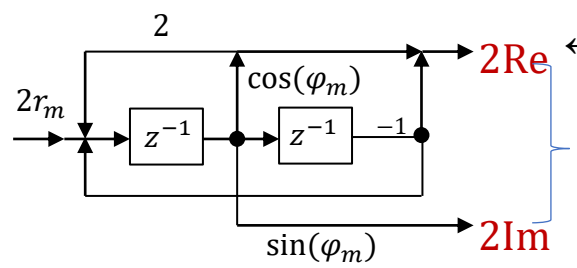
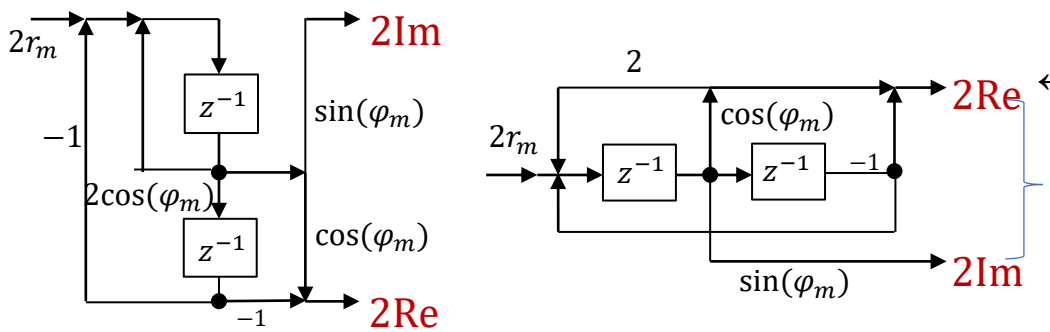
$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} - \frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1 - z_m^{-1} z^{-1}} = j2r_m \frac{z^{-1} \sin \phi_m}{1 - 2z^{-1} \cos \phi_m + z^{-2}} = 2j\text{Im}[csatorna_m]$$

$$r_m z_m z^{-1} (1 - z_m^{-1} z^{-1}) + r_m z_m^{-1} z^{-1} (1 - z_m z^{-1}) = 2r_m (z^{-1} \cos \phi_m - z^{-2})$$

$$r_m z_m z^{-1} (1 - z_m^{-1} z^{-1}) - r_m z_m^{-1} z^{-1} (1 - z_m z^{-1}) = j2r_m z^{-1} \sin \phi_m$$

$$(1 - z_m z^{-1})(1 - z_m^{-1} z^{-1}) = 1 - (z_m + z_m^{-1}) z^{-1} + z^{-2} = 1 - 2z^{-1} \cos \phi_m + z^{-2}$$

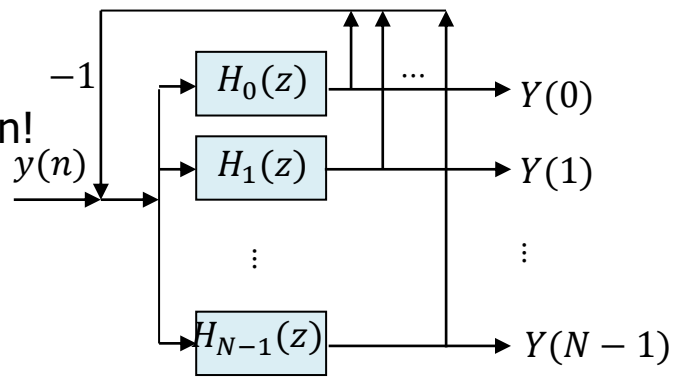
Az ún. direkt struktúrájú másodfokú rezonátor alaptag/kiszámítási vázlat



← Ezeket összegezzük a visszacsatolásban!

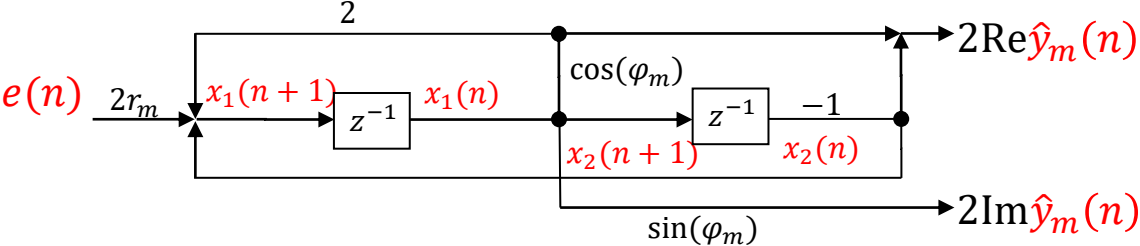
$$* w_m \rightarrow 2Re * Rew_m - 2Im * Imw_m$$

A kicsatolás súlytényezője frekvencia-mintavételi eljárás esetén!



Másodfokú rezonátor alaptag/kiszámítási forma variációk: **Nagyon nem mindegy!**

Állapotváltozós leírás:



$$2Re \hat{y}_m(n) = [\cos \phi_m \quad -1] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

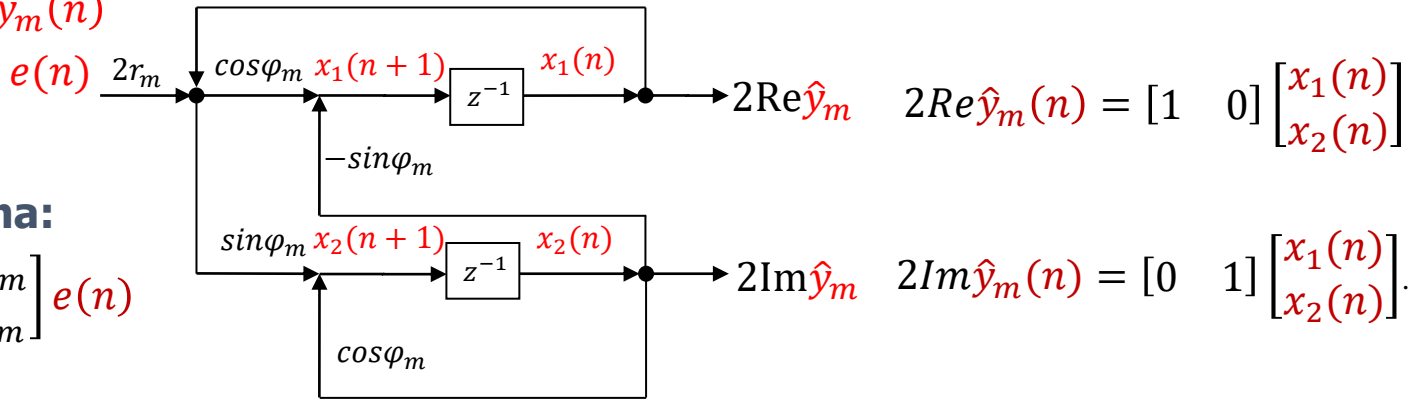
$$2Im \hat{y}_m(n) = [\sin \phi_m \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

Gondot okoz (1) a számítások ún. **dinamikatartománya**, és (2) a **véges számábrázolási pontosság**.

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cos \phi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix} e(n)$$

Ortogonalis rezonátor alaptag/kiszámítási forma:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_m & -\sin \phi_m \\ \sin \phi_m & \cos \phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2r_m \cos \phi_m \\ 2r_m \sin \phi_m \end{bmatrix} e(n)$$



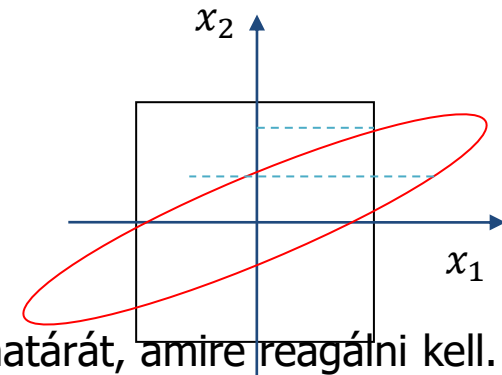
$$2Re \hat{y}_m(n) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

$$2Im \hat{y}_m(n) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

A struktúra egyértelmű előnye a **kedvező dinamikatartomány**. Hátránya, hogy a rezonátor pólus pozíció origótól való távolságát a $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ összefüggés felhasználásával állítja be, ami a valóságban, a véges számábrázolási pontosság következtében $[\sin^2 \phi]_Q + [\cos^2 \phi]_Q \cong 1$ formában valósul meg. Itt $[\dots]_Q$ a kvantálás műveletét szimbolizálja. További hátrány, hogy a (nem-elfajuló) szorzótényezők száma nagyobb, mint a direkt struktúra esetében.

Túlcsondulás fixpontos aritmetika esetén:

A dinamikatartomány probléma egy másik vonatkozása, hogy milyen következménnyel jár a túlcsondulás fixpontos aritmetika esetén. A hatás mindenképpen nemlineáris, de nem mindegy, hogy ennek következtében a rezonátor belső energiája nő vagy csökken. Az ábrán ferde ellipszis lenne az azonos energiájú pontok mértani helye, ha nem lenne túlcsondulás.

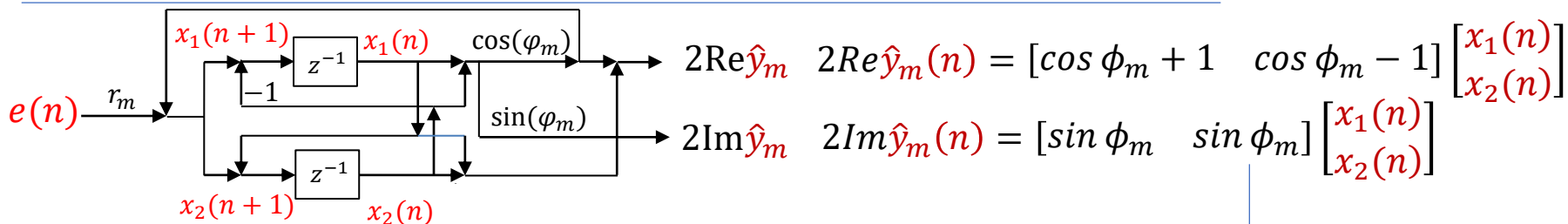


Ha áttérünk fixpontos ábrázolásra, akkor ez a ferde ellipszis metszi a számábrázolási tartomány felső határát, amire reagálni kell. Szokásos megoldások a következők: (1) kettes komplement érték érvényesítése; (2) telítődés: a maximális érték helyettesítése; (3) nulla helyettesítése.

Mindhárom stratégia esetén előfordulhat, hogy a ferde ellipszisen kívüli pontba kerülünk, ami **nagyobb belső energiájú** jelszintet eredményez. Ugyanez nem alakul ki az **ortogonális rezonátor** esetében, mert a túlcsondulás után alkalmazott stratégiák mindegyike kisebb energiájú pontba viszi a rezonátort, hiszen az állapotváltozók vektorának végpontja **ferde ellipszis helyett kör!**

(Gondoljunk arra, hogy nulla bemenet esetén az oszcillátor a belső energiájának/kezdeti értékének megfelelően produkál kimenő jelet.)

A dinamika-tartomány, a szorzás-szám és túlcsondulás esetén mutatott tulajdonságok együttes kompromisszuma az ún. **hullámdigitális rezonátor:**



$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_m & \cos \phi_m - 1 \\ \cos \phi_m + 1 & \cos \phi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_m \\ r_m \end{bmatrix} e(n)$$

Itt a dinamika viszonyok alakulását **fekvő, ill. álló ellipszisek** jellemzik, így a túlcsondulás esetén mindig alacsonyabb energiájú pontba kerülünk.

Méréselmélet 10. előadás, 2022. május 4.

Hasonlósági transzformációk:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= Ax(n) + Bu(n) \\ y(n) &= Cx(n) + Du(n) \\ x' &= Tx(n) \end{aligned}$$

A transzformált rendszer mátrixai: $x'(n+1) = TAT^{-1}x'(n) + TBu(n)$
 $y(n) = CT^{-1}x'(n) + Du(n)$,

$$\begin{aligned} A' &= TAT^{-1} & B' &= TB \\ C' &= CT^{-1} & D' &= D \end{aligned}$$

Néhány példa a hasonlósági transzformációval történő áttérésre:

Ha a **direkt struktúráról** az **ortogonális struktúrára** akarunk áttérni, akkor ezt egy olyan transzformáció valósítja meg, amely

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = [\cos\varphi_m \quad -1] \quad D = 0 \end{array} \right\} \text{ mátrixokat} \quad \left. \begin{array}{l} A' = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -\sin\varphi_m \\ \sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 2r_m\cos\varphi_m \\ 2r_m\sin\varphi_m \end{bmatrix} \\ C' = [1 \quad 0] \quad D' = 0 \end{array} \right\} \text{ mátrixokba transzformálja.}$$

Keressük a T transzformációt $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ formában! $B' = \begin{bmatrix} 2r_m\cos\varphi_m \\ 2r_m\sin\varphi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix}$ $C'T = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\cos\varphi_m \quad -1]$,

ezért $a = \cos\varphi_m$, $b = -1$, $c = \sin\varphi_m$, végül az $A'T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -\sin\varphi_m \\ \sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -1 \\ \sin\varphi_m & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -1 \\ \sin\varphi_m & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = TA$ összefüggésből $d = 0$, azaz $T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -1 \\ \sin\varphi_m & 0 \end{bmatrix}$.

Megjegyzés: Ha csak az állapotátmenet mátrixra vonatkozó előírást akarjuk fenntartani, akkor a transzformáció fennmaradó szabad paramétereit másképpen is rögzíthetjük: ebben az esetben a becsatolás és a kicsatolás vektorai a megadotthoz képest eltérőek lesznek.

Ha a **direkt struktúráról** a **hullámdigitális struktúrára** akarunk áttérni, akkor

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ C = [\cos\varphi_m \quad -1] \quad D = 0 \end{array} \right\} \text{ mátrixokat} \quad \left. \begin{array}{l} A' = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & \cos\varphi_m - 1 \\ \cos\varphi_m + 1 & \cos\varphi_m \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} r_m \\ r_m \end{bmatrix} \\ C' = [\cos\varphi_m + 1 \quad \cos\varphi_m - 1] \quad D' = 0 \end{array} \right\} \text{ mátrixokba transzformáljuk.}$$

Keressük a T transzformációt $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ formában! $B' = \begin{bmatrix} r_m \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix}$, Ebből: $a = 0.5$ $c = 0.5$ $T = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
 $C'T = [\cos\varphi_m + 1 \quad \cos\varphi_m - 1] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\cos\varphi_m \quad -1]$, Ebből: $b = -0.5$ $d = 0.5$

Ellenőrzésképpen: $A'T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & \cos\varphi_m - 1 \\ \cos\varphi_m + 1 & \cos\varphi_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = TA$

Ha a **direkt struktúráról** a **transzponált direkt struktúrára** akarunk áttérni, akkor ezt egy olyan transzformáció valósítja meg, amely az

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [\cos\varphi_m & -1] & D &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ mátrixokat} \quad \left. \begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & B' &= \begin{bmatrix} \cos\varphi_m \\ -1 \end{bmatrix} \\ C' &= [2r_m & 0] & D' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ mátrixokba transzformálja.}$$

A transzponált struktúrát úgy kapjuk, hogy a jelfolyamgráf valamennyi nyilának irányát megfordítjuk, a kimenetet bemenetként, a bemenetet kimenetként használjuk.

Keressük a T transzformációt $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ formában! $A'T = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos\varphi_m & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = TA$

$$A'T = \begin{bmatrix} 2a\cos\varphi_m + c & 2b\cos\varphi_m + d \\ -a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a\cos\varphi_m + b & -a \\ 2c\cos\varphi_m + d & -c \end{bmatrix} = TA \quad \text{Innen felhasználva, hogy } b = c, \text{ továbbá}$$

$$B' = \begin{bmatrix} \cos\varphi_m \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2r_m \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C'T = [2r_m \quad 0] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\cos\varphi_m \quad -1]$$

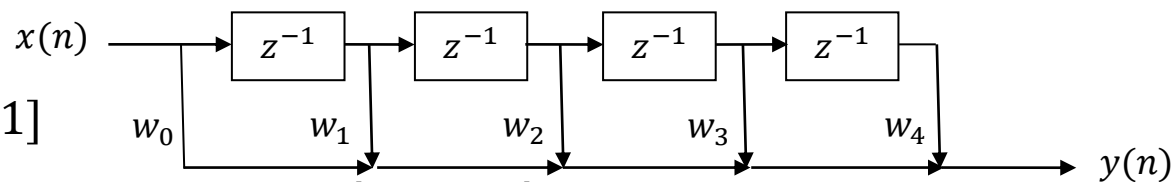
$$a = \frac{\cos\varphi_m}{2r_m}, \quad c = -\frac{1}{2r_m}, \quad b = -\frac{1}{2r_m}, \quad d = \frac{\cos\varphi_m}{2r_m}$$

$$T = \frac{1}{2r_m} \begin{bmatrix} \cos\varphi_m & -1 \\ -1 & \cos\varphi_m \end{bmatrix}$$

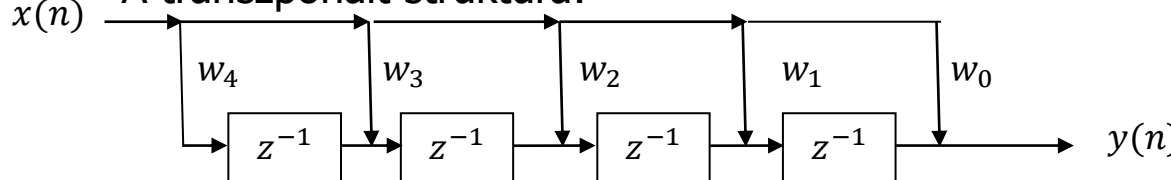
Egyszerű példa a transzponált struktúra alkalmazására:

Lineáris kombinátorral megvalósított FIR szűrő:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k x(n-k)$$



A transzponált struktúra:



Probléma:

Több-bemenetű
összegző igénye!

Kétbemenetű
összegzőket igényel!

A megvalósításhoz
választott struktúra
nem mindegy!

Implementációs gondok: kvantálás okozta oszcillációk,
kerekítések torzító hatása, paraméterérzékenység, stb.

Vannak jó és kevésbé jó struktúrák/kiszámítási módok! Az ún. ortogonális struktúrák általában:

Az ortogonális struktúrákat úgy definiáljuk, hogy az $\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$

Itt $x(n)$ a rendszer állapotvektorát, $y(n)$ és $u(n)$ a skalár kimenet és a skalár bemenet diszkrét időfüggvényét jelöli.

formájú rendszerleírásban, a $T^T T = I$, azaz $T^T = T^{-1}$, azaz T ortogonális mátrix.

Képezzük a fenti összefüggés mindkét oldalának önmagával vett skalár-szorzatát!

$$[x^T(n+1) \quad y(n)] \begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = [x^T(n) \quad u(n)] T^T T \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$$

Kifejtve: $\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) + y^2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) + u^2(n)$.

Ha feltételezzük, hogy a bemenet nulla, azaz $u(n) = 0$, akkor

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) = -y^2(n) \quad \text{alakban írható.}$$

Eszerint, ha van nem nulla kimenőjel, akkor az állapotváltozók által hordozott belső energiának csökkennie kell!

Ezt a tulajdonságot kiegészítve az **abszolút-érték csonkítás** stratégiájával garantálható, hogy a paraméterektől egyébként függetlenül a magára hagyott rendszer belső energiáját disszipálni fogja, és így ún. **határciklus oszcillációk** nem alakulnak ki.

Ez a feltétel teljesíthető a rezonátoros struktúra esetére!

$$A = \text{diag}\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \rangle, \quad G' = [z_0 \sqrt{r_0} \quad z_1 \sqrt{r_1} \quad \dots \quad z_{N-1} \sqrt{r_{N-1}}]$$

$$G = AC^T$$

$$\begin{bmatrix} x(n+1) \\ y(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - GC & G \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) \\ u(n) \end{bmatrix}$$

$C = [\sqrt{r_0} \quad \sqrt{r_1} \quad \dots \quad \sqrt{r_{N-1}}]$ jelölésekkel, ahol a felső vessző most transzponálást, a „T” pedig a transzponált konjugáltat jelöl:

$$T^T T = I = \begin{bmatrix} (A - GC)^T & C^T \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - GC & G \\ C & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (A - GC)^T (A - GC) + C^T C = I = \underbrace{A^T A}_I - \underbrace{A^T GC}_{C^T C} - \underbrace{C^T G^T A}_{C^T C} + \underbrace{C^T G^T GC}_{C^T C C^T C} + C^T C = I,$$

$$(A - GC)^T G = 0 = A^T G - C^T G^T G = \underbrace{A^T AC^T}_I - C^T \underbrace{CA^T AC^T}_I = C^T - C^T C C^T$$

$$G^T G = I = CA^T AC^T = C C^T$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1$$

A feltétel akkor teljesül, ha: Ennek részletei hamarosan!

$$\sum_{m=0}^{N-1} r_m = 1$$

Most csak annyit, hogy az RDFT esetén:

$$r_m = \frac{1}{N}, \forall m\text{-re.}$$

Megjegyzés: Ha az állapotváltozók által hordozott energiát súlyozzuk a $\mathbf{Q} = \text{diag}\langle r_0^{-1}, r_1^{-1}, \dots, r_{N-1}^{-1} \rangle$ mátrixszal, akkor $\sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k^2(n) = -y^2(n)$ helyett $\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{r_k} x_k^2(n+1) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{r_k} x_k^2(n) = -y^2(n)$ adódik. $r_m > 0, \forall m$ -re.

Ilyen energiaviszonyokat akkor kapunk, ha: $\mathbf{A} = \text{diag}\langle z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \rangle$, $\mathbf{C} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$, $\mathbf{G}' = [z_0 r_0 \ z_1 r_1 \ \dots \ z_{N-1} r_{N-1}]$,
Ezzel viszont az eredeti formában bevezetett rezonátoros struktúrához jutunk!

A korlátosság feltétele rezonátor alapú megfigyelőknél:

Kedvezők azok a számítási eljárások, amelyek passzívnak tekinthetők.

Ezek tipikusan - a struktúrájukból adódóan - a paramétereik értékétől függetlenül korlátosak, nem növelik a jelszintet egy bizonyos érték fölé. A rezonátoros struktúra esetében a visszacsatolt rendszer összegzett kimenetére vonatkozó átviteli függvény

$H_P(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{a + jb}{1 + a + jb}$ alakú, ahol $a = a(\omega)$ és $b = b(\omega)$ $a^2 + b^2 \leq (1 + a)^2 + b^2$, $0 \leq 1 + 2a$, $a \geq -0.5$
valós értékek, a hurokerősítés valós és képzetes részei. Annak feltétele, hogy például $|H_P(z)| \leq 1$ legyen : $a \geq -0.5$.

Mivel $a = \text{Re} \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}}$ ill. $2a = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{g_k z^{-1}}{1 - z_k z^{-1}} + \frac{g_k^* z}{1 - z_k^* z} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{g_k z^{-1} - g_k z_k^{-1} + g_k^* z - g_k^* z_n}{2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z} =$ az $a \geq -0.5$ feltétel z értékétől függetlenül teljesül, ha

Ekkor $\text{Re} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{g_k}{z_k} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} r_k \leq 1$ $= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{-\text{Re} \left[\frac{g_k}{z_k} \right] (2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z) + j \text{Im} \left[\frac{g_k}{z_k} \right] (z_k z^{-1} - z_k^{-1} z)}{2 - z_k z^{-1} - z_k^{-1} z} \geq -1$, $\text{Im} \left[\frac{g_k}{z_k} \right] = 0, k = 0, 1, \dots, N-1$

Megjegyzések: 1. A rekurzív DFT esetén $r_k = \frac{1}{N} \forall k$ -ra.

2. Az exponenciálisan átlagoló DFT esetén $r_k = \frac{\alpha}{N} \forall k$ -ra, $0 < \alpha \leq 1$.

3. Stabil szűrők esetén mindig létezik olyan rezonátor-pólus készlet, amelyre $\sum_{k=0}^{N-1} r_k \leq 1$ teljesül.

4. Stabil szűrők esetén az $r_m, m = 0, 1, \dots, N-1$, pozitív szám.

5. A tulajdonságot **strukturális passzivitásnak** nevezzük, a paramétereiktől független, egyedül $\sum_{k=0}^{N-1} r_k \leq 1$ teljesítendő!