

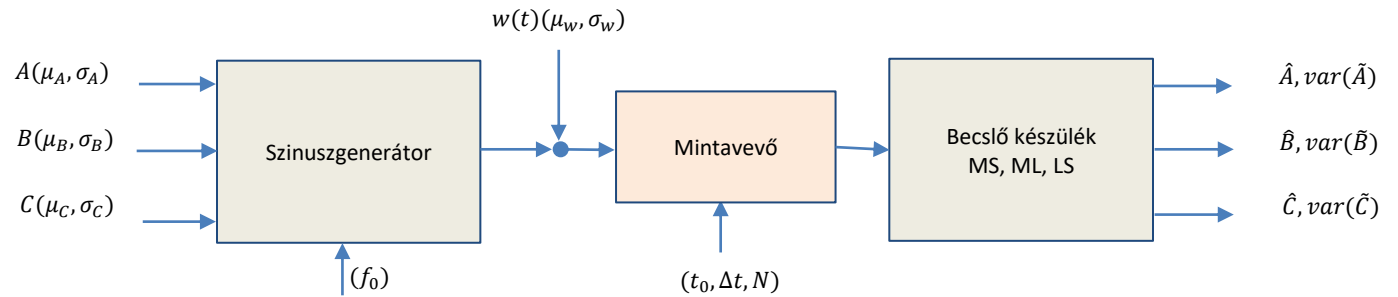


# Méréselmélet

7. fejezet: Modellalapú jelfeldolgozás

2021. április 21.

# Az első házi feladatról:



## 1.1.-1.3. Szinuszcgenerátor korrelált véletlen paramétereinek és az additív megfigyelési zaj mintáinak generálása

Kétfajta korreláltságról van szó: (1)  $C_\alpha$ : Az  $A, B$  és  $C$  paraméterek kovarianciája (2)  $C_w$ : a  $w(t)$  zaj mintáinak kovarianciája

**Megoldás:** (1) `mvnrnd( )`, (2) `chol( )`, (3) `sqrtm(C) × rand( )`

**Megjegyzés:** (1) Az összehasonlíthatóság érdekében azonos paramétereket kellett használni  $N = 5, 10, 100$ -ra.

(2) Természetesen eltérő  $\rho$ -hoz eltérő paramétereknek kell tartozniuk!

(3) A korreláltság természetéről: egyszerű példa felhasználásával: 2 megfigyelés színes zajban

$$C_w = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \quad C_w^{-1} = \frac{1}{\sigma_w^2(1-\rho^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A becslés kovarianciája a csatornától függ!

$$U^T C_w^{-1} U = \frac{1}{\sigma_w^2(1-\rho^2)} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2(1-\rho)}{\sigma_w^2(1-\rho^2)} = \frac{2}{\sigma_w^2(1+\rho)}$$

$$[U^T C_w^{-1} U]^{-1} = \frac{\sigma_w^2}{2} (1 + \rho) \quad 0 \leq \rho < 1$$

Transzformációk hatása (korábbi példa):

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \cos \frac{2\pi}{N} \\ 0.5 \cos \frac{2\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_n^2 = 0.5$$

$$R = Q \Lambda Q^{-1},$$

$$Q^{-1} R Q = \Lambda,$$

$$\sigma_n^2 = 0.5$$

$$0.5 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} 1-\rho & 0 \\ 0 & 1+\rho \end{bmatrix},$$

A transzformált zaj minták szórása megváltozik!



$$Q^{-1}U = U' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$U'^T \Lambda^{-1} U' = [0 \quad \sqrt{2}] \frac{1}{\sigma_n^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \rho & 1 \\ 0 & 1 + \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{4}{1 + \rho}$$

$$[U'^T \Lambda^{-1} U']^{-1} = \frac{1 + \rho}{4} = \frac{\sigma_n^2}{2} (1 + \rho)$$

(4) Lineáris modell színes Gauss zajban:  $z = Ua + w$ ,  $w \sim \mathcal{N}(0, C)$ .  
Mivel  $C$  pozitív definit, létezik olyan invertálható  $D$  mátrix melyre:

$$C^{-1} = D^T D. \quad E[(Dw)(Dw)^T] = E[Dww^T D^T] = DCD^T = DD^{-1}(D^T)^{-1}D^T = I \quad \text{A zaj fehér lesz és egységnyi szórású!}$$

$$z' = Dz = DUa + Dw = U'a + w', \quad w' = Dw \sim \mathcal{N}(0, I).$$

$$f(a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |C_a|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(a - \mu_a)^T C_a^{-1} (a - \mu_a)}, \quad f(z|a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |C_w|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(z - Ua)^T C_w^{-1} (z - Ua)},$$

$$\frac{\partial \ln f(a)}{\partial a} + \frac{\partial \ln f(z|a)}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln f(a)}{\partial a} = -C_a^{-1}(a - \mu_a), \quad \frac{\partial \ln f(z|a)}{\partial a} = U^T C_w^{-1}(z - Ua),$$

$$\hat{a}_{MS} = [U^T C_w^{-1} U + C_a^{-1}]^{-1} [C_a^{-1} \mu_a + U^T C_w^{-1} z]$$

$$\hat{a}_{MS} = \mu_a + [U^T C_w^{-1} U + C_a^{-1}]^{-1} U^T C_w^{-1} [z - U \mu_a]$$

$$\hat{a}_{MS} = [U'^T U' + C_a^{-1}]^{-1} [C_a^{-1} \mu_a + U'^T z'],$$

$$\hat{a}_{MS} = \mu_a + [U'^T U' + C_a^{-1}]^{-1} U'^T [z' + U' \mu_a],$$

(5) Színes zaj fehér zajból:  $z = Ua + w$ ,  $w \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2 I)$ ,  $E[(Dw)(Dw)^T] = \sigma_w^2 D D^T = C$

$$D = chol\left(\frac{1}{\sigma_w^2} C\right) \quad (6) \text{ A mintavételi idő: } \frac{1}{f_0 N} \text{ a teljes periódusra, } \frac{0.1}{f_0 N} \text{ a periódus egy tizedére.}$$

(7) Megfigyelési vektor:

$$U = \begin{bmatrix} \sin & \cos & 1 \\ \sin & \cos & 1 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$



(8) A torzításról: Sokan használták:

Ez nem a megfelelő képlet!

$$b(a) = E\{\hat{a}_{MS}|a\} - a = E\left\{\frac{\mu_a + \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2} \sum_{k=0}^{N-1} z_k}{1 + N \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}}\right\} - a = \frac{\mu_a - a}{1 + N \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}}$$

$$b(\mathbf{a}) = E\{\hat{\mathbf{a}}_{MS}|\mathbf{a}\} - \mathbf{a} = \boldsymbol{\mu}_a + [\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{U} + \boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1}]^{-1} \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} (\mathbf{U} \mathbf{a} - \mathbf{U} \boldsymbol{\mu}_a) - \mathbf{a} =$$

$$= [\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{U} + \boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1}]^{-1} [[\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{U} + \boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1}] (\boldsymbol{\mu}_a - \mathbf{a}) + \mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{a} - \boldsymbol{\mu}_a)] = [\mathbf{U}^T \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1} \mathbf{U} + \boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1}]^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{aa}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_a - \mathbf{a})$$

Az ML és az LS becslő torzítatlan!

(9) Melyik a legjobb becslő? Amelyiknek legkisebb a bizonytalansága!

**1.4.-1.5.** A feladat értelmezhető úgy is, hogy  $M$  szinuszgenerátorunk van, és keressük a paraméterek átlagát és szórását.

Itt az átlagoknak a paraméterek várható értékét kellett közelíteni, az átlagtól való eltérés négyzete átlagának pedig a szórásnégyzetekhez: az  $N = 100$  és  $\rho_1 = \rho_2 = 0$  esetén látványos mértékben, mert a megfigyelési zaj hatását jelentős mértékben elnyomtuk.

**1.6.** A megfigyelési zaj korreláltsága miatt a következő összefüggéseket kellett használni:

$$f(\mathbf{z}; a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\mathbf{C}_w|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{s}(a))^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{s}(a))} \quad \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; a)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{s}(a))^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{s}(a)) \right] = \frac{\partial \mathbf{s}^T(a)}{\partial a} \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{s}(a))$$

$$-E \left\{ \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; a)}{\partial a^2} \right\} = \frac{\partial \mathbf{s}^T(a)}{\partial a} \mathbf{C}_w^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}(a)}{\partial a}$$

$$\text{var}(a) \geq \frac{1}{\frac{\partial \mathbf{s}^T(a)}{\partial a} \mathbf{C}_w^{-1} \frac{\partial \mathbf{s}(a)}{\partial a}}$$

$s(t, f_0) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ ,  
Ebből veszünk  $N$  mintát!

**Tervezési szempont:** mintavételi frekvencia helyes megválasztása

**1.7.** A nemlinearitás felharmonikust és egyenkomponenst termel. Ehhez a jelhez kell megfelelő jelet illeszteni.

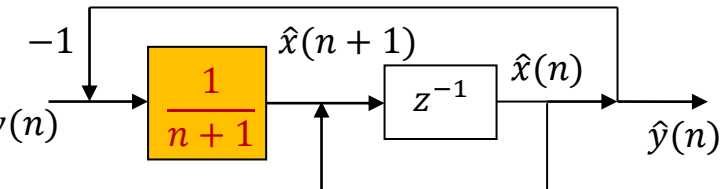


# 7. Modellalapú jelfeldolgozás (Jegyzet 73-100. oldalak)

A jeleket az őket generálni képes modellekkel reprezentáljuk, és ezeknek a modelleknek a feltételezésével megfigyelőket készítünk. A keresett jel-jellemzők a megfigyelő jellemzőiből kiolvashatók.

## 7.1. Az alapok felidézése példákon keresztül Egyszerű átlagolás:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y(k) = \frac{n}{n+1} \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} y(n)$$



$$= \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} [y(n) - \hat{x}(n)] \quad \text{Itt } \mathbf{A} = \mathbf{C} = 1, \mathbf{G}(n) = \frac{1}{n+1}. \mathbf{G}(n) \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

Exponenciális átlagolás:  $\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + by(n)$ , ahol  $a$  és  $b$  konstansok.

A frekvenciatartománybeli viselkedés leírására használható a  $z$ -transzformáció:

$$z\hat{X}(z) = a\hat{X}(z) + bY(z), \quad H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{b}{z-a} = \frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}} \quad H(z) = 1, \text{ ha } z = 1 \rightarrow f = 0.$$

$$H(1) = \frac{b}{1-a} = 1 \quad \text{vagyis } a = 1 - b \rightarrow \hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + b(y(n) - \hat{x}(n)). \quad \text{Itt is } \mathbf{A} = \mathbf{C} = 1, \text{ továbbá } \mathbf{G}(n) = b.$$

$$\hat{x}(0) = 0,$$

$$\hat{x}(1) = by(0),$$

Mivel  $0 < b < 1$ , a régebbi mintákat egyre kisebb súllyal vesszük figyelembe.

$$\hat{x}(2) = \hat{x}(1) + b(y(1) - \hat{x}(1)) = by(1) + (1-b)by(0)$$

$$\hat{x}(3) = \hat{x}(2) + b(y(2) - \hat{x}(2)) = by(2) + b(1-b)y(1) + b(1-b)^2y(0),$$

$$\hat{x}(n+1) = by(n) + b(1-b)y(n-1) + \dots + b(1-b)^ny(0)$$

Az összefüggés úgy is származtatható, hogy az átviteli függvényt mértani sor alakba rendezzük.

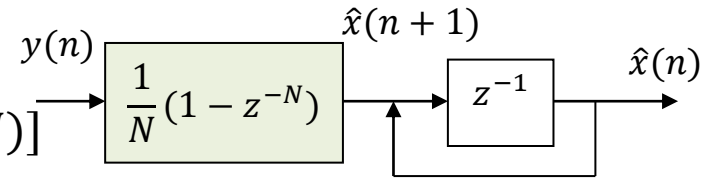
$$q = 1 - b$$



**Megjegyzés:** Az exponenciális átlagolás egy rögzített sávzélességű aluláteresztő szűrésnek felel meg. Hozzá képest az egyszerű átlagolás úgy illusztrálható, mint folyamatosan egyre kisebb sávzélességű aluláteresztő szűrő.

Csúszó-ablakos (sliding window, moving average) átlagolás:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n y(k) = \hat{x}(n) + \frac{1}{N} [y(n) - y(n-N)]$$



Itt is  $A = C = 1$ , de a becsatolás módja más. Itt is tudjuk értelmezni az átlagoló átviteli függvényét:

$$z\hat{X}(z) = \hat{X}(z) + \frac{1}{N} (1 - z^{-N})Y(z),$$

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} (1 - z^{-N})}{N (1 - z^{-1})}$$

**Megjegyzések:** 1.  $1 - z^{-N}$  osztható az  $1 - z^{-1}$  tényezővel:

$$\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(N-1)},$$

ami azt fejezi ki, hogy  $N$  egymást követő mintát adjunk össze.

2. A  $1 - z^{-N}$  tényező gyökei az  $N$ -edik egységgyökök:  $z^N - 1 = 0, z = \sqrt[N]{1}$ .

**1. Példa:** Két megfigyelt érték egyszerű átlaga, az átlag frekvenciatartománybeli viselkedése:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{y(n) + y(n-1)}{2}, \quad z\hat{X}(z) = \frac{1 + z^{-1}}{2} Y(z), \quad H(z) = z^{-1} \frac{1 + z^{-1}}{2}$$

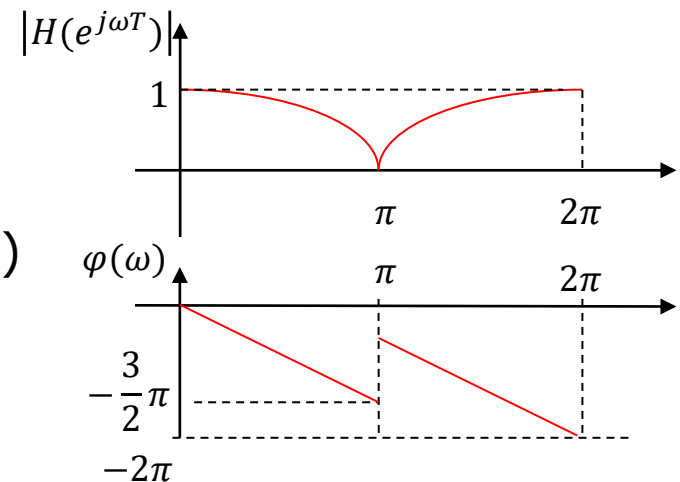
$z = e^{j\omega T}$  helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T} \frac{1 + e^{-j\omega T}}{2} = e^{-j\frac{3}{2}\omega T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2} = e^{-j\frac{3}{2}\omega T} \cos \frac{\omega T}{2}$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika:  $|H(e^{j\omega T})| = \left| \cos \frac{\omega T}{2} \right|$

a fázis-karakterisztika:  $\phi(\omega) = -\frac{3}{2}\omega T$ , az  $\omega T = k\pi$  helyen ( $k = \pm 1, \pm 3, \dots$ )

(az előjelváltás miatt)  $\pi$  fázisugrással.



**2. Példa:** Két megfigyelt érték különbsége (egyszerű differenciálás), frekvenciatartománybeli viselkedése:

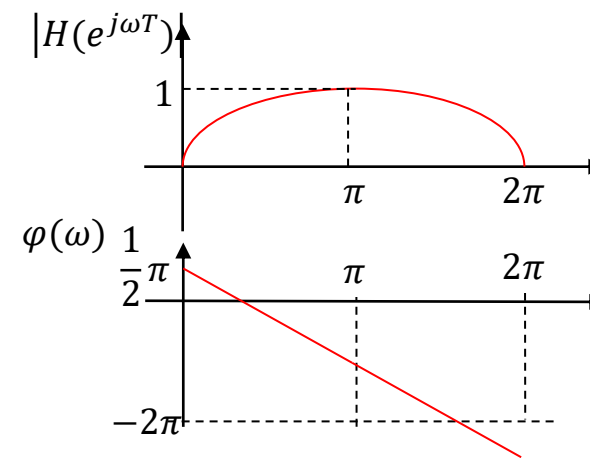
$$\hat{x}(n+1) = \frac{y(n) - y(n-1)}{2}, \quad z\hat{X}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{2} Y(z), \quad H(z) = z^{-1} \frac{1 - z^{-1}}{2}. \quad z = e^{j\omega T} \text{ helyettesítéssel:}$$

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T} \frac{1 - e^{-j\omega T}}{2} = je^{-j\frac{3}{2}\omega T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j} = je^{-j\frac{3}{2}\omega T} \sin \frac{\omega T}{2}$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika:  $|H(e^{j\omega T})| = \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right|$ ,

a fázis-karakterisztika:  $\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega T$ , az  $\omega T = k2\pi$  helyen, ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

(az előjelváltás miatt)  $\pi$  fázisugrással.



**3. Példa:** Csúszó-ablakos átlagolás, frekvenciatartománybeli viselkedése:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} (1 - z^{-N})}{N (1 - z^{-1})} \quad H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T} (1 - e^{-jN\omega T})}{N (1 - e^{-j\omega T})} = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T} (e^{j\frac{N\omega T}{2}} - e^{-j\frac{N\omega T}{2}})}{N (e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}})} = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T} \sin \frac{N\omega T}{2}}{N \sin \frac{\omega T}{2}}$$

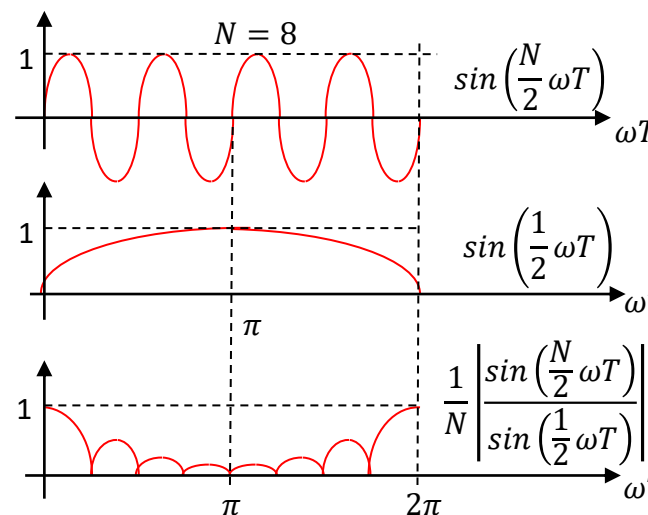
Ebből az amplitúdó-karakterisztika:  $|H(e^{j\omega T})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|$

a fázis-karakterisztika:  $\phi(\omega) = -\frac{N+1}{2}\omega T$

az  $\omega T = k \frac{2\pi}{N}$  helyen, ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ )

(az előjelváltás miatt)  $\pi$  fázisugrással,

kivéve azokat a helyeket, ahol  $\sin \frac{\omega T}{2}$  is előjelet vált.



## 7.2. Jelek reprezentációja jelterekben

**Jelterek:** az euklideszi tér általánosításai

- általánosított távolság → **metrikus tér**
- algebrai alpműveletek + linearitás → **lineáris tér**
- norma (kapcsolat a metrikával) → **normált lineáris tér**
- skalár v. belső szorzat →  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$ .

Hasznos az ún. reciprok bázis alkalmazása:  $\theta_m, m = 0, 1, \dots, N - 1$ , ahol  $(\phi_m, \theta_n) = \delta_{mn}, \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = n \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

Ezzel:  $(\mathbf{x}, \theta_n) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m (\phi_m, \theta_n) \rightarrow \alpha_m = (\mathbf{x}, \theta_m)$ . A bázis ortonormált, ha  $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}$ , amivel

$$\mathbf{x} = \sum_{m=0}^{N-1} (\mathbf{x}, \phi_m) \phi_m.$$

**Megjegyzés:**  $\phi_m = [\phi_m(0), \phi_m(1), \dots, \phi_m(N - 1)]^T$ , ahol a zárójelben megadott indexek értelmezhetők diszkrét időindexként.

**Lineáris tér:** A bázisok folytonos függvények (végtelen dimenziós „vektorok”), azaz  $\phi_m \rightarrow \phi_m(t), \theta_m \rightarrow \theta_m(t)$ .

Ezzel az  $x(t)$  jel reprezentációja:

$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \phi_m(t)$  ahol  $\alpha_m = (x(t), \theta_m(t))$  a bázisoknál  $m$  szerint is végtelen finom felbontás, ill. végtelen dimenzió: a bázisokból összeáll egy kétváltozós függvény, a súlyozó együttható helyére pedig egy egyváltozós függvény lép.  $m \rightarrow s$ ,

**Példa:** Fourier sorfejtés:

$$\phi_m(t) = \exp(j2\pi mt),$$

$$\theta_m(t) = \exp(-j2\pi mt), \quad m = 0, 1, \dots$$

**Lineáris vektortér:** Bázisvektorok:  $\phi_m, m = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Ezekkel az  $\mathbf{x}$  vektor reprezentációja:

$$\mathbf{x} = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \phi_m,$$

ahol  $\{\alpha_m\}, m = 0, 1, \dots, N - 1$ , a báziselemekből készített lineáris kombináció súlytényezője.

A súlytényezők meghatározása:  $(\mathbf{x}, \phi_n) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m (\phi_m, \phi_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  egyenletrendszer megoldásával.

### Integrál-transzformáció:

ilyenkor  $x(t) = \int_S \alpha(s) \phi(t, s) ds$   $\alpha(s) = \int_T x(t) \theta(s, t) dt$

integrál-transzformáció párok.

**Példa:** Fourier integrál:

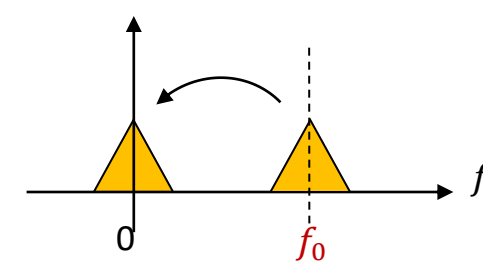
$$\phi(t, s) = 1/\theta(s, t) = \exp(j2\pi st).$$





## Megjegyzés:

A Fourier integrál hatása: Az  $x(t)$  jelet szorozzuk az  $\exp(-j2\pi f_0 t)$  komplex exponenciálissal, aminek hatására a jel spektruma balra tolódik  $f_0$ -val.

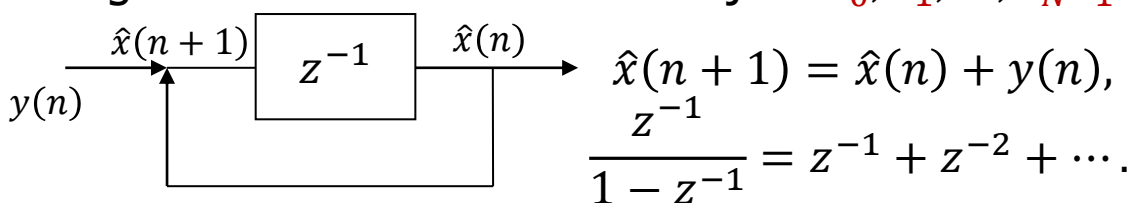


Az integrálás végtelen keskeny alul-áteresztő szűrőnek felel meg, amelynek kimenetén az  $f_0$  frekvencianál érvényes spektrum-értéket kapjuk.

## 7.3. Megfigyelő jelfeldolgozási feladatokra

A mérendő jelről azt tételezzük fel, hogy a bázis-rendszer elemek lineáris kombinációjaként áll elő, és a bázisvektorok dimenziójának megfelelő mintából álló diszkrét jel.

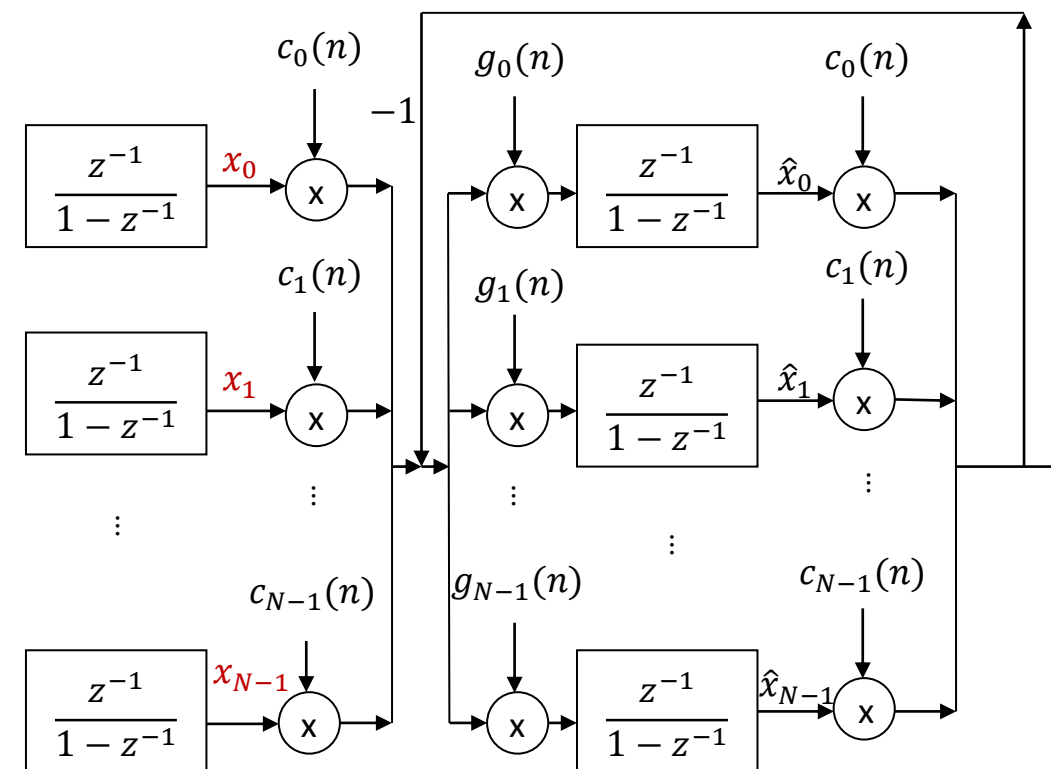
A súlyozó együtthatókat bemenet nélküli, diszkrét integrátorokban tárolt értékek adják:  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$

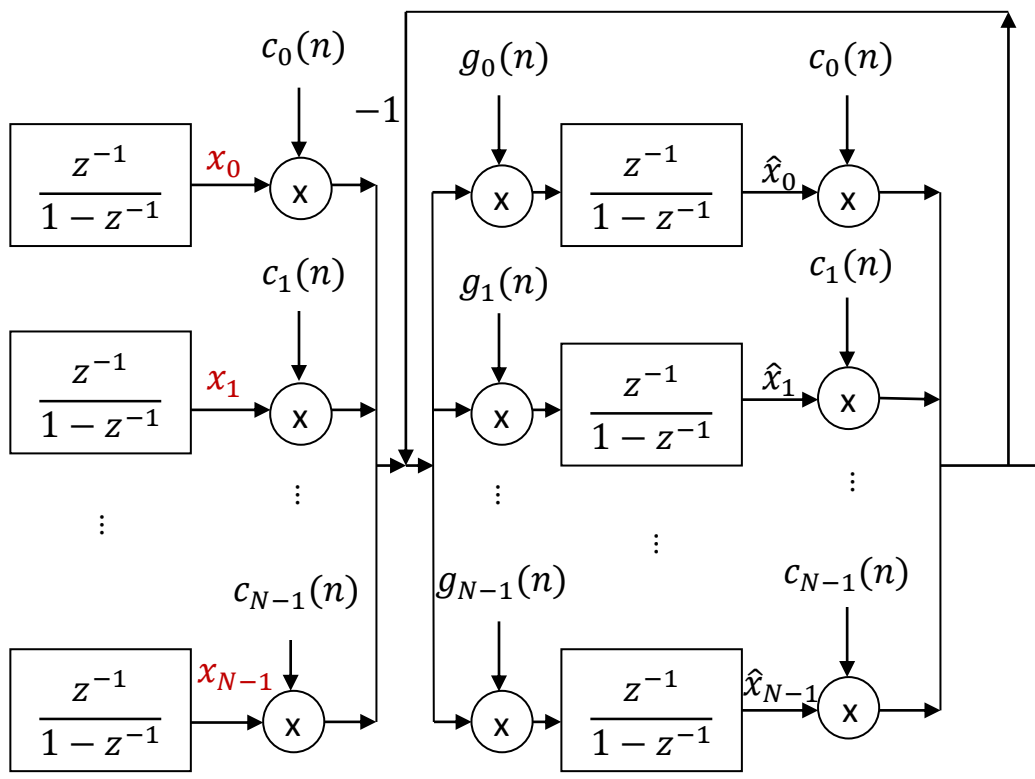


**Jelölés:**  $\{c_m(n)\}$ ,  $\{g_m(n)\}$  jelöli a bázis/reciprok bázis rendszereket,  $m, n = 0, 1, \dots, N-1$ .

$n$ : „diszkrét idő” index     $m$ : „diszkrét frekvencia” index

$\mathbf{x}(n) = [x_0(n) \ x_1(n) \ \dots \ x_{N-1}(n)]^T$  a jelet generáló hipotetikus rendszer állapotváltozói. Ezek  $\hat{\mathbf{x}}(n) = [\hat{x}_0(n) \ \hat{x}_1(n) \ \dots \ \hat{x}_{N-1}(n)]^T$  A hipotetikus jelgeneráló rendszert leíró egyenletek:  $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{x}(n)$ ;  $y(n) = \mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n)$ ,  
 becslőjét megfigyelővel állítjuk elő.  
 Méréselmélet 9. előadás, 2021. április 21.





$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{x}(n); \quad y(n) = \mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n).$       A megfigyelő:  
 $\hat{\mathbf{x}}(n+1) = \hat{\mathbf{x}}(n) + \mathbf{g}(n)\mathbf{c}^T(n)[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)]$       A hibarendszer:  
 $\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1) = (\mathbf{I} - \mathbf{g}(n)\mathbf{c}^T(n))[\mathbf{x}(n) - \hat{\mathbf{x}}(n)],$   
 illetve a kezdeti értékek eltéréséből indítva:

$$\mathbf{x}(n+1) - \hat{\mathbf{x}}(n+1) = \prod_{k=0}^n (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k))[\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)]$$

$N$  lépéses konvergenciát akkor kapunk, ha:

$$\prod_{k=0}^{N-1} (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k)) = \mathbf{0}.$$

Ez viszont teljesül, ha  $\{c_m(n)\}$ , és  $\{g_m(n)\}$  bázis/reciprok bázis párt alkotnak ( $m, n = 0, 1, \dots, N-1$ )!

### Bizonyítás:

A szorzat minden olyan tagja, melyben szerepel  $\mathbf{g}(i)\mathbf{c}^T(i)\mathbf{g}(j)\mathbf{c}^T(j)$ , és  $i \neq j$ : nullát ad a bázis/reciprok bázis elemek ortogonalitásának köszönhetően. Ami marad:

Írjuk fel a  $\mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k)$  diadikus szorzatot:

$$\prod_{k=0}^{N-1} (\mathbf{I} - \mathbf{g}(k)\mathbf{c}^T(k)) = \mathbf{I} - \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{g}(i)\mathbf{c}^T(i) = \mathbf{0}.$$

$$\begin{bmatrix} g_0(k) \\ g_1(k) \\ \vdots \\ g_{N-1}(k) \end{bmatrix} [c_0(k) \quad c_1(k) \quad \dots \quad c_{N-1}(k)] = \begin{bmatrix} g_0(k)c_0(k) & g_0(k)c_1(k) & \dots & g_0(k)c_{N-1}(k) \\ g_1(k)c_0(k) & g_1(k)c_1(k) & \dots & g_1(k)c_{N-1}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1}(k)c_0(k) & g_{N-1}(k)c_1(k) & \dots & g_{N-1}(k)c_{N-1}(k) \end{bmatrix}$$

Ha ezek után,  $k$ -t futtatva, minden mátrix elemre végrehajtjuk az összegzést,

akkor minden elem helyén egy-egy bázis-reciprok bázis vektor skalár-szorzatát számítjuk ki, aminek eredményeképpen a főátlóban 1-esek, az összes többi helyen pedig 0-ák fognak állni.



## Megjegyzések:

1. A diszkrét Fourier transzformáció (DFT) esetén:  $\left\{ c_m(n) = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}mn\right) \right\}, \quad \left\{ g_m(n) = \frac{1}{N} \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}mn\right) \right\}$

2. Az  $x = Ty$  jeltranszformáció értelmezése a bázis/reciprok bázis rendszerrel: Először írjuk fel, hogyan képzeljük el a jel létrejöttét:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0(0) & c_1(0) & \cdots & c_{N-1}(0) \\ c_0(1) & c_1(1) & \cdots & c_{N-1}(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_0(N-1) & c_1(N-1) & \cdots & c_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

ahol az  $x$  vektor elemei a mátrix oszlopaiként megjelenő bázis vektorok súlytényezői.  
A jel-transzformáció célja a jelből ( $y$  vektor) kinyerni ezeket a súlytényezőket.

Ennek módja az  $y$  vektor szorzása a

$$T = \begin{bmatrix} g_0^T \\ g_1^T \\ \vdots \\ g_{N-1}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0(0) & g_0(1) & \cdots & g_0(N-1) \\ g_1(0) & g_1(1) & \cdots & g_1(N-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}(0) & g_{N-1}(1) & \cdots & g_{N-1}(N-1) \end{bmatrix}$$

A jel-transzformáció mátrixának sorai tehát a reciprok-bázis vektorok!

3. A megfigyelővel a „megfigyelés” az első  $N$  lépés után folytatható, a kapott eredmény mindig az utolsó  $N$  mintára vonatkozik (Csúszó-ablakos feldolgozás).

mátrixszal.

4. A megadott módon tetszőleges diszkrét transzformáció megvalósítható csúszó-ablak (rekurzív) jelleggel. A számításigény  $N$  hosszú blokkra  $\sim N^2$ -tel arányos, egy újabb lépés számításigénye pedig  $\sim N$ -tel.

Ehhez  $c(N) = c(0)$  ill.  $c(k) = c(k \bmod N)$   
 $g(N) = g(0)'$  ill.  $g(k) = g(k \bmod N)$

5. Gyakran használjuk a diszkrét Fourier transzformáció párt, amelynek összefüggései:

$$x(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{j\frac{2\pi}{N}mn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Itt  $y(n)$  a feldolgozandó diszkrét időfüggvény mintáit jelöli,  $x(m)$  pedig a harmonikus komponensek súlytényezőit.



## A rekurzív jelreprezentáció sajátosságai:

(1) Soros-párhuzamos átalakító: az időtartományban értelmezhető  $N$  mintából, az  $N$  minta beérkezését követően előáll a párhuzamos csatornákon  $N$  adat, amely egyértelműen reprezentálja az  $N$  időtartománybeli mintát.

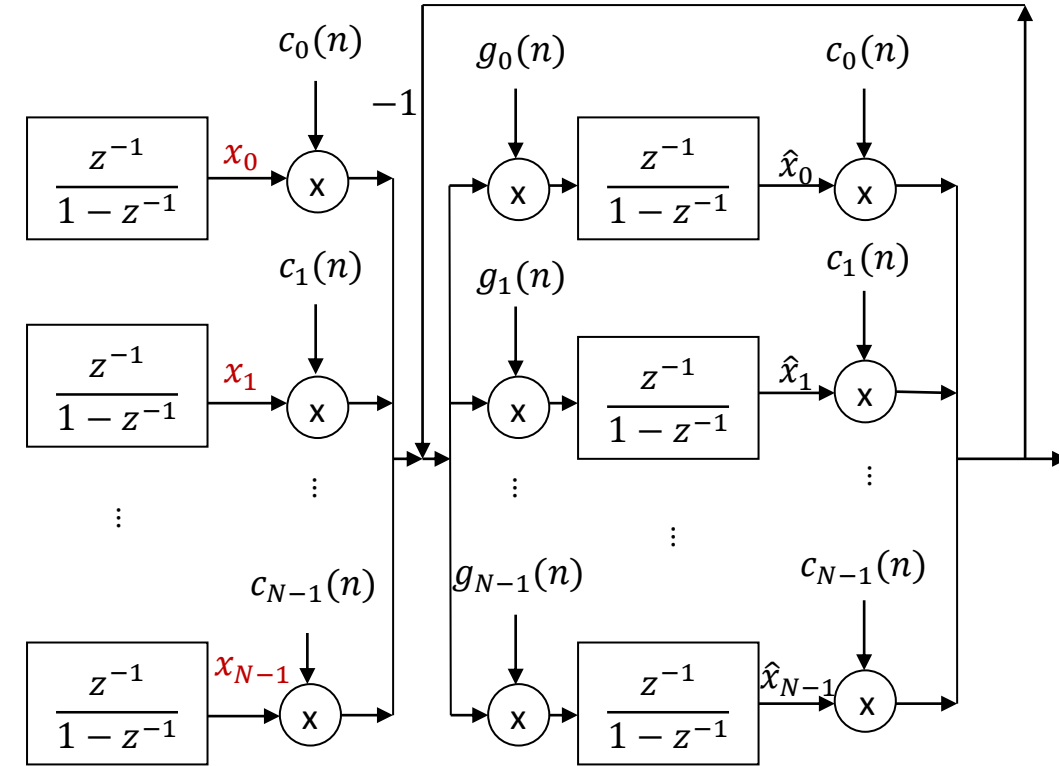
(2) A számítást folytatva további  $N$  mintára ismét előáll a transzformált tartománybeli reprezentáció. Így folytatva, rendre az  $N$  mintából álló adatblokk egyértelmű reprezentációját kapjuk a blokkméretnek megfelelő mértékű mintavételi-frekvencia csökkentéssel (ún. decimációval.)

(3) Az ilyen előállítás minden lépésben a legutolsó  $N$  minta transzformáltját adja, azaz csúszó-ablakos/rekurzív transzformációt valósít meg.

(4) A megvalósított transzformációk a rekurzív előállítás következtében interpretálhatók  $N$  csatornás szűrőkként, ahol a szűrők kimenete kétféleképpen képezhető:

(a) A diszkrét integrátorok kimenete, mint szűrő kimenet, amely folyamatosan az  $n = 0$  időpontban indított, majd periodikusan folytatott bázis-vektorok súlytényezőit becsüli (Fourier esetben ezek a diszkrét „Fourier-sorfejtés” együtthatói). Ideális esetben ( $N$ -re periodikus, megfelelően sávkorlátozott jel), miután a megfigyelő az első  $N$  lépésben konvergált, a bemenőjel tulajdonságaiból fakadóan a diszkrét integrátorok kimenete állandó marad;

(b) A diszkrét integrátorok utáni keverők kimenetei, amelyek a legutolsó  $N$  minta Fourier transzformáltját szolgáltatják, amelyek megegyeznek a folyamatosan a feldolgozott jel komponenseinek aktuális mintáival (Fourier esetben ezek az ún. „Fourier komponensek”). Ezek a komponensek minden  $N$  periódus kezdetén megegyeznek a bázis-vektorok előzőekben értelmezett súlytényezőivel.



## Kis kitérő: A valós együtthatós és a komplex együtthatós diszkrét Fourier sorfejtés kapcsolata

Ha a jel egy periódusa  $N$  mintából áll, és időtartama  $N/f_m$ , ahol  $f_m$  a mintavételi frekvencia, akkor a valós együtthatós diszkrét Fourier sorfejtés:

$N$  páros esetén:  $0, \frac{f_m}{N}, 2 \frac{f_m}{N}, \dots, \frac{f_m}{2}$  frekvenciájú komponensekből fog állni.

$N$  páratlan esetén:  $0, \frac{f_m}{N}, 2 \frac{f_m}{N}, \dots, (N-1) \frac{f_m}{2N}$  frekvenciájú komponensekből fog állni.

### Egy valós értékészletű $y(n)$ diszkrét jel sorfejtett alakja:

$N$  páros esetén:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} [A_k \cos(\frac{2\pi}{N}kn) + B_k \sin(\frac{2\pi}{N}kn)] + A_{\frac{N}{2}} \cos(\pi n) = \\
 &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left[ A_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2} + B_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} - e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2j} \right] + A_{\frac{N}{2}} \frac{e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}}{2} = \\
 &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left[ \underbrace{\left( \frac{A_k - jB_k}{2} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}_{\text{Konjugált komplex párok}} + \underbrace{\left( \frac{A_k + jB_k}{2} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{\text{Konjugált komplex párok}} \right] + A_{\frac{N}{2}} e^{j\pi n}
 \end{aligned}$$

Konjugált komplex párok

$N$  páratlan esetén:

$$\begin{aligned}
 y(n) &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} [A_k \cos(\frac{2\pi}{N}kn) + B_k \sin(\frac{2\pi}{N}kn)] = \\
 &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[ A_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2} + B_k \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kn} - e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}{2j} \right] = \\
 &= A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[ \underbrace{\left( \frac{A_k - jB_k}{2} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}_{\text{Konjugált komplex párok}} + \underbrace{\left( \frac{A_k + jB_k}{2} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{\text{Konjugált komplex párok}} \right]
 \end{aligned}$$

Konjugált komplex párok

A diszkrét inverz Fourier

transzformáció összefüggése:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

A diszkrét Fourier

transzformáció összefüggése:

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$



$$y(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \left[ \left( \frac{A_k - jB_k}{2} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + \left( \frac{A_k + jB_k}{2} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] + \frac{A_N}{2} e^{j\pi n}$$

$$y(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left[ \left( \frac{A_k - jB_k}{2} \right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + \left( \frac{A_k + jB_k}{2} \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right]$$

$$A_0 = Y(0), \quad \frac{A_k - jB_k}{2} = C_k = Y(k), \quad k = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad A_N = Y\left(\frac{N}{2}\right),$$

$$A_0 = Y(0), \quad \frac{A_k - jB_k}{2} = C_k = Y(k), \quad k = 1, \dots, \frac{N-1}{2},$$

$$\frac{A_{k-\frac{N}{2}} + jB_{k-\frac{N}{2}}}{2} = C_{k-\frac{N}{2}}^* = Y(k), \quad k = \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1$$

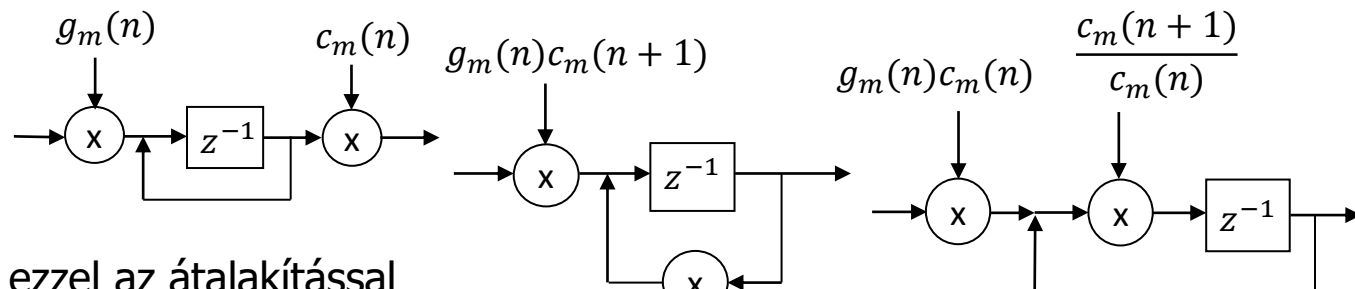
$$\frac{A_{k-\frac{N-1}{2}} + jB_{k-\frac{N-1}{2}}}{2} = C_{k-\frac{N-1}{2}}^* = Y(k), \quad k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1.$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Látható, hogy a komplex forma sokkal tömörebb írásmódot tesz lehetővé. A továbbiakban a komplex formát használjuk. **(Kitérő vége.)**

### Kevertés-integrálás-kevertés helyett sávszűrés:

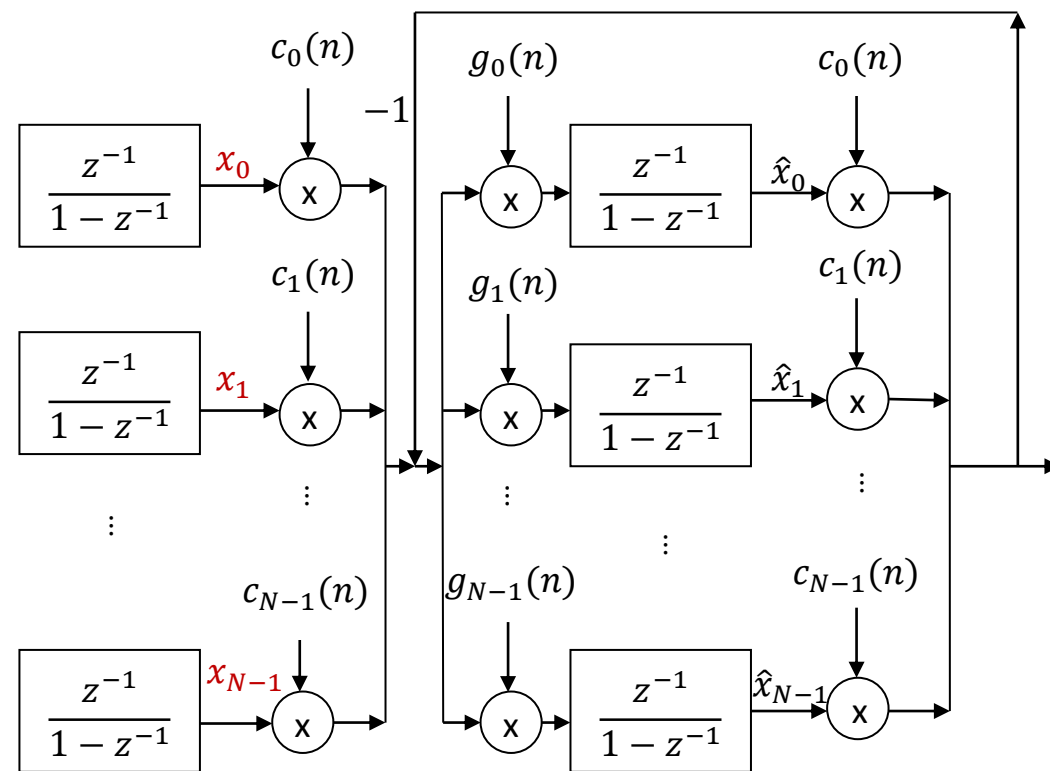


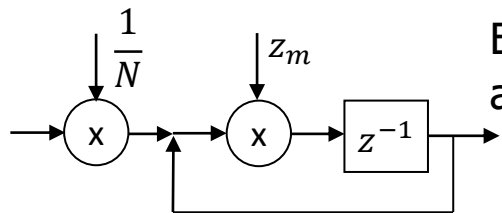
ezzel az átalakítással az elrendezés független lett az  $n$  diszkrét időváltozótól!

A DFT esetében

$$\frac{c_m(n+1)}{c_m(n)} = e^{j\frac{2\pi}{N}m} = z_m,$$

$$g_m(n)c_m(n) = \frac{1}{N}$$





Egy ilyennek az átviteli függvénye az  $m$ -edik csatorna esetében:

$$H_m(z) = \frac{1}{N} \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}} \quad z_m = e^{j\frac{2\pi}{N}m}$$

Az átalakítással létrejött részegységet **rezonátornak** nevezzük, mert egyetlen (komplex) pólusa az egységsugarú körön, és ezzel a stabilitás határán helyezkedik el.

A megfigyelő csatornáinak összegzésével létrejövő kimenetre vonatkozó átviteli függvény:

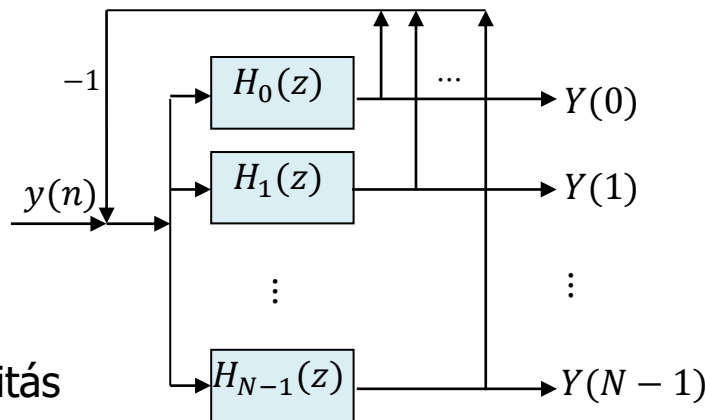
$$H_P(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}$$

Mivel ez a megfigyelő  $N$  lépésben konvergált, és utána már hibátlanul előállítja a bemenőjelet, ezért  $H_P(z) = z^{-N}$  kell, hogy legyen!

A  $H_P(z)$  összefüggés számlálóját és nevezőjét is szorozva  $\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1}) = 1 - z^{-N}$  tényezővel:

$$= N(z^{-N} + (z^{-N})^2 + (z^{-N})^3 + \dots) = N \frac{z^{-N}}{1 - z^{-N}}$$

mivel az  $N$ -edik egységgyökök (és hatványaik) összege a  $N$ -edik hatvány kivételével nulla.



$$T_m(z) = \frac{H_m(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N} \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}}{1 + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}$$

A megfigyelő egyetlen csatornájának átviteli függvénye:

Fontos tulajdonság, hogy  $T_m(z)|_{z=z_m} = 1$ , ill.  $T_m(z)|_{z=z_n, z \neq z_m} = 0$ .

A rezonátor pólusnak megfelelő frekvencián a hurokerősítés végtelen!

Fontos tulajdonság, hogy  $H_P(z)|_{z=z_n} = 1$ .

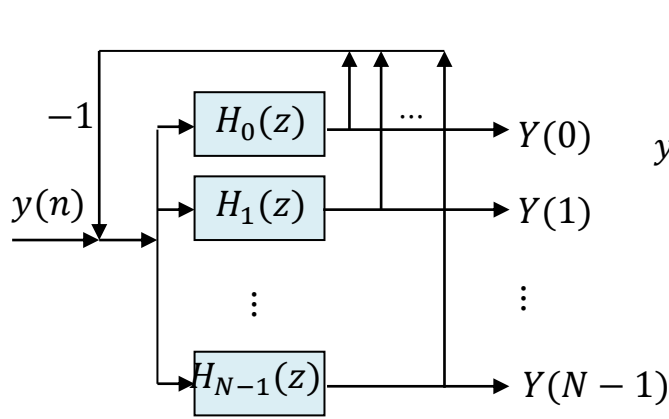
$$H_P(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)}{1 + \sum_{n=0}^{N-1} H_n(z)} = \frac{\frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}}{(1 - z^{-N}) + \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}}} = z^{-N}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = \sum_{n=0}^{N-1} [z_n z^{-1} + (z_n z^{-1})^2 + (z_n z^{-1})^3 + \dots] = z^{-N}$$

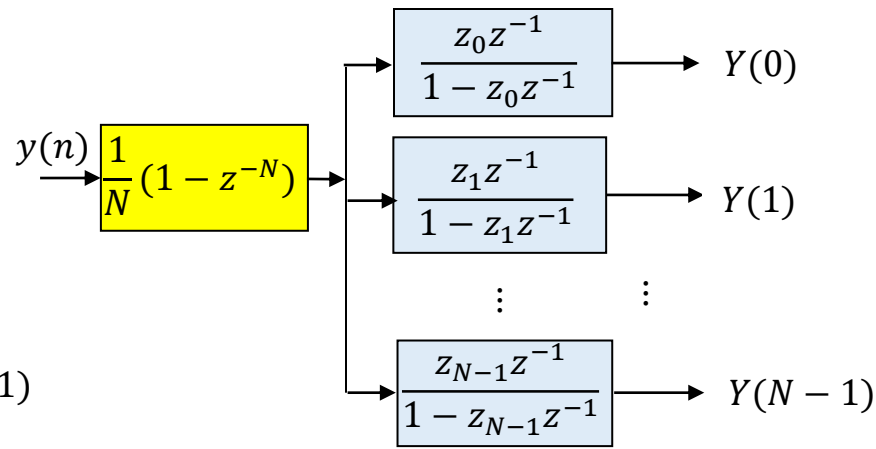
$H_P(z)$  alternatív megvalósítása:  $H_P(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = z^{-N}$ .

$T_m(z)$  alternatív megvalósítása:  $T_m(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}$ .

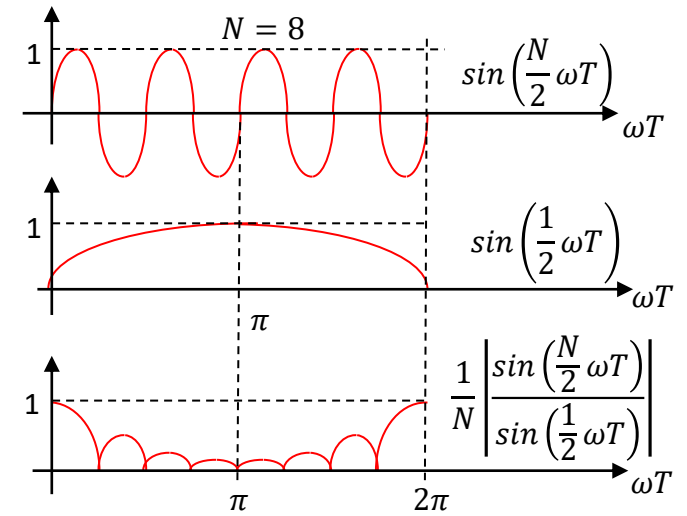




### Rezonátoros struktúra



### Lagrange struktúra



$m = 0$  esetén ( $z_0 = 1$ ) megegyezik a csúszó ablakos átlagoló átviteli függvényével:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} (1 - z^{-N})}{N (1 - z^{-1})}, \quad H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\frac{N+1}{2}\omega T} \sin\frac{N\omega T}{2}}{N \sin\frac{\omega T}{2}}$$

Ez olyan amplitúdó-karakterisztikájú szűrő, amelynek sávközepe nem nulla frekvencián, hanem a  $z_m$  gyöktényező által kijelölt frekvencián, azaz a mintavételi frekvencia  $m/N$ -szeresénél van. A szűrő a  $N$  szélességű ablakra nézve periodikus jelek komponenseit, a  $m$ -edik kivételével, tökéletesen kiszűri, mert a harmonikus frekvencia pozíciókban a számláló átvitele nulla.



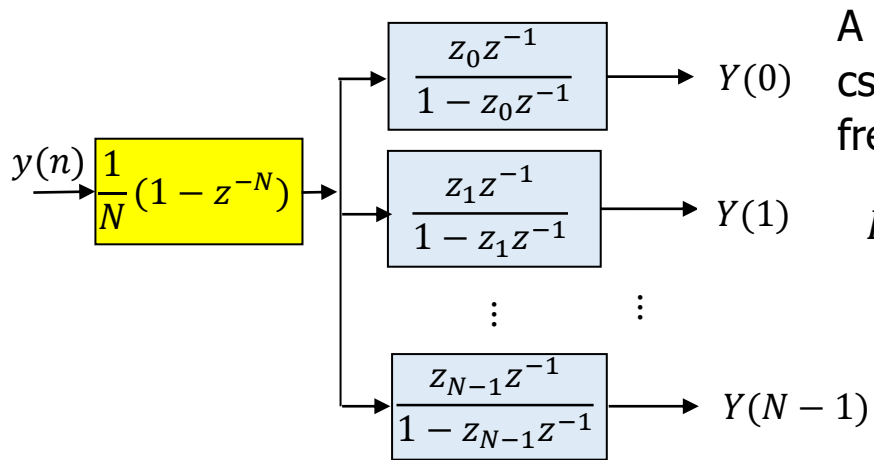
$$H_P(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z_n z^{-1}}{1 - z_n z^{-1}} = z^{-N}. \quad T_m(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \frac{z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}$$

$T_m(z)$  impulzusválasza/súlyfüggvénye az  $m$ -edik (reciprok) bázisvektor, amely  $N$  mintából áll.

$$\begin{aligned} T_m(z) &= z_m z^{-1} + (z_m z^{-1})^2 + (z_m z^{-1})^3 + \dots + (z_m z^{-1})^N \rightarrow Y(m) = \\ &= \frac{1}{N} \left[ y(n - N) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^N + y(n - N + 1) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^{N-1} + \dots + (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^1 y(n - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \left[ y(n - N) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^0 + y(n - N + 1) (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^{-1} + \dots + (e^{j\frac{2\pi}{N}m})^{-(N-1)} y(n - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{N} \left[ y(n - N) (e^{-j\frac{2\pi}{N}m})^0 + y(n - N + 1) (e^{-j\frac{2\pi}{N}m})^1 + \dots + (e^{-j\frac{2\pi}{N}m})^{(N-1)} y(n - 1) \right] \end{aligned}$$

Véges impulzusválaszú szűrő, mert számlálója osztható a nevezőjével. Számlálója az ún. fésűs szűrőt valósítja meg, amelynek  $m$  indexű fogát a pólus „kitöri”.



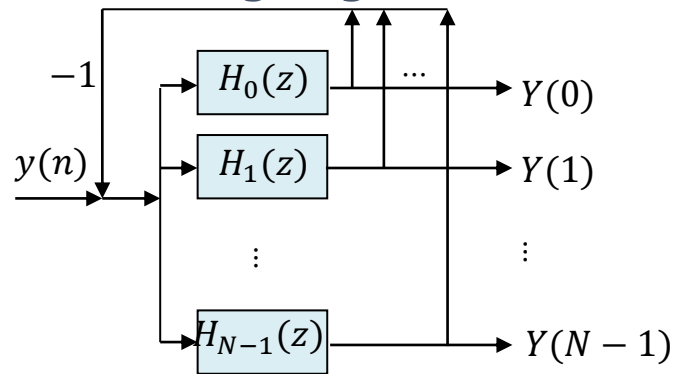


A Lagrange interpoláció frekvenciatartománybeli megvalósítására alkalmas. Az egyes csatornák átviteli függvényei a Lagrange polinomoknak feleltethetők meg, a frekvenciatartománybeli interpoláció pedig ezek lineáris kombinációja révén jön létre.

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} w_n T_n(z), \quad w_n = H(z_n), \quad \text{Ún. frekvencia-mintavételi eljárás: FIR szűrők.}$$

Stabilitás határán lévő rendszer, mert rezonátort tartalmaz, amely bemeneti jel nélkül is képes kimeneti jelet produkálni, ha nullától különböző kezdeti értékről indítjuk a működését. A pólus-zérus kiejtés nem lesz tökéletes.

### Lagrange struktúra



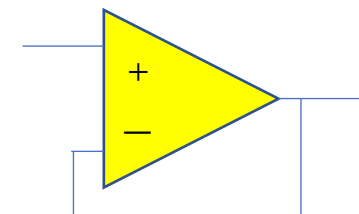
### Rezonátoros struktúra

A numerikus/stabilitási problémák csökkentése : (a) az  $1 - z^{-N}$  polinom helyett  $\prod_{n=0}^{N-1} (1 - z_n z^{-1})$  valósítandó meg, mégpedig azonos módon, mint a pólusokat. (b) Rezonátoros struktúrát alkalmazunk, ahol az egymást kiejtő zérust és pólust ugyanaz a hardver valósítja meg.

A megfigyelő alapú (rezonátoros) struktúra kedvezőbb tulajdonságokkal rendelkezik, mint a Lagrange struktúra. Minden olyan feladat ellátásra alkalmas, amire a Lagrange struktúrát kitalálták, számos egyéb lehetőséget is kínál: (a) Lagrange interpoláció tetszőleges (de különböző) rezonátor pólusok esetében; (b) tetszőleges átviteli függvény pólus megvalósítása.

Valós együtthatós, ill. valós együtthatós formára hozható átviteli függvények gyökei vagy valósak, vagy konjugált komplex párban jelentkeznek. A  $z_m$  komplex rezonátor pólusnak a  $z_m^* = 1/z_m = z_m^{-1}$  konjugáltja mindig fellehető.

A 100%-ban negatív visszacsatolású rezonátor-struktúra kedvező tulajdonságai analógiába hozhatóak a hasonlóképpen visszacsatolt műveleti erősítő tulajdonságaival: az igen nagy hurokerősítés nagy pontosságot tesz lehetővé.



**Köszönöm a figyelmet!**



