Méréselmélet

6. fejezet: LS becslők rekurzív számítása

2021. március 31.

Némi útmutatás a 2. házi feladathoz:

1.1. Állítson elő $u(n), n = 0, 1, \ldots$ diszkrét értéksorozatot **multiszinusz generátor** „segítségével”, mégpedig úgy, hogy a diszkrét jel $\boldsymbol{M = 100}$ **páratlan harmonikus komponensből álljon**, az egyes harmonikus komponensek amplitúdója egységnyi, kezdőfázisa véletlen, és a sorozat várható értéke pedig 1 legyen!

$$\boxed{u(n) = 1 + \sum_{i=0}^{M-1} \cos\left(\frac{2\pi}{N}(2i+1)n + \varphi_{2i+1}\right)} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M-1}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{N}(2i+1)n+\varphi_{2i+1}\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}(2i+1)n+\varphi_{2i+1}\right)}\right)$$ ahol $N = 4M + 1$

A multiszinusz generátort a jegyzet **46. ábrának** megfelelően készítse el! Ügyeljen arra, hogy a generált jel a vizsgált frekvenciatartomány egészében megfelelő gerjesztést adjon, és a páros harmonikus pozíciókban nulla amplitúdójú gerjesztést adjon (max. 3 pont)! Vizsgálja meg, hogy hogyan alakul a generált jel csúcsértéke, és hasonlítsa össze azzal az esettel, amikor a kezdőfázisok rendre nullák (max. 2 pont)!

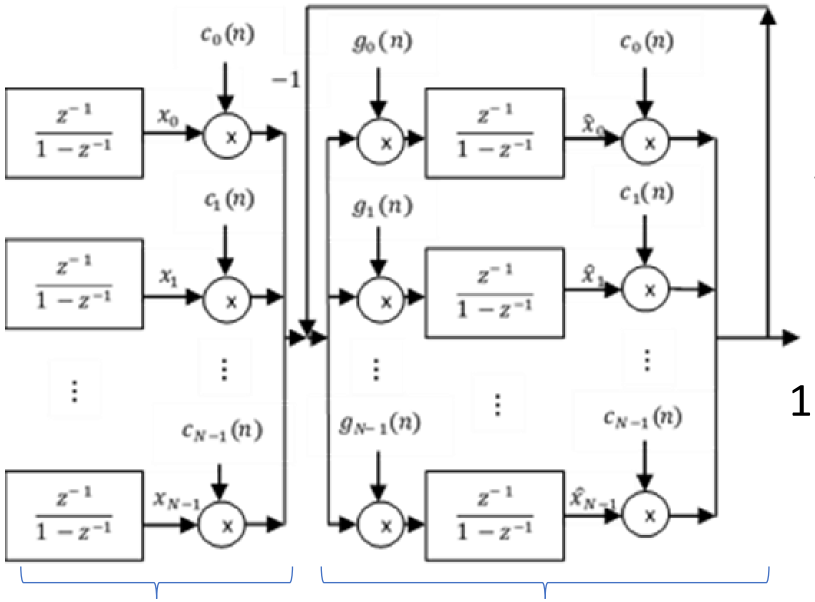
$$e^{j\left(\frac{2\pi}{N}(2i+1)n+\varphi_{2i+1}\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}(2i+1)n+\varphi_{2i+1}\right)} = e^{j\frac{2\pi}{N}(2i+1)n}e^{j\varphi_{2i+1}} + e^{-j\frac{2\pi}{N}(2i+1)n}e^{-j\varphi_{2i+1}} =$$

$$\boxed{= c_{2i+1}(n)x_{2i+1} + c_{N-2i-1}(n)x_{N-2i-1}}$$

$$x_0 = 1,\quad x_{2i+1} = x^*_{N-2i-1} = \frac{1}{2}e^{j\varphi_{2i+1}},\ i = 0,1,\ldots,M-1,\quad x_{2i} = x^*_{N-2i} = 0,\ i = 1,\ldots,M$$

$$c_0 = 1,\ c_{2i+1}(n) = c^*_{N-2i-1}(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}(2i+1)n},\ i = 0,1,\ldots,M-1$$

$$\boxed{c_m(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}mn},\ g_m(n) = \frac{1}{N}e^{-j\frac{2\pi}{N}mn},\ m = 0,1,\ldots,N-1,}$$



Generátor Analizátor

1.2. Készítsen az előző pont szerinti generátor jelével gerjesztett rendszerek kimeneti jelének analizálására alkalmas rekurzív multiszinusz analizátort, ugyancsak a 46. ábrán látható elrendezést követve, amely a bemenetére kapcsolt jelből képes kiszámítani az abban levő harmonikus komponensek amplitúdóját és fázisát! Az 1.1. pont szerinti jel és az analizátor által rekonstruált jel különbségét ábrázolva mutassa be, hogy a generátor-analizátor pár megfelelően működik (max. 5 pont)!

5. Szűréselmélet alapjai: Lényeges üzenetek

(Jegyzet 55-67. oldalak)

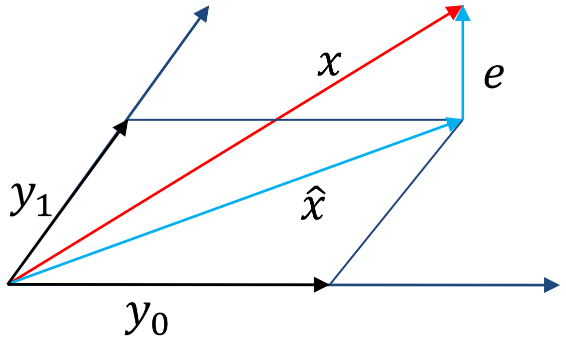
5.1. Optimális nemrekurzív becslő (skalár Wiener Szűrő)

Keressük x legjobb becslőjét

$$\hat{x} = \sum_{k=0}^{N-1} a_k y_k$$

$$\frac{\partial E\{e^2\}}{\partial a_j} = 0, E\{e y_j\} = 0, \forall j - \text{re.}$$

A legjobb becslés geometriai interpretációja (29. ábra):



Legjobbnak azt a becslést tekintjük, amelyik legkisebb hibával jár: ez az x vektor altérre történő merőleges vetítésével áll elő.

Ez utóbbit ortogonalitási egyenletnek nevezzük, mert a vektorokkal történő geometriai interpretációban éppen azt fejezi ki, hogy az optimális beállítás esetén az e hibavektor merőleges valamennyi y_j vektorra.

Ez mátrix formában

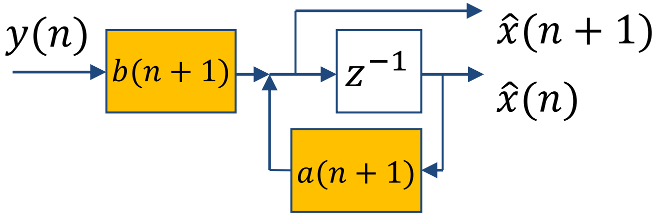
$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{R}_{yy}^{-1}\boldsymbol{P}_{xy} \quad (\text{ahol } \boldsymbol{W} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{N-1}]^T) \qquad E\{e^2\}\Big|_{min} = E\{x^2\} - \boldsymbol{P}_{xy}^T\boldsymbol{R}_{yy}^{-1}\boldsymbol{P}_{xy} = E\{x^2\} - \boldsymbol{P}_{xy}^T\boldsymbol{W}$$

Rekurzív becslő az optimális nemrekurzív becslőből

A rekurzív eljárás nagy előnye, hogy nem kell megvárni az összes adatot: folyamatosan számolható az egyre jobb minőségű becslő.

$$\hat{x}(n+1) = a(n+1)\hat{x}(n) + b(n+1)y(n) =$$

$$= \hat{x}(n) + \underbrace{b(n+1)\big(y(n) - \hat{x}(n)\big)}_{\text{korrekciós tag}} \quad ?$$



Lineáris átlagoló: $$\hat{x}(n+1) = \frac{n}{n+1}\hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}\big(y(n) - \hat{x}(n)\big)$$

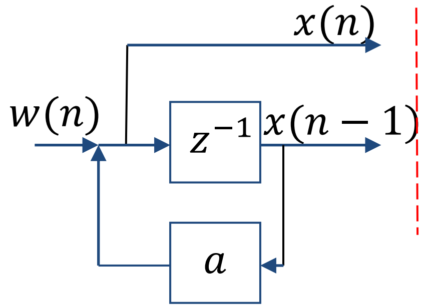
Ismétlés

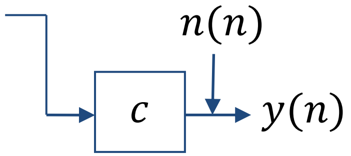
5.2. Optimális rekurzív becslő (skalár Kalman szűrő és prediktor)

A modell, amit alkalmazunk a legegyszerűbb állapotváltozós modell, amit egy Gauss eloszlású fehér-zaj folyamat gerjeszt.

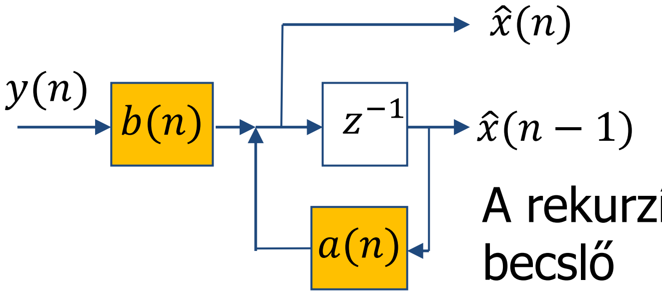
$$\boxed{x(n) = ax(n-1) + w(n)} \qquad R_{xx}(j) = a^{|j|}R_{xx}(0)$$

$$E\{w(n)\} = 0, E\{w(n)w(j)\} = \begin{cases} 0 & n \neq j \\ \sigma_w^2 & n = j \end{cases}$$





A megfigyelés lineáris modellje



A rekurzív becslő

elsőrendű autoregresszív folyamat

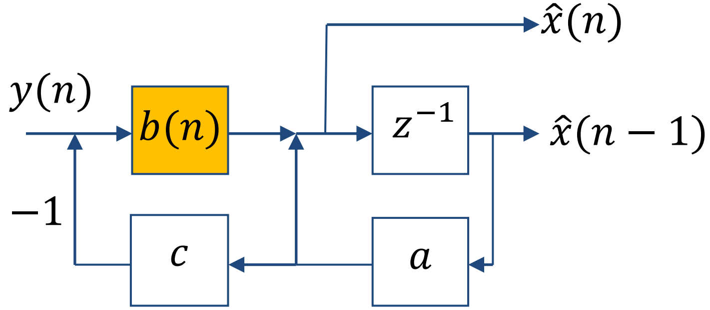
$$\boxed{\hat{x}(n) = a(n)\hat{x}(n-1) + b(n)y(n)}$$

Keressük az optimális súlytényezőket: $\dfrac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial a(n)} = -2E\{e(n)\hat{x}(n-1)\} = 0,$ „ortogonalitás"! $\dfrac{\partial E\{e^2(n)\}}{\partial b(n)} - 2E\{e(n)y(n)\} = 0$ „ortogonalitás"!

Nagyon fontos eredmény:

$$\boxed{a(n) = a[(1 - b(n)c)]} \qquad \boxed{\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ca\hat{x}(n-1))}$$

$b(n)$ meghatározása:



$$E\{e^2(n)\} = E\left\{\left[ae(n-1) + w(n) - b(n)\big(ace(n-1) + cw(n) + n(n)\big)\right]^2\right\} = p(n)$$

$$E\{e^2(n)\} = E\{[a[1 - b(n)c]e(n-1) + [1 - b(n)c]w(n) - b(n)n(n)]^2\}$$

$$E\{e(n-1)w(n)\} = 0 \quad E\{e(n-1)n(n)\} = 0 \quad E\{w(n)n(n)\} = 0$$

$$\boxed{b(n)\Big|_{opt} = \frac{a^2cp(n-1) + c\sigma_w^2}{a^2c^2p(n-1) + c^2\sigma_w^2 + \sigma_n^2}}$$

$$p(n) = a^2[1 - b(n)c]^2p(n-1) + [1 - b(n)c]^2\sigma_w^2 + b^2(n)\sigma_n^2$$

(1) $p_1(n) = a^2p(n-1) + \sigma_w^2$ (2) $b(n) = cp_1(n)[c^2p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1}$

(3) $p(n) = [1 - b(n)c]p_1(n)$ $p(0)$ kell hozzá!

Optimális rekurzív becslő (skalár Kalman szűrő és prediktor):

$$\boxed{x(n) = ax(n-1) + w(n)}$$
$$y(n) = cx(n) + n(n)$$

helyett

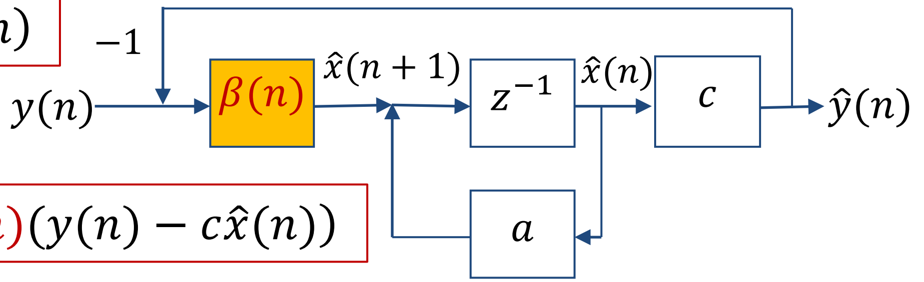
$$\boxed{\hat{x}(n) = a\hat{x}(n-1) + b(n)(y(n) - ca\hat{x}(n-1))}$$

(1) $p_1(n) = a^2 p(n-1) + \sigma_w^2$

(2) $b(n) = cp_1(n)[c^2 p_1(n) + \sigma_n^2]^{-1}$ $\quad n = 1, 2, \ldots$

(3) $p(n) = [1 - b(n)c]p_1(n)$ $\quad p(0)$ kell hozzá!

$$\boxed{x(n+1) = ax(n) + w(n)}$$
$$y(n) = cx(n) + n(n)$$



$$\boxed{\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + \beta(n)(y(n) - c\hat{x}(n))}$$

(1) $\beta(n) = acp(n)[c^2 p(n) + \sigma_n^2]^{-1}$,

(2) $p(n+1) = a(a - \beta(n)c)p(n) + \sigma_w^2$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$p(0)$ kell hozzá!

Optimális rekurzív becslő (vektor Kalman szűrő és prediktor):

$$\boxed{\boldsymbol{x}(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n-1) + \boldsymbol{w}(n)}$$
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{n}(n)$$

helyett

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{x}}(n) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1) + \boldsymbol{K}(n)\left(\boldsymbol{y}(n) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1)\right)}$$

(1) $\boldsymbol{P}_1(n) = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)]$

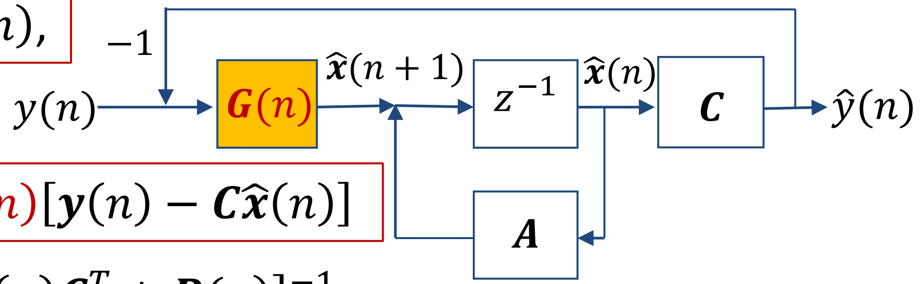
(2) $\boldsymbol{K}(n) = \boldsymbol{P}_1(n)\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_1(n)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}(n)]^{-1}$

(3) $\boldsymbol{P}(n) = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}_1(n)$ $\quad n = 1, 2, \ldots$ $\quad \boldsymbol{P}(0)$ kell hozzá!

$$\boldsymbol{P}(n) = E\{[\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)][\boldsymbol{x}(n) - \hat{\boldsymbol{x}}(n)]^T\}$$

$\boxed{tr\boldsymbol{P}(n) \rightarrow \text{minimum!}}$

$$\boxed{\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{w}(n),}$$
$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{n}(n)$$



$$\boxed{\hat{\boldsymbol{x}}(n+1) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(n) + \boldsymbol{G}(n)[\boldsymbol{y}(n) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(n)]}$$

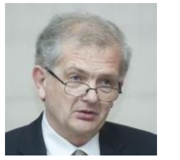
(1) $\boldsymbol{G}(n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}(n)]^{-1}$

(2) $\boldsymbol{P}(n+1) = [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}(n)$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$\boldsymbol{P}(0)$ kell hozzá!

$$\boldsymbol{P}(n+1) = E\{[\boldsymbol{x}(n+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(n+1)][\boldsymbol{x}(n+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(n+1)]^T\}$$

$\boxed{tr\boldsymbol{P}(n+1) \rightarrow \text{minimum!}}$



Optimális rekurzív becslő (vektor Kalman szűrő és prediktor) paraméterbecslésre: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{w}(n)=0$

$$\boxed{\boldsymbol{x}(n)=\boldsymbol{x}(n-1)}$$

$\boldsymbol{x}$ az ismeretlen paraméter

$\boldsymbol{y}(n)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{n}(n)$ $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}(n)$ a regressziós vektor

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{x}}(n)=\hat{\boldsymbol{x}}(n-1)+\boldsymbol{K}(n)\big(\boldsymbol{y}(n)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(n-1)\big)}$$

(1) $\boldsymbol{P}_1(n)=\boldsymbol{P}(n-1)$

(2) $\boldsymbol{K}(n)=\boldsymbol{P}_1(n)\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_1(n)\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{R}(n)]^{-1}$

(3) $\boldsymbol{P}(n)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(n)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}_1(n)$ $n=1,2,\dots$ $\boldsymbol{P}(0)$ kell hozzá!

$$\boldsymbol{P}(n)=E\{[\boldsymbol{x}(n)-\hat{\boldsymbol{x}}(n)][\boldsymbol{x}(n)-\hat{\boldsymbol{x}}(n)]^T\}$$

$\boxed{tr\boldsymbol{P}(n)\rightarrow\text{minimum!}}$

$$\boxed{\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{x}(n)}$$

$\boldsymbol{x}$ az ismeretlen paraméter

$\boldsymbol{y}(n)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{n}(n)$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{x}}(n+1)=\hat{\boldsymbol{x}}(n)+\boldsymbol{G}(n)[\boldsymbol{y}(n)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(n)]}$$

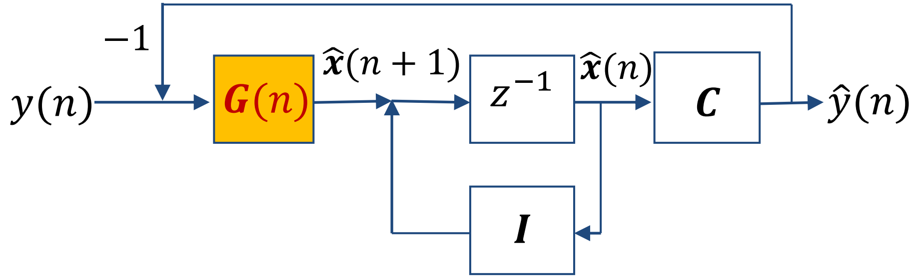
(1) $\boldsymbol{G}(n)=\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{C}^T+\boldsymbol{R}(n)]^{-1}$

(2) $\boldsymbol{P}(n+1)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}(n)$

$n=0,1,2,\dots$ $\boldsymbol{P}(0)$ kell hozzá!

$$\boldsymbol{P}(n+1)=E\{[\boldsymbol{x}(n+1)-\hat{\boldsymbol{x}}(n+1)][\boldsymbol{x}(n+1)-\hat{\boldsymbol{x}}(n+1)]^T\}$$

$\boxed{tr\boldsymbol{P}(n+1)\rightarrow\text{minimum!}}$



6. LS becslők rekurzív számítása

(Jegyzet 68-72. oldalak) $\boxed{\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}}$ $\boxed{J(a, \hat{a}) = (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{a})^T(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{a})}$

6.1. A lineáris megfigyelési modellt alkalmazó LS becslők rekurzív számítása

A továbbiakban is n két dolgot jelöl: (1) az eddig figyelembe vett minták számát (az egyes minták indexelhetők például $k = 0,1,\dots,n-1$ jelöléssel); (2) Az n-edik „időpillanatban” vett mintát, ami már az $n+1$-edik mintavett adat. Ezzel a fenti összefüggés n minta feltételezésével: $\boldsymbol{z}(n) = \boldsymbol{U}(n)\boldsymbol{a}(n) + \boldsymbol{w}(n)$, amihez tartozóan tudjuk, hogy $\boxed{\hat{\boldsymbol{a}}(n) = [\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{U}(n)]^{-1}\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{z}(n) = \boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{z}(n).}$ $\boldsymbol{P}(n) = [\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{U}(n)]^{-1}$ Ha veszünk egy újabb mintát, akkor

$$\boldsymbol{z}(n+1) = \boldsymbol{U}(n+1)\boldsymbol{a}(n+1) + \boldsymbol{w}(n+1) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}(n) \\ z(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}(n) \\ \boldsymbol{u}(n) \end{bmatrix} \boldsymbol{a}(n+1) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}(n) \\ w(n) \end{bmatrix},$$

ahol $z(n)$ skalár, az $n+1$-edik megfigyelési érték, $\boldsymbol{u}(n)$ sorvektor, a regressziós vektor $n+1$-edik sora, és végül $w(n)$ skalár, az $n+1$-edik zajkomponens. Ezekkel a jelölésekkel:

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{a}}(n+1) = \left[[\boldsymbol{U}^T(n) \quad \boldsymbol{u}^T(n)] \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}(n) \\ \boldsymbol{u}(n) \end{bmatrix} \right]^{-1} [\boldsymbol{U}^T(n) \quad \boldsymbol{u}^T(n)] \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}(n) \\ z(n) \end{bmatrix},}$$

illetve a műveletek elvégzésével

$$\hat{\boldsymbol{a}}(n+1) = \left[[\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{U}(n) + \boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)] \right]^{-1} [\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{z}(n) + \boldsymbol{u}^T(n)z(n)] = \boldsymbol{P}(n+1)[\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{z}(n) + \boldsymbol{u}^T(n)z(n)].$$

Az ebben szereplő mátrix invertálást az ún. mátrix inverziós lemma felhasználásával végezzük:

$$\boxed{[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}]^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\left[\boldsymbol{C}^{-1} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\right]^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}}$$

$$\boxed{[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD}]^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\left[\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B}\right]^{-1}\boldsymbol{DA}^{-1}}$$

$\left[[\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{U}(n)+\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)]\right]^{-1}=\boldsymbol{P}(n+1)$ ahol most

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}(n); \boldsymbol{B}=\boldsymbol{u}^T(n); \boldsymbol{D}=\boldsymbol{u}(n); \boldsymbol{C}=1$, ezért $\boldsymbol{P}(n+1)=\boldsymbol{P}(n)-\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\underbrace{[1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)]}_{\text{Skalár!}}{}^{-1}\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)=$

$=\boldsymbol{P}(n)-\dfrac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}$, $\boldsymbol{P}(0)$ ismeretében nincs további mátrix invertálás!

Fontos üzenet: Az egy diáddal módosított mátrix inverze mátrix szorzásokkal kiszámítható! Ennek felhasználásával:

$$\hat{\boldsymbol{a}}(n+1)=\boldsymbol{P}(n+1)[\boldsymbol{U}^T(n)\boldsymbol{z}(n)+\boldsymbol{u}^T(n)z(n)]=\hat{\boldsymbol{a}}(n)+\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)z(n)-$$

$$-\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}\hat{\boldsymbol{a}}(n)-\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}\boldsymbol{u}^T(n)z(n).$$

Itt a második és a negyedik tagot közös nevezőre hozva:

$$\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)z(n)+\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)z(n)-\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)z(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}=\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}z(n)=$$

$=\boldsymbol{G}(n)z(n)$ Ezzel: $\boxed{\hat{\boldsymbol{a}}(n+1)=\hat{\boldsymbol{a}}(n)+\boldsymbol{G}(n)[z(n)-\boldsymbol{u}(n)\hat{\boldsymbol{a}}(n)]}$ Itt $\boldsymbol{u}(n)\hat{\boldsymbol{a}}(n)=\hat{z}(n)$ az új mérés becslése!

$\boxed{\boldsymbol{G}(n)=\dfrac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}{1+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^T(n)}}$ $\boxed{\boldsymbol{P}(n+1)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{u}(n)]\boldsymbol{P}(n)}$ Az iteráció $n=0$-tól indul. $\hat{\boldsymbol{a}}(0)$=? $\boldsymbol{P}(0)$=?

Ezeket vagy meg tudjuk becsülni, vagy megoldjuk az LS becslést a paraméter vektor dimenziójának megfelelő mérési adat alapján, és annak eredményét használjuk az iteratív megoldás kiindulópontjaként.

$\boxed{J(a,\hat{a})=(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})^T\boldsymbol{Q}(n)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})}$ ahol $\boldsymbol{Q}$ diagonális súlyozó mátrix, tehát $\boldsymbol{Q}(n)=diag\langle q_0,q_1,\dots,q_{n-1}\rangle$

ill. $Q(n+1)=diag\langle q_0,q_1,\dots,q_{n-1},q_n\rangle$

Ehhez a mátrix inverziós lemma $\boldsymbol{C}$ mátrixát $\boldsymbol{C}=1$ helyett $\boldsymbol{C}=q_n$ skalár értékre kell állítanunk. Ezzel:

$$\boldsymbol{G}(n)=\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)}{{}^{1}/_{q_n}+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)}$$

Ha súlyozó mátrix egy diagonális kovariancia-mátrix inverze, azaz

$$\boldsymbol{Q}(n)=diag\,\langle {}^{1}/_{\sigma_0^2},{}^{1}/_{\sigma_1^2},\dots,{}^{1}/_{\sigma_{n-1}^2}\rangle,\ \boldsymbol{Q}(n+1)=diag\,\langle {}^{1}/_{\sigma_0^2},{}^{1}/_{\sigma_1^2},\dots,{}^{1}/_{\sigma_{n-1}^2},{}^{1}/_{\sigma_n^2}\rangle,$$

akkor :

$$\boldsymbol{G}(n)=\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)}{\sigma_n^2+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)}$$

A többi változatlan!

Ha a kovariancia mátrix nem lenne diagonális, akkor a megismert fehérítési eljárás alkalmazásával, azaz egy transzformáció közbeiktatásával juthatunk el a rekurzív forma alkalmazhatóságához.

Mindezekkel együtt rekurzív megoldást tudunk adni a Gauss-Markov, a BLUE és a súlyozott LS becslések esetére!

Egy további hasznos súlyozási forma lehet a $\boldsymbol{Q}(n)=diag\langle\beta^{n-1},\beta^{n-2},\dots,1\rangle$ $\boldsymbol{Q}(n+1)=diag\langle\beta^{n},\beta^{n-1},\beta^{n-2},\dots,1\rangle$

$0<\beta<1$. Itt a legutolsó mérési adattal képzett négyzetes hiba 1 súllyal szerepel, míg a korábbiak rendre kisebbel.

$$\boldsymbol{G}(n)=\frac{\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)}{\beta+\boldsymbol{u}(n)\boldsymbol{P}(n)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{T}}(n)},\quad \boldsymbol{P}(n+1)=\frac{1}{\beta}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}(n)\boldsymbol{u}(n)]\boldsymbol{P}(n)$$

Ezzel egy felejtő hatást érvényesítünk, ami nemstacionárius folyamatok esetén előnyös.

6.2. LS becslők számítása kényszerfeltétel esetén

Tételezzük fel, hogy a becsülendő $\boldsymbol{a}$ paraméter kielégíti az $\boldsymbol{Aa}=\boldsymbol{b}$ kényszerfeltételt!

Ekkor feltételes szélsőértéket keresünk a Lagrange multiplikátoros technika segítségével:

$$J(\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})^T(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})+\boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{Aa}-\boldsymbol{b}),\quad \frac{\partial J(\boldsymbol{a})}{\partial\boldsymbol{a}}=-2\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{Ua})+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda}=0.$$

Ebből a kényszerfeltételt kielégítő $\hat{\boldsymbol{a}}_C$ megoldás: $\hat{\boldsymbol{a}}_C=[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z}-[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{A}^T\frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}.$

Mivel ez kielégíti a kényszerfeltételt ($\hat{\boldsymbol{a}}$ a kényszer nélküli becslőt jelöli):

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{a}}_C=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z}-\boldsymbol{A}[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{A}^T\frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{A}[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{A}^T\frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}=\boldsymbol{b}$$

$$A\hat{a}_C = A[U^TU]^{-1}U^Tz - A[U^TU]^{-1}A^T\frac{\lambda}{2} = A\hat{a} - A[U^TU]^{-1}A^T\frac{\lambda}{2} = b$$ Ebből: $$\frac{\lambda}{2} = [A[U^TU]^{-1}A^T]^{-1}(A\hat{a} - b),$$

amivel $\boxed{\hat{a}_C = \hat{a} - [U^TU]^{-1}A^T[A[U^TU]^{-1}A^T]^{-1}(A\hat{a} - b).}$

6.3. Nemlineáris megfigyelési modellt alkalmazó LS becslők számítása

A megfigyelési modell: $s(a) \neq Ua$. A kritériumfüggvény deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial a}(z - s(a))^T(z - s(a)) = -2\frac{\partial s^T(a)}{\partial a}(z - s(a)) = -2g(a) = 0.$$

A Newton módszer szerint a $g(a) = 0$ egyenlet iteratív megoldása:

$$\left.\frac{\partial g(a)}{\partial a}\right|_{a=a_0} = \frac{g(a_0)}{a_0 - a_1}, \quad a_1 = a_0 - \frac{g(a_0)}{\left.\frac{\partial g(a)}{\partial a}\right|_{a=a_0}}, \quad a_2 = a_1 - \frac{g(a_1)}{\left.\frac{\partial g(a)}{\partial a}\right|_{a=a_1}} \quad \cdots.$$

De kiindulhatunk $s(a)$ Taylor sorából is:

$\left.\frac{\partial s(a)}{\partial a}\right|_{a=a_0} = U(a_0)$ jelöléssel, és a második deriváltat tartalmazó tag elhanyagolásával: $s(a) \cong s(a_0) + U(a_0)(a - a_0)$,

$$\left.\frac{\partial s^T(a)}{\partial a}\right|_{a=a_0}(z - s(a)) = U^T(a_0)\big[z - [s(a_0) + U(a_0)(a - a_0)]\big] = 0,$$ $\boxed{\hat{a} \cong a_0 + [U^T(a_0)U(a_0)]^{-1}U^T(a_0)[z - s(a_0)].}$

De kiindulhatunk $J(a)$ Taylor sorából is: $$J(a) = J(a_0) + \left.\frac{\partial J(a)}{\partial a}\right|_{a=a_0}(a - a_0) + \frac{1}{2}(a - a_0)^T\left.\frac{\partial^2 J(a)}{\partial^2 a}\right|_{a=a_0}(a - a_0) + \cdots$$

Ha $J(a)|_{min} = 0$, akkor kiindulhatunk az első két tagból, és a többit elhanyagoljuk. $\left.\frac{\partial J(a)}{\partial a}\right|_{a=a_0} = \nabla J(a_0)$ jelöléssel:

$$\nabla J^T(a_0)\nabla J(a_0)\hat{a} = \nabla J^T(a_0)\nabla J(a_0)a_0 - \nabla J^T(a_0)J(a_0),$$ $\boxed{\hat{a} \cong a_0 - [\nabla J^T(a_0)\nabla J(a_0)]^{-1}\nabla J^T(a_0)J(a_0)}$

Ha $J(\boldsymbol{a})|_{min} \neq 0$, akkor a $\nabla J(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ feltétel teljesülését keressük az első és a másodrendű tag figyelembevételével, a többi elhanyagolásával:

$$\nabla J(\boldsymbol{a}) = 0 = \left.\frac{\partial J(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0} + \left.\frac{\partial^2 J(\boldsymbol{a})}{\partial^2 \boldsymbol{a}}\right|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0} (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_0),$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}_0 - \left[\left.\frac{\partial^2 J(\boldsymbol{a})}{\partial^2 \boldsymbol{a}}\right|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0}\right]^{-1} \left.\frac{\partial J(\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0} = \boldsymbol{a}_0 - \left[\left.\frac{\partial^2 J(\boldsymbol{a})}{\partial^2 \boldsymbol{a}}\right|_{\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0}\right]^{-1} \nabla J(\boldsymbol{a}_0)}$$

amit Gauss-Newton módszernek is nevezünk.

Megjegyzés: Egyes feladatok alkalmas transzformációval visszavezethetők lineáris paraméter-függésre. Például a következő hullámforma

$$s(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \varphi), \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

ismeretlen A és φ paramétereinek együttes meghatározása nemlineáris LS probléma.

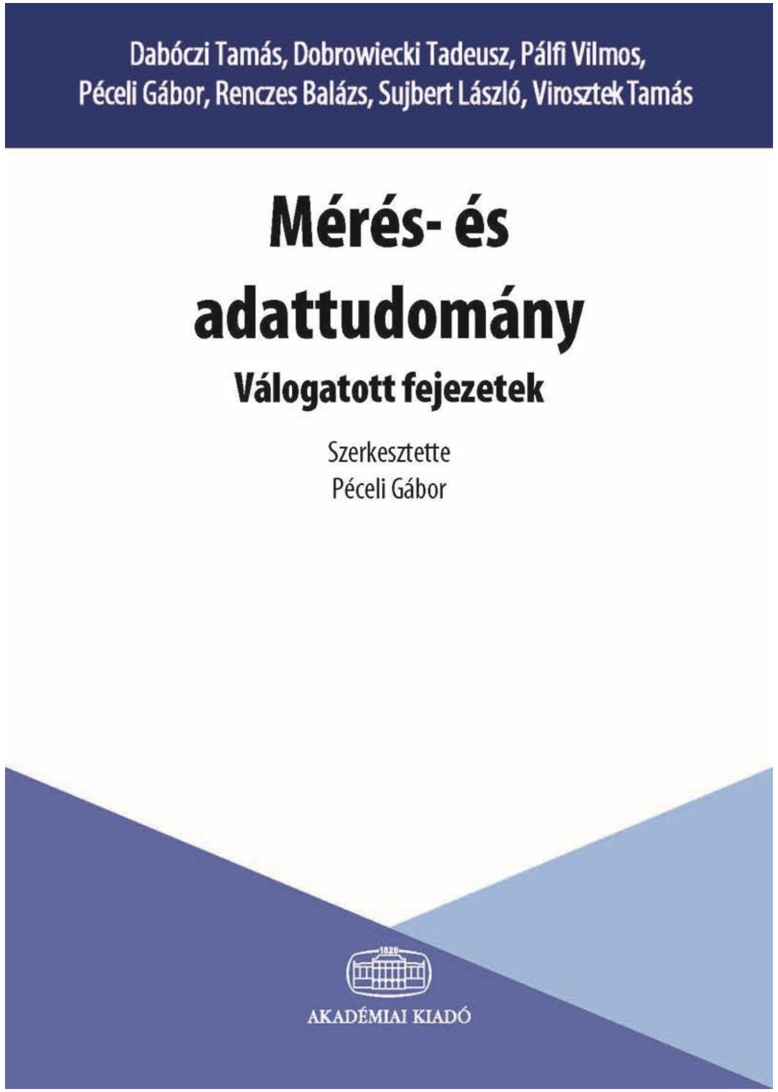
Ha azonban az ezzel ekvivalens felírás

$$s(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \varphi) = B\cos(2\pi f_0 n) + C\sin(2\pi f_0 n)$$

B és C paramétereit becsüljük, akkor a sokkal egyszerűbb lineáris LS problémát kell megoldanunk, és a keresett jellemzőket pedig transzformációval kapjuk:

$$A = \sqrt{B^2 + C^2}, \qquad \varphi = arctan\left(\frac{-C}{B}\right)$$

Köszönöm a figyelmet!



Dabóczi Tamás, Dobrowiecki Tadeusz, Pálfi Vilmos, Péceli Gábor, Renczes Balázs, Sujbert László, Virosztek Tamás

Mérés- és adattudomány

Válogatott fejezetek

Akadémiai Kiadó

ISBN: 978 963 454 379 4

DOI: [10.1556/9789634543794](10.1556/9789634543794)

Online megjelenés éve: 2020

Hivatkozás:

https://mersz.hu/meres-es-adattudomany

BibTeX EndNote Mendeley Zotero

Műszaki tudományok