

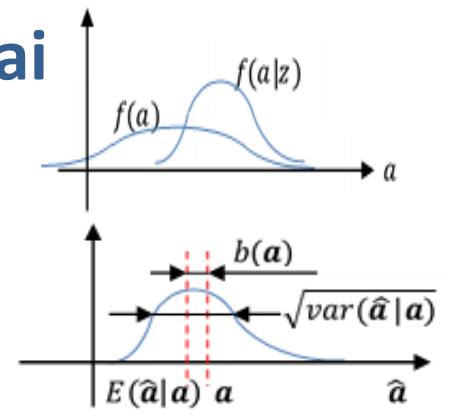
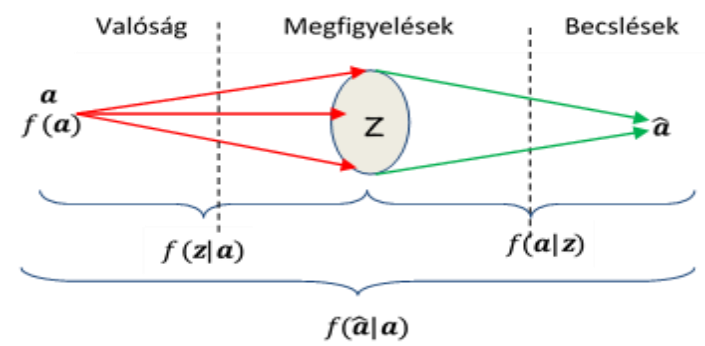


Méréselmélet

3. fejezet: A becslélmélet alapjai

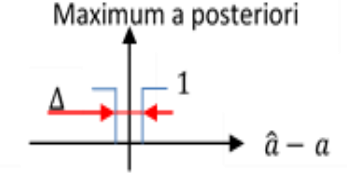
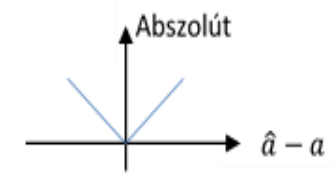
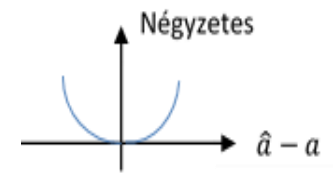
2021. március 10.

3. A becslésmélet alapjai



3.1. Bayes becslők

$$f(a|z) = \frac{f(z|a)f(a)}{f(z)}$$

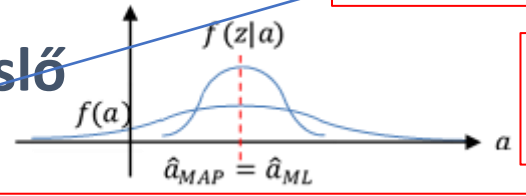


$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} af(a|z)da$$

$$\hat{a}_{ABS} = f(a|z) \text{ mediánja.}$$

$$\hat{a}_{MAP} = f(a|z) \text{ maximumhelye.}$$

3.2. Maximum Likelihood (ML) becslő



$$\left. \frac{\partial f(z|a)}{\partial a} \right|_{a=\hat{a}_{ML}} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \ln f(z|a)}{\partial a} \right|_{a=\hat{a}_{ML}} = 0$$

Gauss eloszlások esetén:

Ha a megfigyelés modellje lineáris:

$$\hat{a}_{MS} = \underbrace{\mu_a}_{\text{apriori ismeret}} + \underbrace{[U^T \Sigma_{nn}^{-1} U + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1} U^T \Sigma_{nn}^{-1} (z - U \mu_a)}_{\text{korrekció } z - U \mu_a \text{ függvényében}}$$

$$cov\{a, a|z\} = [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U + \Sigma_{aa}^{-1}]^{-1}$$

$$z = Ua + n$$

$$\hat{a}_{GM} = [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1} U^T \Sigma_{nn}^{-1} z$$

$$\Sigma_{aa}^{-1} = 0$$

$$cov(\hat{a}_{GM}, \hat{a}_{GM}) = [U^T \Sigma_{nn}^{-1} U]^{-1}$$

3.3. Becslők determinisztikus modellel jellemzett paraméterek esetén Torzítatlan becslő: $E(a - \hat{a}) = 0$

A minimális variancia kritériuma: $mse(\hat{a}) = E[(\hat{a} - a)^2] = var(\hat{a}) + b^2(a)$.

Minimális varianciájú, torzítatlan becslők (MVU):

Cramer-Rao alsó korlát (Cramer-Rao Lower Bound: CRLB, skalár paraméter esete)

$$var(\hat{a}) \geq CRLB(a)$$

Ha $E \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right] = 0$ akkor

$$var(\hat{a}) \geq \left[-E \left(\frac{\partial^2 \ln f(z; a)}{\partial a^2} \right) \right]^{-1}$$

$$\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} = I(a)(g(z) - a)$$

$$\hat{a} = g(z)$$

a variancia minimum: $= \frac{1}{I(a)}$.

Cramer-Rao alsó korlát (Cramer-Rao Lower Bound: CRLB, vektor-paraméter esete)

Ha $E \left[\frac{\partial \ln f(z; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right] = 0$ akkor

$$C_{\hat{\mathbf{a}}} - I^{-1}(\mathbf{a}) \geq 0$$

$$I_{ij}(\mathbf{a}) = -E \left(\frac{\partial^2 \ln f(z; \mathbf{a})}{\partial a_i \partial a_j} \right)$$

$$\frac{\partial \ln f(z; \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = I(\mathbf{a})(\mathbf{g}(z) - \mathbf{a})$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{g}(z)$$

$$I^{-1}(\mathbf{a})^2$$



Gauss eloszlások esetén:

Ha a megfigyelés modellje lineáris:

z	$N*1$	dimenziós megfigyelési vektor
U	$N*M$	dimenziós, ismert megfigyelési mátrix
a	$M*1$	dimenziós, becsülendő paramétervektor
w	$N*1$	dimenziós zaj vektor, amelynek valószínűség sűrűségfüggvénye $\mathcal{N}(0,C)$.

$z = Ua + w$

Jelölés egyeztetés: $C = \Sigma_{nn}$
 $w = n$

$\frac{\partial \ln f(z,a)}{\partial a} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} [z^T C^{-1} z - 2a^T U^T C^{-1} z + a^T U^T C^{-1} U a] = [U^T C^{-1} z - U^T C^{-1} U a],$ $\hat{a} = [U^T C^{-1} U]^{-1} U^T C^{-1} z,$ $C_{\hat{a}} = [U^T C^{-1} U]^{-1}.$

$\hat{a} \sim \mathcal{N}(a, (U^T C^{-1} U)^{-1})$ $E(\hat{a}) = (U^T C^{-1} U)^{-1} U^T C^{-1} E(Ua + w) = a$ Ha a csatornazaj Gauss, akkor a GM (ML) becslő MVU becslő.

Megjegyzés: A házi feladatban színes zajt kell generálni. Ha w fehér zaj, egységnyi szórással, akkor transzformáljuk: B -vel $E[(Bw)(Bw)^T] = E[Bww^T B^T] = BB^T = C$ Lehetséges megoldások: 1. MATLAB: mvnrnd() függvény. 2. MATLAB: sqrtm(C)*randn() 3. Cholesky faktorizáció MATLAB: chol() függvény.

A legjobb lineáris torzítatlan becslő (BLUE):

- Az MVU becslő nem mindig létezik vagy lehetetlenség megtalálni.
- Az adatok valószínűség sűrűségfüggvénye nem ismert.

A BLUE becslő egy **szuboptimális** becslő, amelyik:

- az adatok **lineáris** függvénye: $\hat{a} = Hz;$ - csak **torzítatlan** lehet: $E(\hat{a}) = HE(z) = a;$ - **minimalizálja** a becslő **varianciáját**;
- csak az adatok **átlagára** és **varianciájára** van szükség.

A megfigyelési egyenlet legyen: $z = Ua + w$ Mivel: $E(z) = Ua \rightarrow$ $HU = I$ $C_{\hat{a}} = E[H(z - E(z))(z - E(z))^T H^T] = HCH^T$

Minimalizálandó: $var(\hat{a}_i) = h_i C h_i^T$ a $h_i u_j = \delta_{ij}$ feltétel betartása mellett.

A költségfüggvény: $J_i = h_i C h_i^T + \sum_{j=0}^{M-1} \lambda_j^{(i)} (h_i u_j - \delta_{ij}),$ ahol h_i a H mátrix i -edik sora, u_j pedig az U mátrix j -edik oszlopa.

$\frac{\partial J_i}{\partial h_i^T} = 2Ch_i^T + \sum_{j=0}^{M-1} \lambda_j^{(i)} u_j$ Bevezetve: $\lambda_i = [\lambda_0^{(i)} \lambda_1^{(i)} \dots \lambda_{M-1}^{(i)}]^T$ $\frac{\partial J_i}{\partial h_i^T} = 2Ch_i^T + U\lambda_i = 0 \rightarrow h_i^T = -\frac{1}{2} C^{-1} U\lambda_i$

Mivel $U^T h_i^T = -\frac{1}{2} U^T C^{-1} U\lambda_i = e_i \rightarrow -\frac{1}{2} \lambda_i = [U^T C^{-1} U]^{-1} e_i,$ $h_i^T = C^{-1} U [U^T C^{-1} U]^{-1} e_i,$ e_i az i -edik egységvektor.



$$\text{var}(\hat{a}_i) = \mathbf{h}_i \mathbf{C} \mathbf{h}_i^T = \mathbf{e}_i^T [\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U} [\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^T [\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{e}_i \quad \hat{a}_i = \mathbf{h}_i \mathbf{z} = \mathbf{e}_i^T [\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{z}$$

Vektoros formában $\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{w}$, ahol \mathbf{w} nulla várható értékű zaj, melynek kovariancia mátrixa \mathbf{C} , sűrűségfüggvénye tetszőleges,

akkor az \mathbf{a} paraméter **BLUE** becslője és a becslés kovariancia mátrixa: $\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{z}$, $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U})^{-1}$

$\text{var}(\hat{a}_i) = [\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}}]_{ii} = [(\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U})^{-1}]_{ii}$ **Megjegyzés:** Ha a zaj Gauss eloszlású, akkor a BLUE egy MVU becslő.

2. Példa: DC szint zajban: $z_k = A + w_k$, w_k sűrűségfüggvényét nem ismerjük, csak a varianciáját: $\text{var}(w_k) = \sigma_k^2$.

$$\mathbf{U} = [1, 1, \dots, 1]^T,$$

$$\mathbf{a} = A.$$

$$\text{A kovariancia mátrix: } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{N-1}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_0^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{N-1}^2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{z} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_k^2} \right)^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z_k}{\sigma_k^2}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} = (\mathbf{U}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U})^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_k^2} \right)^{-1}$$

3.3.5. Maximum Likelihood (ML) becslők

Probléma, hogy **MVU becslők** esetlegesen léteznek vagy nem találhatók meg. A BLUE becslő **lineáris modellekre** szorítkozik.

A **Maximum Likelihood (ML) becslők** determinisztikus modellel leírt paraméterek esetén is használhatók. Tulajdonságaik:

- mindig használhatók, ha a valószínűségi sűrűség függvény (**csatornakarakterisztika**) ismert;
- nagy adatmérték esetén **optimálisak** (aszimptotikusan hatásosak, elérik a CRLB értéket);
- számítástechnikailag komplexek, numerikus módszerek használatát igénylik.

Likelihood függvény: az $f(\mathbf{z}; \mathbf{a})$ sűrűségfüggvény, ahol \mathbf{a} változó (nem paraméter)

ML becslő: \mathbf{a} azon értéke, amelyhez a likelihood függvény maximuma tartozik.

Eljárása: képezzük a $\ln f(\mathbf{z}; \mathbf{a})$ log-likelihood függvényt, és deriváljuk \mathbf{a} szerint, majd ezt nullával egyenlővé téve megoldjuk \mathbf{a} -ra.

Eredményül az $\hat{\mathbf{a}}_{ML}$ becslőt kapjuk.



1. Példa: Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérése ismeretlen zaj variancia mellett: $z_n = A + w_n$.

Tegyük fel, hogy $A > 0$ és $\sigma^2 = A$. A valószínűség sűrűségfüggvény:

$$f(z; A) = \frac{1}{(2\pi A)^{\frac{N}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2A} \sum_{n=0}^{N-1} (z_n - A)^2\right].$$

$$\frac{\partial \ln f(z; A)}{\partial A} = -\frac{N}{2A} + \frac{1}{A} \sum_{n=0}^{N-1} (z_n - A) + \frac{1}{2A^2} \sum_{n=0}^{N-1} (z_n - A)^2$$

CRLB?
Létezik MVU
becslő?

Az ML becslőt a derivált egyenlő nulla feltételből kapjuk:

$$\hat{A}_{ML} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z_n^2 + \frac{1}{4}}$$

3.3.6. Legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslők

Nincs előzetes ismeretünk sem a mérendő paraméterről, sem a csatorna karakterisztikáról (a zajról).

Minden megfigyelést a következőképpen képzelünk el: $z_k = s_k(\mathbf{a}) + e_k$, ahol e_k a mérési és a modellezési hiba.

A cél az LS költség minimalizálása:

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{k=0}^{N-1} (z_k - s_k(\mathbf{a}))^2.$$

Nincs valószínűségi feltételezés csak egy determinisztikus jelmodell.

Ha a megfigyelési egyenlet lineáris: $\mathbf{z} = \mathbf{U}\mathbf{a} + \mathbf{e}$, akkor explicit megoldás adható.

Feltételezzük, hogy az \mathbf{a} paraméter $\hat{\mathbf{a}}$ értéket vesz fel, és felállítjuk a megfigyelés modelljét: $\mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}$.

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{z}^T \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{U}^T \mathbf{z} + \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{z}^T \mathbf{z} - 2\hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{U}^T \mathbf{z} + \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}$$

melynek szélsőértékét (minimumát) keressük:

$$\left. \frac{\partial J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}})}{\partial \hat{\mathbf{a}}} \right|_{\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}_{LS}} = -2\mathbf{U}^T \mathbf{z} + 2\mathbf{U}^T \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}} = 0$$

→

$$\hat{\mathbf{a}}_{LS} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}$$

A minimális LS költség:

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}_{LS}) = \mathbf{z}^T (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}_{LS})$$

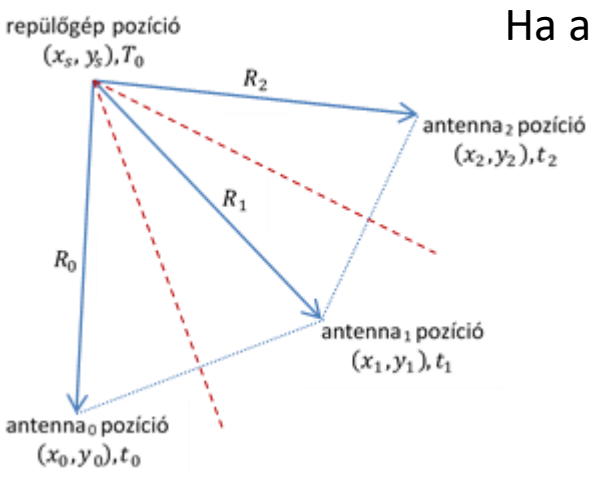
Megjegyzések: Súlyozott négyzetes kritériumot is használhatunk, ha bevezetünk egy \mathbf{Q} négyzetes súlyozó mátrixot, amivel:

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}}) = (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{Q} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{a}}), \quad \hat{\mathbf{a}}_{LS} = [\mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \mathbf{z}.$$

Ha $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Sigma}_{nn}^{-1}$, akkor formálisan a Gauss-Markov becslőt kapjuk, tehát a GM becslő egy súlyozott legkisebb négyzetes hibájú becslő, ahol a súlyozást a megfigyelési zaj kovariancia mátrixának inverze adja.



Példa: Lokalizáció, célkövetés Az ismeretlen pozíójú repülőgép által sugárzott jel vétele több, ismert pozíójú antennával.



Ha a kisugárzott jel vételi időpontjaira fennáll, hogy: $t_1 - t_0 = 0, t_2 - t_1 = 0$, akkor $R_0 = R_1 = R_2$, és ekkor a repülőgép pozíciót az antenna pozíciókat összekötő szakaszok felező merőlegeseinek metszés-pontja adja. Ha a különbségek nem nullák, akkor a felező merőlegesek helyett hiperbolák metszés-pontja adja az ismeretlen pozíciót. A k -edik antenna távolsága

$$R_k(x_s, y_s) = \sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2}$$

A mérés modellje: $t_k = T_0 + \frac{R_k}{c} + w_k, k = 0, 1, \dots, N - 1,$

ahol c a terjedési sebesség, w_k nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú zaj, mintái korrelálatlanok. A zaj sűrűségfüggvényét nem ismerjük. → BLUE? Keresett: $\mathbf{a} = [x_s \ y_s]^T.$

Mivel R_k a paramétervektor nemlineáris függvénye → megpróbálunk linearizálni. Ehhez feltételezzük, hogy – például az előző mérés eredményeként – rendelkezésre állnak egy, az ismeretlenhez közeleső pozíció x_n, y_n és $R_{nk}, k = 0, 1, \dots, N - 1,$ adatai. Ennek felhasználásával Taylor sorfejtés:

$$R_k \cong R_{nk} + \left. \frac{\partial R_k}{\partial x_s} \right|_{x_s=x_n} \delta x_s + \left. \frac{\partial R_k}{\partial y_s} \right|_{y_s=y_n} \delta y_s = R_{nk} + \underbrace{\frac{x_n - x_k}{R_{nk}}}_{\cos(\alpha_k)} \delta x_s + \underbrace{\frac{y_n - y_k}{R_{nk}}}_{\sin(\alpha_k)} \delta y_s,$$

Ezt behelyettesítve t_k kifejezésébe, és bevezetve új paramétervektorként:

$\mathbf{a}' = [\delta x_s \ \delta y_s]^T \rightarrow$ lineáris összefüggés!

$$t_k = T_0 + \frac{R_{nk} + \cos(\alpha_k) \delta x_s + \sin(\alpha_k) \delta y_s}{c} + w_k, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Itt R_{nk}/c minden antenna pozícióban ismert konstans, ezért bevezethetjük:

$$\tau_k = t_k - \frac{R_{nk}}{c} = T_0 + \frac{\cos(\alpha_k) \delta x_s + \sin(\alpha_k) \delta y_s}{c} + w_k, k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Itt a T_0 a repülőgéptől megszerezhető információ, aminek használhatósága azon múlik, hogy az egyes antennáknál működő órák mennyire szinkronizáltak.

Egy további transzformációval azonban T_0 kiiktatható: ez az érkezési idők különbsége (time difference of arrivals: TDOA) módszer.

$$z_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{[\cos(\alpha_k) - \cos(\alpha_{k-1})] \delta x_s + [\sin(\alpha_k) - \sin(\alpha_{k-1})] \delta y_s}{c} + [w_k - w_{k-1}], k = 1, \dots, N - 1.$$



$$z_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{[\cos(\alpha_k) - \cos(\alpha_{k-1})]\delta x_s + [\sin(\alpha_k) - \sin(\alpha_{k-1})]\delta y_s}{c} + [w_k - w_{k-1}], k = 1, \dots, N - 1.$$

$$\mathbf{z} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_0) & \sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_0) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(\alpha_{N-1}) - \cos(\alpha_{N-2}) & \sin(\alpha_{N-1}) - \sin(\alpha_{N-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_s \\ \delta y_s \end{bmatrix} + \mathbf{w}' = \mathbf{U}\mathbf{a}' + \mathbf{w}',$$

Ez már ismert forma! Jöhet a **BLUE!**
Ehhez:

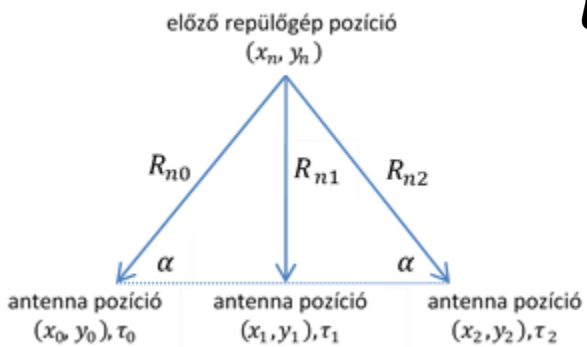
$$\mathbf{w}' = \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{w}, \quad \mathbf{C}_{\mathbf{w}'} = E[\mathbf{A}\mathbf{w}\mathbf{w}'\mathbf{A}^T] = \sigma_w^2[\mathbf{A}\mathbf{A}^T].$$

$$\hat{\mathbf{a}}' = [\mathbf{U}^T[\mathbf{A}\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T[\mathbf{A}\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{z}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}'} = \sigma_w^2[\mathbf{U}^T[\mathbf{A}\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{U}]^{-1}.$$

Egyszerű numerikus példa:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} -\cos\alpha & 1 - \sin\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}\mathbf{A}^T]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\hat{\mathbf{a}}' = \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_s \\ \delta \hat{y}_s \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \frac{-1}{2\cos\alpha} & \frac{-1}{2\cos\alpha} \\ \frac{1}{2(1-\sin\alpha)} & \frac{-1}{2(1-\sin\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}'} = \sigma_w^2[\mathbf{U}^T[\mathbf{A}\mathbf{A}^T]^{-1}\mathbf{U}]^{-1} = \sigma_w^2 c^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2\cos^2\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{3/2}{(1-\sin\alpha)^2} \end{bmatrix}$$

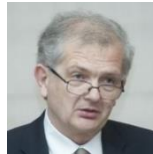
Ha z_1 és z_2 értéke azonos és negatív, akkor csak vízszintes, pozitív előjelű elmozdulás lesz.

Az ábra szerinti elrendezésben, ha a repülőgép távolsága a középső antennától $\sim 30 \text{ km}$, és $c = 300\,000 \text{ km/s}$, akkor a terjedési idő: $\sim 100 \mu\text{s}$, azaz ilyen nagyságrendű időtartamok különbségének mérését kell pontosan megoldani.

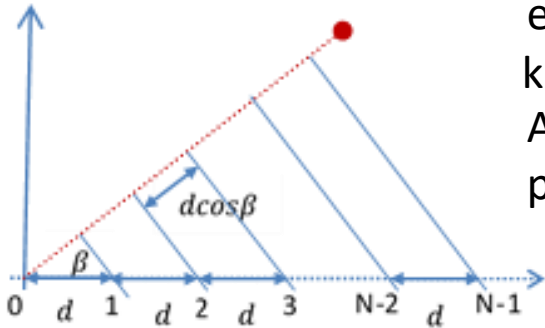
Ha a terjedési idő megfigyelésének szórása $1 \mu\text{s}$ és $\alpha = 30$ fok, akkor $\sqrt{\text{var}[\delta x_s]} \sim \sqrt{6} * 100 \text{ m}$, $\sqrt{\text{var}[\delta y_s]} \sim 3\sqrt{6} * 100 \text{ m}$.

A megadott távolság és szögadat mellett a szomszédos antenna pozíciók egymástól mért távolsága $\sim \sqrt{3} * 30 \text{ km}$.

Ha α kicsi, akkor jobb eredményt kapunk.



Példa: Irányszög mérése



A feladat β **irányszög mérése** az ismeretlen pozícióból kibocsátott **szinuszos hullámforma** egymástól egyforma távolságra elhelyezett N **vevő** segítségével. Ha a forrás **kellően messze van**, akkor a kibocsátott hullámok **síkhullámoknak tekinthetők**, és a haladásuk két antenna között azonos idejű. A hullám a $(k - 1)$ -edik antenna pozícióban $d \cos \beta / c$ idővel **le van maradva** az k -edik antenna pozícióhoz képest. A kibocsátott jel: $A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$, ami az k -edik antenna pozícióhoz

$$t_k = t_0 - k \frac{d \cos \beta}{c}, k = 0, 1, \dots, N - 1$$

időpontban jut el, ahol t_0 a **nulladik pozícióban** lévő antennához rendelt terjedési/késleltetési idő.

A k -edik pozíciójú antenna által vett jel: $s_k(t) = A \cos(2\pi f_0(t - t_k) + \varphi) = A \cos\left(2\pi f_0 \frac{d \cos \beta}{c} k + 2\pi f_0(t - t_0) + \varphi\right)$

Ha egy t_s időpillanatban ebből a jelből **minden antenna pozícióban** mintát veszünk: **egy térben haladó szinuszjel** mintáit kapjuk.

Ennek (a mintavételi frekvenciára relatív) frekvenciája és fázisa: A megfigyelési egyenlet:

$$f_s = f_0 \frac{d \cos \beta}{c}, \quad \varphi' = 2\pi f_0(t_s - t_0) + \varphi.$$

$$z_k = s_k(t_s) + w_k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Ebből becsüljük az $\mathbf{a} = [A \quad f_s \quad \varphi']^T$ paramétervektort. A keresett β szöget **származtatott jellemzőként** állítjuk elő.

A származtatott jellemző:

$$\mathbf{\alpha} = \begin{bmatrix} A \\ \beta \\ \varphi' \end{bmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{a}) = \mathbf{g}\left(\begin{bmatrix} A \\ f_s \\ \varphi' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A \\ \arccos\left(\frac{f_s c}{f_0 d}\right) \\ \varphi' \end{bmatrix},$$

Elvégezve a paramétervektor szerinti deriválást:

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \arccos\left(\frac{f_s c}{f_0 d}\right)}{\partial f_s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c}{f_0 d \sin \beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

CRLB β becslésének varianciájára:

$$\left[\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{a}}} - \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{a}) \left[\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right]^T \right]_{11} \geq 0.$$

$$\text{var}[\hat{\beta}] \geq \frac{c^2}{f_0^2 d^2 \sin^2 \beta} \text{CRLB}\{\text{var}[f_s]\} = \frac{c^2}{f_0^2 d^2 \sin^2 \beta} \frac{6\sigma_w^2}{\pi^2 A^2 N(N-1)},$$

vezessük be a hullámhossz (λ), az antenna-sor kiterjedése (L) és a jel/zaj viszony (η) kifejezését:

$$\text{var}[\hat{\beta}] \geq \frac{3}{\pi^2 \eta \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 N \left(\frac{N+1}{N-1}\right) \sin^2 \beta}$$

CRLB{var[f_s]} jön!

$$\lambda = \frac{c}{f_0}, L = (N - 1)d, \eta = \frac{A^2}{2\sigma_w^2}$$



$$\text{var}[\hat{\beta}] \geq \frac{3}{\pi^2 \eta \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 N \left(\frac{N+1}{N-1}\right) \sin^2 \beta}$$

Megjegyzések: A mintavételi tétel értelmében $0 \leq f_s < \frac{1}{2}$, ezért a $d < \lambda$ feltétel betartandó. Ha $\beta = 0$, akkor **a mérés lehetetlen**. A **pontosság nő**, ha közeledünk $\beta = 90^\circ$ -hoz.

Ilyenkor minden antenna nagyon jó közelítéssel azonos távolságra van a (távoli) forrástól, és ugyanazt a jelértéket veszi. Ha például $f_0 = 1\text{MHz}$, akkor $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ feltételezésével $\lambda = 300\text{m}$. Legyen $\beta = 90^\circ$, $d = \frac{\lambda}{2}$, $\eta = 0\text{dB}$ és $N = 10$! Ekkor

$$\text{var}[\hat{\beta}] \geq \frac{3}{\pi^2 1 \left(\frac{9}{2}\right)^2 10 \left(\frac{11}{9}\right)} = 0,0012281, \quad \sqrt{\text{var}[\hat{\beta}]} \geq 0,035 \text{ rad} \cong 2^\circ,$$

A szögmérés 2° -os szórásúnál nem tud pontosabb lenni. Javítani η javításával, ill. N növelésével lehet.

Ha az antennákat egy repülőgép szárnyán szeretnénk elhelyezni, akkor **a jelfrekvenciát** jelentős mértékben **növelnünk kell!** Egyébként változatlan adatok mellett $f_0 = 500\text{MHz}$ esetén $d = 0,3 \text{ m}$ adódik.

CRLB szinusz-jel frekvenciájának becsléséhez: A megfigyelés modellje:

$$z_k = A \cos(2\pi f_0 k + \varphi) + w_k = A \cos(\alpha_k) + w_k = s_k(A, f_0, \varphi) + w_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\text{var}(\hat{f}_0) \geq \frac{\sigma_w^2}{\sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\partial s_k(f_0)}{\partial f_0}\right)^2}$$

$$\text{var}(\hat{f}_0) \geq \frac{\sigma_w^2}{\sum_{k=0}^{N-1} (-A \sin(\alpha_k) 2\pi k)^2} = \frac{\sigma_w^2}{A^2 4\pi^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 \sin^2(\alpha_k)} \approx \frac{\sigma_w^2}{A^2 2\pi^2 \sum_{k=0}^{N-1} k^2} \quad \text{Mivel } \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}, \text{ ezért jó közelítéssel}$$

$$\text{var}(\hat{f}_0) \geq \frac{3\sigma_w^2}{A^2 \pi^2 N(N-1)(2N-1)},$$

ami akkor használható, ha A és φ ismert.

$$\text{var}(\hat{f}_0) \geq \frac{6\sigma_w^2}{\pi^2 A^2 N(N^2-1)},$$

ami akkor használható, amikor a három paramétert együtt mérjük.

Megjegyzés: A $\sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$ összefüggés teljes indukcióval bizonyítható:

$N = 1, 2$ behelyettesítéssel, majd N helyére $N + 1$ -et írva az összefüggés helyes eredményt ad.



1. Zajos megfigyelés(ek)re alapozva eldöntendő, hogy a megfigyelési csatornában az $a_0 = 1$ vagy egy attól eltérő a_1 jelszint van-e jelen? H_0 jelöli azt a hipotézist, hogy az a_0 jelszint van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_0 = 0.7$. H_1 jelöli azt a hipotézist, hogy az a_1 jelszint van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_1 = 0.3$. A költségek: $C_{10} = C_{01} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 1$. A feltételes valószínűségsűrűség függvények:

Az elsőként megfigyelt érték $z_0 = 1.6$.

Hogyan dönt (max. 3 pont)?

Elvégzünk egy második mérést is, aminek eredménye $z_1 = 1.8$.

Erre a mérésre alapozva hogyan dönt (max. 1 pont)? (max. 1 pont)?

$$f\{z|H_0\} = \begin{cases} \frac{1-\cos(\pi z)}{2}, & 0 \leq z \leq 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$f\{z|H_1\} = \begin{cases} \frac{z}{2}, & 0 \leq z \leq 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Hogyan dönt, ha mindkét megfigyelt értéket figyelembe veszi

A döntéseink rendre: H_0, H_1, H_1

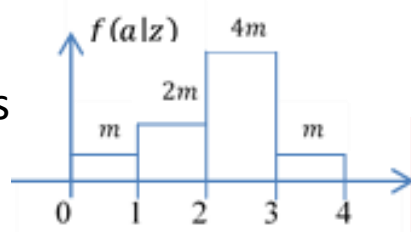
Megoldás:

A megfigyelt értéket behelyettesítjük a likelihood arány függvénybe, és ha $\Lambda(z) > \eta$, akkor a döntés H_1 , ha $\Lambda(z) < \eta$, akkor a döntés a H_0 . $\eta = \frac{0.7(10-1)}{0.3(10-1)} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \cong 2,33$, $\Lambda(z_0) = \frac{f(z_0|H_1)}{f(z_0|H_0)} \cong \frac{0.8}{0.345} = 2.32 < \eta$, $\Lambda(z_1) = \frac{f(z_1|H_1)}{f(z_1|H_0)} \cong \frac{0.9}{0.095} \cong 9.47 > \eta$,

$$\Lambda(z_0, z_1) = \frac{f(z_0|H_1) f(z_1|H_1)}{f(z_0|H_0) f(z_1|H_0)} \cong \frac{0.8}{0.345} \frac{0.9}{0.095} \cong \frac{0.72}{0.033} \cong 21,8 > \eta$$

$$E[a_1] = \int_{-\infty}^{\infty} z f\{z|H_1\} dz = \int_0^2 \frac{z^2}{2} dz = \left. \frac{z^3}{6} \right|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

2. Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 2 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 1 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) számértékét! Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő varianciáját (max. 3 pont)?



Megoldás: $m = \frac{1}{8}$ mert $m + 2m + 4m + m = 1$,

$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a f(a|z) da = \int_0^1 \frac{a}{8} da + \int_1^2 \frac{a}{4} da + \int_2^3 \frac{a}{2} da + \int_3^4 \frac{a}{8} da = \left. \frac{a^2}{16} \right|_0^1 + \left. \frac{a^2}{8} \right|_1^2 + \left. \frac{a^2}{4} \right|_2^3 + \left. \frac{a^2}{16} \right|_3^4 = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$$

$$\hat{a}_{ABS}: m + 2m + 4mx = 4m(1 - x) + m \rightarrow x = \frac{1}{4}, \hat{a}_{ABS} = 2\frac{1}{4}$$

$$\hat{a}_{MAP} = 2\frac{1}{2}$$



$$\text{var}(\hat{a}_{MS}) = E[a^2] - \hat{a}_{MS}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f(a|z) da - \hat{a}_{MS}^2 = \int_0^1 a^2 \frac{1}{8} da + \int_1^2 a^2 \frac{1}{4} da + \int_2^3 a^2 \frac{1}{2} da + \int_3^4 a^2 \frac{1}{8} da - \hat{a}_{MS}^2 =$$

$$= \frac{a^3}{24} \Big|_0^1 + \frac{a^3}{12} \Big|_1^2 + \frac{a^3}{6} \Big|_2^3 + \frac{a^3}{24} \Big|_3^4 - \hat{a}_{MS}^2 = 5 \frac{1}{3} - \left(2 \frac{1}{8}\right)^2 = 0,8177$$

3. Mérendő egy két komponens összegéből álló jel komponenseinek ismeretlen A és B amplitúdója N megfigyelésre alapozva: $z(n) = A \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + B \cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right) + w(n)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Az ismeretlen A és B paraméterek eloszlása nem ismert. A w_k megfigyelési zaj nulla várható értékű, Gauss eloszlású, színes zaj, kovariancia mátrixa C_w .

Vezesse le a paraméter legjobb maximum likelihood (ML) becslésének $(\hat{a}_{ML}, C_{\hat{a}_{ML}})$ összefüggéseit $(\hat{\mathbf{a}}_{ML} = [\hat{A}_{ML} \quad \hat{B}_{ML}]^T)$ (max. 3 pont)!

Határozza meg $C_{\hat{a}_{ML}}$ számértékét $\sigma_w = 0.1V$, $\rho = 0.5$ és $C_w = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}$ mellett (max. 3 pont)!

Megoldás:

Az együttes sűrűségfüggvény logaritmusának az $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ paramétertől függő része: $-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T \mathbf{C}_w^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})$

Ennek deriváltja $\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T \mathbf{C}_w^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a}) \right] = \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a}) = 0$, ahonnan $\hat{\mathbf{a}}_{ML} = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{z}$.

A becslő kovariancia mátrixa:

$$C_{\hat{\mathbf{a}}_{ML}} = E \left[(\hat{\mathbf{a}}_{ML} - E(\hat{\mathbf{a}}_{ML})) (\hat{\mathbf{a}}_{ML} - E(\hat{\mathbf{a}}_{ML}))^T \right] = E \left[\{ [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a}) \} \{ [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a}) \}^T \right] =$$

$$= [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} E \{ (\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T \} \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U} [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1} = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1}$$

ahol felhasználtuk, hogy $E(\hat{\mathbf{a}}_{ML}) = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}\mathbf{a}$, valamint, hogy definíciója szerint $E\{(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{a})^T\} = \mathbf{C}_w$



A numerikus értékek meghatározásához:

ahol most $N = 3$.

inverze:

$$\mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} 1 & \cos \frac{2\pi}{N} & \dots & \cos \frac{2\pi}{N} (N-1) \\ 1 & \cos \frac{4\pi}{N} & \dots & \cos \frac{4\pi}{N} (N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_w = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_w^{-1} = \frac{1}{\sigma_w^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\rho^2} & -\frac{\rho}{1-\rho^2} \\ 0 & -\frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} \end{bmatrix} = \frac{100}{v^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}] = \frac{100}{v^2} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ 1 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \frac{400}{3v^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezt a mátrixot most itt invertálni kellene, de ez szinguláris! Hogyan lehetséges ez?

Ennek oka, hogy a **méréstervezés hibás**, és ennek következtében a \mathbf{U} mátrix két oszlopa egymással megegyezik.

A hiba ott van, hogy a $B \cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right)$ komponensre $N = 3$ esetén **nem teljesül a mintavételi tétel**, és ezért nem kapunk megfelelő információt erről a komponensről, úgy tűnik, mintha az is $\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ hullámformájú komponens lenne.

Így aztán értelmezhetetlen a mért jelet két paraméterrel jellemezni!

4. A vizsgált környezetről feltételezzük, hogy jellemezhető $y(t) = a_1 u(t) + a_2 u^2(t) + w(t)$ időfüggvénnyel. Elvégezzük N mérést. Határozza meg az időfüggvény paramétereinek legkisebb négyzetes hibájú \hat{a}_{LS} becslőjét (max. 3 pont)! Határozza meg a becslő közelítő számértékét arra az esetre, amikor adott $E\{u^2(t)\} = 1, E\{u^3(t)\} = 2, E\{u^4(t)\} = 5, E\{u^2(t)y(t)\} = 3, E\{u(t)y(t)\} = 1$ (max. 2 pont)!

Megoldás:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & u_0^2 \\ u_1 & u_1^2 \\ \vdots & \vdots \\ u_{N-1} & u_{N-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{a}_{LS} = [\mathbf{U}^T \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{z}, \quad [\mathbf{U}^T \mathbf{U}] = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 & \sum_{n=0}^{N-1} u_n^3 \\ \sum_{n=0}^{N-1} u_n^3 & \sum_{n=0}^{N-1} u_n^4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^T \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n \\ \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^4\right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^3\right)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^4 & -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^3 \\ -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^3 & \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 y_n \end{bmatrix} =$$



$$\begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2\right)\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^4\right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^3\right)^2} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^4\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n\right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^3\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 y_n\right) \\ - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^3\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n\right) + \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 y_n\right) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5. Mutassa be, hogy mire szolgál a Cramer-Rao alsó korlát (CRLB): skalár paraméter esetre adja meg (1) alkalmazásának feltételeit (max. 2 pont); (2) számításának módját (max. 2 pont); (3) az alsó korlát elérésének feltételét (max. 2 pont)! Vezesse le a CRLB számítás explicit összefüggését arra az esetre, amikor a megfigyeléseink a becsülendő a paramétertől függő jel zajos mintái, és a zajról feltételezhetjük, hogy Gauss eloszlású fehér zaj σ_w^2 varianciával (max. 3 pont)!

Megoldás: Cramer-Rao alsó korlát (Cramer-Rao Lower Bound: CRLB, skalár paraméter esete a jegyzet alapján)

Bármely torzítatlan becslő esetében a becslés varianciájára alsó korlátot ad: $\text{var}(\hat{a}) \geq \text{CRLB}(a)$

A CRLB a függvénye. Megmondja mi az elérhető legkisebb variancia. Ha egy becslővel elérjük ezt a varianciát, akkor a becslőt hatásosnak nevezzük. Maga a CRLB elvezethet az MVU becslőhöz. A CRLB-re vonatkozó állítás:

Tételezzük fel, hogy a mérési adatok valószínűség sűrűségfüggvényére teljesül minden a esetében:

$$E \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right] = 0$$

Ez az ún. regularitási feltétel, amihez az integrálás és a deriválás felcserélhetősége kötődik. Képezve ugyanis a várható értéket, majd az integrálást és a deriválást felcserélve:

$$E \left[\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} f(z; a) dz = \frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} f(z; a) dz = \frac{\partial}{\partial a} 1 = 0$$

Ekkor bármely torzítatlan becslőre igaz, hogy:

$$\text{var}(\hat{a}) \geq \left[-E \left(\frac{\partial^2 \ln f(z; a)}{\partial a^2} \right) \right]^{-1}$$

Egy olyan torzítatlan becslő, amelyik eléri a Cramer-Rao alsó korlátot akkor és csak akkor található, ha:

$$\frac{\partial \ln f(z; a)}{\partial a} = I(a)(g(z) - a)$$

struktúrájú, ahol $g(z)$ és $I(a)$ alkalmas függvények. Ilyenkor a becslő $\hat{a} = g(z)$, és a variancia minimum $\frac{1}{I(a)}$.

Ismeretlen a jelparaméter varianciájának alsó korlátja: A megfigyelt értékek egy a -tól függő jel zajos mintái: $x_k = s(k; a) + w_k = s_k(a) + w_k, k = 0, 1, \dots, N - 1; \{w_k\}$ Gauss eloszlású, fehér zaj ismert σ_w^2 varianciával.



$$f(\mathbf{z}; a) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - s_k(a))^2} \quad \frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; a)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - s_k(a)) \frac{\partial s_k(a)}{\partial a} \quad \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; a)}{\partial a^2} = \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{k=0}^{N-1} \left[(x_k - s_k(a)) \frac{\partial^2 s_k(a)}{\partial a^2} - \left[\frac{\partial s_k(a)}{\partial a} \right]^2 \right]$$

Képezve a várható értéket:

$$I(a) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{z}; a)}{\partial a^2} \right] = \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\partial s_n(a)}{\partial a} \right]^2$$

Ezzel a becslt paraméter varianciájának alsó korlátja:

$$\text{var}(\hat{a}) \geq \frac{\sigma_w^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\partial s_n(a)}{\partial a} \right]^2}$$

6. Távolságot mérünk radarral: $R = \tau \frac{c}{2}$, ahol τ a reflektálódott elektromágneses hullám terjedési ideje, c a fénysebesség. A terjedési idő megfigyelésére van lehetőségünk, összesen négy megfigyelést végzünk. A megfigyelési egyenlet: $z_k = \tau_k + w_k$, ahol w_k nulla várható értékű, $C_w = \sigma_w^2 I$ kovariancia mátrixú, Gauss eloszlású zaj.

Válasszon olyan mérési módszert, amely minimális varianciájú, torzítatlan becslést eredményez!

Vezesse le a becslés varianciájának CRLB értékét, és fejezze ki a becslőt és annak szórását (max. 4 pont)!

Adja meg a numerikus értékeket is, ha $z_0 = 95\mu s$, $z_1 = 105\mu s$, $z_2 = 97\mu s$, $z_3 = 103\mu s$, $\sigma_w = 4\mu s$ (max. 1 pont)!

Ezt követően határozza meg a távolság értékét és szórását ($c = 3 \cdot 10^5 \frac{km}{s}$) (max. 1 pont)!

Megoldás: Az együttes sűrűségfüggvény logaritmusának a τ paramétertől függő része: $-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\tau)^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\tau)$

Ennek deriváltja τ szerint: $\frac{\partial}{\partial \tau} \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\tau)^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\tau) \right] = \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\tau)$, ahonnan $\hat{\tau}_{ML} = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{z}$,

illetve

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}; \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\tau)^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\tau) \right] = \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{U}\tau) = \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U} ([\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{z} - \tau) = I(\tau)(g(\mathbf{z}) - \tau)$$

azaz a becslő varianciája: $\text{var}(\hat{\tau}_{ML}) = I^{-1}(\tau) = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1}$ A numerikus értékek érdekében:

$$\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U} = \frac{1}{\sigma_w^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{\sigma_w^2}$$

$$\text{var}(\hat{\tau}_{ML}) = I^{-1}(\tau) = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1} = \frac{\sigma_w^2}{4}, \hat{\tau}_{ML} = [\mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{U}]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}_w^{-1} \mathbf{z} = \frac{z_0 + z_1 + z_3 + z_4}{4}$$

$$\hat{\tau}_{ML} = 100\mu s, \sqrt{\text{var}(\hat{\tau}_{ML})} = \sqrt{4} = 2\mu s$$

$$\hat{R}_{ML} = \hat{\tau}_{ML} \frac{c}{2} = 10^{-4} \frac{3 \cdot 10^5}{2} km = 15km,$$

$$\sqrt{\text{var}(\hat{R}_{ML})} = \frac{c}{2} \sqrt{\text{var}(\hat{\tau}_{ML})} = \frac{3 \cdot 10^5}{2} 2 \cdot 10^{-6} \approx 300m$$



7.*A $z(n) = A \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_m} n + \varphi\right) + w(n)$ összefüggéssel leírható megfigyelési modellt alkalmazunk, ahol $w(n)$ Gauss eloszlású, fehér zaj, f_m pedig a mintavételi frekvencia. A mért jelből 125 mintát veszünk. A jel/zaj viszony: $\frac{A^2}{2\sigma_w^2} = 10$.

Vezesse le a frekvenciabecslés varianciájának Cramer-Rao alsó korlátját megadó összefüggést, és számítsa ki numerikus értékét, ha $\frac{f_0}{f_m} = 0.02$ (max. 5 pont)!

A **megoldás** során a jegyzet mellékletében bemutatott eljárást kell követni annak figyelembevételével, hogy a 125 minta **nem egészszámú periódusból** származik.

