

**6. Szűréselmélet alapjai (folyt.):**

**Kalman szűrő vektoros esetben:**

A rendszermodell:  $x(n) = Ax(n-1) + w(n-1)$ , a megfigyelés:  $y(n) = Cx(n) + n(n)$ . Mind a rendszer, mind a megfigyelési zaj vektor nulla várható értékű és fehér. Korreláció mátrixaik:

$Q(n) = E\{w(n)w^T(n)\}$  (ez lép  $\sigma_w^2$  helyébe),  $R(n) = E\{n(n)n^T(n)\}$ , (ez lép  $\sigma_n^2$  helyébe). Az optimális rekurzív szűrő

$$\begin{aligned} \hat{x}(n) &= A\hat{x}(n-1) + K(n)(y(n) - CA\hat{x}(n-1)) \\ K(n) &= P_1(n)C^T [CP_1(n)C^T + R(n)]^{-1}, \text{ ahol} \\ P_1(n) &= AP(n-1)A^T + Q(n-1) \\ P(n) &= P_1(n) - K(n)CP_1(n) = (I - K(n)C)P_1(n) \\ P_1(n+1) &= A(I - K(n)C)P_1(n)A^T + Q(n) \end{aligned} \quad (165)$$

Itt  $K(n)$  a Kalman erősítés,  $P(n)$  a hiba kovariancia mátrixa,  $P_1(n)$  pedig segédmátrix a számítások egyszerűsítése céljából.

**Kalman prediktor vektoros esetben:**

A rendszermodell:  $x(n+1) = Ax(n) + w(n)$ , a megfigyelés:  $y(n) = Cx(n) + n(n)$ . Mind a rendszer, mind a megfigyelési zaj vektor nulla várható értékű és fehér. Korreláció mátrixaik:

$Q(n) = E\{w(n)w^T(n)\}$  (ez lép  $\sigma_w^2$  helyébe),  $R(n) = E\{n(n)n^T(n)\}$ ,

(ez lép  $\sigma_n^2$  helyébe). Az optimális rekurzív prediktor:

$$\hat{x}(n+1) = A\hat{x}(n) + G(n)(y(n) - C\hat{x}(n)), \quad (166)$$

és keressük azt a  $G(n)$  mátrixot, amely mellett a becslés

$$P(n+1) = E\{[x(n+1) - \hat{x}(n+1)][x(n+1) - \hat{x}(n+1)]^T\} = E\{e(n+1)e^T(n+1)\} \quad (167)$$

kovariancia mátrixa minimális. Képezzük (167) deriváltját  $G(n)$  szerint. Az optimumot akkor kapjuk, ha ez a derivált nullával egyenlő:

$$\frac{\partial P(n+1)}{\partial G(n)} = -2E\{[x(n+1) - \hat{x}(n+1)][y(n) - C\hat{x}(n)]^T\} = 0. \quad (168)$$

Ha a (168) összefüggésbe behelyettesítjük a rendszermodell és a prediktor összefüggéseit, akkor:

$$\begin{aligned} E\{[Ax(n) + w(n) - A\hat{x}(n) - G(n)(Cx(n) + n(n) - C\hat{x}(n))][Cx(n) + n(n) - C\hat{x}(n)]^T\} &= \\ = E\{[(A - G(n)C)e(n) + w(n) - G(n)n(n)][Ce(n) + n(n)]^T\} &= \\ = [A - G(n)C]P(n)C^T - G(n)R(n) &= 0 \end{aligned} \quad (169)$$

A (169) összefüggés felírásakor felhasználtuk az alábbi előzetes ismereteinket:

$$E\{e(n)n^T(n)\} = E\{w(n)e^T(n)\} = E\{n(n)e^T(n)\} = E\{w(n)n^T(n)\} = 0 \quad (170)$$

A (169) összefüggésből a keresett prediktor erősítés:

$$G(n) = AP(n)C^T [CP(n)C^T + R(n)]^{-1}. \quad (171)$$

A becslés (167) szerinti kovariancia mátrixa:

$$\begin{aligned}
 P(n+1) &= [(A - G(n)C)e(n) + w(n) - G(n)n(n)][(A - G(n)C)e(n) + w(n) - G(n)n(n)]^T = \\
 &= [A - G(n)C]P(n)[A - G(n)C]^T + Q(n) + G(n)R(n)G^T(n). \quad (172)
 \end{aligned}$$

**Megjegyzés:** A (172) összefüggés alapján látható, hogy a becslés kovariancia mátrixa három hatás eredményeképpen alakul:

- A megfigyelő tárgyalásakor megismert hibacsökkentő hatás az  $[A - G(n)C]$  kontraktivitásának következtében, de most – a kritériumnak betudható módon – négyzetes formában.
- A rendszerzaj kovariancia mátrixa által közvetített, statisztikai értelemben vett hibanövelő hatás, amely annak tudható be, hogy a  $w(n)$  diszkrét érték „perturbálja”  $x(n+1)$  – az előző állapot alapján – jóslott értékét.
- A megfigyelési zaj kovariancia mátrixa pedig ugyancsak hibát növel statisztikai értelemben, ami annak tudható be, hogy az  $n(n)$  diszkrét érték „perturbálja”  $\hat{x}(n+1)$  – az előző állapot alapján – jóslott értékét.

A (172) összefüggés írható kompaktabb formában, mert első tagját kifejtve:

$$\begin{aligned}
 P(n+1) &= AP(n)A^T - AP(n)C^T G^T(n) - G(n)CP(n)A^T + G(n)CP(n)C^T G^T(n) + \\
 &+ G(n)R(n)G^T(n) + Q(n). \quad (173)
 \end{aligned}$$

A negyedik és az ötödik tag összevonásával, és (171) felhasználásával:

$G(n)[CP(n)C^T + R(n)]G^T(n) = AP(n)C^T G(n)$ , ami viszont kiejti (173) második tagját. Marad az első, harmadik és hatodik tag, amiből:

$$P(n+1) = [A - G(n)C]P(n)A^T + Q(n) \quad (174)$$

**Összefoglalva:**

A rendszermodell:  $x(n+1) = Ax(n) + w(n)$ , a megfigyelés:  $y(n) = Cx(n) + n(n)$ . Az optimális rekurzív (ún. Kalman) prediktor:

$  \begin{aligned}  \hat{x}(n+1) &= A\hat{x}(n) + G(n)(y(n) - C\hat{x}(n)) \\  G(n) &= AP(n)C^T [CP(n)C^T + R(n)]^{-1} \\  P(n+1) &= (A - G(n)C)P(n)A^T + Q(n)  \end{aligned}  $	(175)
--	-------

**Mejegyzés:** Az optimális rekurzív becslő használható modellillesztésre is. Az illesztett modell továbbra is az adaptív lineáris kombinátor. Ilyenkor, használva a korábbi jelöléseket, továbbá feltételezve, hogy  $Q(n)=0$ , a (175) összefüggés az alábbiak szerint alakul:

$$W(n+1) = W(n) + G(n)(y(n) - X^T(n)W(n)) = W(n) + G(n)e(n) \quad (176)$$

$$G(n) = P(n)X(n)[X^T(n)P(n)X(n) + R(n)]^{-1} \quad (177)$$

$$P(n+1) = (I - G(n)X^T(n))P(n) \quad (178)$$

ahol most  $P(n)$  a paraméterbecslés „kovariancia” mátrixa:  $P(n) = E\{V(n)V^T(n)\}$ ,  $X(n)$  pedig a regressziós vektor. Érdemes visszalapozni a (108)-(121) összefüggésekhez.

**Megjegyzés:**

Érdemes összevetni a 2. ábrán látható megfigyelő modellt a 36. ábrán látható Kalman prediktorral.

1. Figyeljük meg, hogy a (172) összefüggés első tagja nagyon hasonlít az (5) összefüggéshez, az eltérés csupán a négyzetes jelleg. Értelemszerűen itt is igaz, hogy a

hiba csökkenéséhez a hibarendszer állapotátmenet mátrixának, az  $F(n) = A - G(n)C$  mátrixnak kontraktívnak kell lennie.

2. Ha a zajfolyamatok stacionáriusak, akkor  $Q(n)=Q, R(n)=R$ .
3. Vegyük észre, hogy a megfigyelt rendszer modellje hogyan épül be a megfigyelőbe.

### 7. Modell-alapú jelfeldolgozás

A fejezet keretében modell-alapú jel-reprezentációs kérdésekkel foglalkozunk. Az alkalmazott megközelítés lényege, hogy a jeleket az őket generálni képes modellekkel reprezentáljuk, és ezeknek a modelleknek a feltételezésével megfigyelőket készítünk. A keresett jel jellemzők a megfigyelő jellemzőiből kiolvashatók.

#### 7.1. Az alapok felidézése

Előljáróban a digitális jelfeldolgozás legalapvetőbb módszereit tekintjük át. Ezek között kiemelt szerepet kapnak a rekurzív átlagolások.

- Egyszerű átlagolás (lásd 37. ábra):

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n y(k) = \frac{n}{n+1} \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} y(n) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1} [y(n) - \hat{x}(n)] \quad (179)$$

Vegyük észre, hogy itt  $A=C=1, G(n) = \frac{1}{n+1}$ .  $G(n) \rightarrow 0$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

- Exponenciális átlagolás (lásd 38. ábra):

$$\hat{x}(n+1) = a\hat{x}(n) + by(n), \quad (180)$$

ahol  $a$  és  $b$  konstansok. A frekvenciatartománybeli viselkedés leírására használható a  $z$ -transzformáció:  $z\hat{X}(z) = a\hat{X}(z) + bY(z)$ , amiből kifejezhető az exponenciális átlagoló átviteli függvénye:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{b}{z-a} = \frac{bz^{-1}}{1-az^{-1}} \quad (181)$$

Ez egy alul-áteresztő szűrő, amely, ha konstans jelet kap, akkor a tranziens lejátszódása kimenetén ugyanez a konstans jelenik meg. Ehhez pedig az kell, hogy (181) ennek megfelelően legyen normálva, vagyis  $H(z) = 1$ , ha  $z=1$ . Ezzel (181) behelyettesítési értéke

$\frac{b}{1-a} = 1$ , vagyis  $a = 1-b$ . Ezzel a (180) összefüggés

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + b(y(n) - \hat{x}(n)). \quad (182)$$

Vegyük észre, hogy itt is  $A=C=1$ , továbbá  $G(n)=b$ . Ennek megfelelően ilyenkor a megfigyelt új értéket egy konstanssal szorozzuk, ellentétben a lineáris átlagolással.

**Megjegyzés:** A (182) összefüggés felhasználásával:

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= 0, \quad \hat{x}(1) = by(0), \\ \hat{x}(2) &= \hat{x}(1) + b(y(1) - \hat{x}(1)) = (1-b)by(0) + by(1), \\ \hat{x}(3) &= \hat{x}(2) + b(y(2) - \hat{x}(2)) = (1-b)^2 by(0) + (1-b)by(1) + by(2), \end{aligned} \quad (183)$$

A (183) összefüggés alapján, mivel  $0 < b < 1$ , a régebbi mintákat egyre kisebb súllyal vesszük figyelembe.

**Megjegyzés:** Az exponenciális átlagolás egy rögzített sáv szélességű aluláteresztő szűrésnek felel meg. Hozzá képest az egyszerű átlagolás úgy illusztrálható, mint folyamatosan egyre kisebb sáv szélességű aluláteresztő szűrő.

- Csúszó-ablakos (sliding window, moving average) átlagolás (lásd 39. ábra):

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^{n-1} y(k) \Rightarrow \hat{x}(n+1) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^n y(k) = \hat{x}(n) + \frac{1}{N} [y(n) - y(n-N)] \quad (184)$$

Itt is  $A=C=1$ , de a becsatolás módja más. Itt is tudjuk értelmezni az átlagoló átviteli függvényét, mert (184) z-transzformáltja:  $z\hat{X}(z) = \hat{X}(z) + \frac{1}{N}(1-z^{-N})Y(z)$ , amiből:

$$H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} 1 - z^{-N}}{N 1 - z^{-1}} \quad (185)$$

**Megjegyzés:**

- $1 - z^{-N}$  osztható az  $1 - z^{-1}$  tényezővel, az eredmény:  $1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(N-1)}$ , ami azt fejezi ki, hogy  $N$  egymást követő mintát adjunk össze.
- A  $1 - z^{-N}$  tényező gyökei az  $N$ -edik egységgyökök:  $\sqrt[N]{1} = z$ .

**1. Példa:** Egyszerű átlagolás, frekvenciatartománybeli viselkedés:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{y(n) + y(n-1)}{2}, \text{ illetve a z-transzformációval: } z\hat{X}(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}Y(z), \text{ ill. az átviteli}$$

függvény:  $H(z) = z^{-1} \frac{1+z^{-1}}{2}$ .  $z = e^{j\omega T}$  helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T} \frac{1+e^{-j\omega T}}{2} = e^{-j\frac{3}{2}\omega T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2} = e^{-j\frac{3}{2}\omega T} \cos \frac{\omega T}{2}. \quad (186)$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika:  $|H(e^{j\omega T})| = \left| \cos \frac{\omega T}{2} \right|$ , a fázis-karakterisztika:

$\varphi(\omega) = -\frac{3}{2}\omega T$ , az  $\omega T = k\pi$  helyen, ahol  $k = \pm 1, \pm 3, \dots$   $\pi$  fázisugrással (az előjelváltás miatt).

Lásd 40. ábra.

**2. Példa:** Egyszerű differenciálás, frekvenciatartománybeli viselkedés:

$$\hat{x}(n+1) = \frac{y(n) - y(n-1)}{2}, \text{ illetve a z-transzformációval: } z\hat{X}(z) = \frac{1-z^{-1}}{2}Y(z), \text{ ill. az átviteli}$$

függvény:  $H(z) = z^{-1} \frac{1-z^{-1}}{2}$ .  $z = e^{j\omega T}$  helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T} \frac{1-e^{-j\omega T}}{2} = je^{-j\frac{3}{2}\omega T} \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j} = je^{-j\frac{3}{2}\omega T} \sin \frac{\omega T}{2}. \quad (187)$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika:  $|H(e^{j\omega T})| = \left| \sin \frac{\omega T}{2} \right|$ , a fázis-karakterisztika:

$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\omega T$ , az  $\omega T = k2\pi$  helyen, (ahol  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )  $\pi$  fázisugrással (az előjelváltás miatt). Lásd 41. ábra. (Vedd észre, hogy a fáziskarakterisztika hibás, mert a fázisugrás nem  $\pi$ -nél van!)

**3. Példa:** Csúszó-ablakos átlagolás, frekvenciatartománybeli viselkedés:

A (185) összefüggés szerint az átviteli függvény:  $H(z) = \frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-1} 1 - z^{-N}}{N 1 - z^{-1}}$ .  $z = e^{j\omega T}$  helyettesítéssel:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{-j\omega T} 1 - e^{-jN\omega T}}{N 1 - e^{-j\omega T}} = \frac{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega T} e^{j\frac{N\omega T}{2}} - e^{-j\frac{N\omega T}{2}}}{N \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2}} = \frac{e^{-j\frac{N-1}{2}\omega T} \sin \frac{N\omega T}{2}}{N \sin \frac{\omega T}{2}}. \quad (188)$$

Ebből az amplitúdó-karakterisztika:  $|H(e^{j\omega T})| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin \frac{N\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right|$  (lásd 42. ábra), a fázis-

karakterisztika:  $\varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega T$ , az  $\omega T = k \frac{2\pi}{N}$  helyen, (ahol  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ )  $\pi$

fázisugrással (az előjelváltás miatt), kivéve azokat a helyeket, ahol  $\sin \frac{\omega T}{2}$  is előjelet vált.

## 7.2. Jelek reprezentációja jelterekben

**Jelterek:** az euklideszi tér általánosításai

- általánosított távolság > metrikus tér
- algebrai alapműveletek + linearitás > lineáris tér
- norma (kapcsolat a metrikával) > normált lineáris tér
- skalár v. belső szorzat >  $(a, b) = a^T b = b^T a$ .

**Lineáris vektortér:** bázisvektorok:  $\varphi_m, m=0, 1, \dots, N-1$ . Ezekkel az  $x$  vektor reprezentációja:

$$x = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m \varphi_m, \quad (189)$$

ahol  $\{\alpha_m\}$ ,  $m=0, 1, \dots, N-1$ , a báziselemekből készített lineáris kombináció súlytényezője. Meghatározása:

$$(x, \varphi_n) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m (\varphi_m, \varphi_n), \quad n=0, 1, \dots, N-1 \quad (190)$$

egyenletrendszer megoldásával.

Hasznos az ún. reciprok bázis alkalmazása:  $\theta_m, m=0, 1, \dots, N-1$ ;  $(\varphi_m, \theta_n) = \delta_{mn}$ , ahol

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{ha } m = n \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Ezzel:

$$(x, \theta_n) = \sum_{m=0}^{N-1} \alpha_m (\varphi_m, \theta_n), \quad \text{vagyis } \alpha_m = (x, \theta_m), \quad \text{amivel}$$

$$x = \sum_{m=0}^{N-1} (x, \theta_m) \varphi_m = \sum_{m=0}^{N-1} (x, \varphi_m) \theta_m. \quad (191)$$

A bázis ortonormált, ha  $(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}$ , amivel  $x = \sum_{m=0}^{N-1} (x, \varphi_m) \varphi_m$ .

**Megjegyzés:**  $\varphi_m = [\varphi_m(0), \varphi_m(1), \dots, \varphi_m(N-1)]^T$ , ahol a zárójelben megadott indexek értelmezhetők diszkrét időindexként.

**Lineáris tér:** a bázisok folytonos függvények, azaz  $\varphi_m \rightarrow \varphi_m(t)$ ,  $\theta_m \rightarrow \theta_m(t)$ . Ezzel az  $x(t)$  jel reprezentációja:

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \varphi_m(t), \text{ ahol } \alpha_m = (x(t), \theta_m(t)) \quad (192)$$

**Példa:** Fourier sorfejtés:  $\varphi_m(t) = \exp(j2\pi mt)$ ,  $\theta_m(t) = \exp(-j2\pi mt)$ ,  $m=0,1,\dots,N-1$ .

**Integrál-transzformáció:** a bázisoknál  $m$  szerint is végtelen finom felbontás, ill. végtelen dimenzió: a bázisokból összeáll egy kétváltozós függvény, a súlyozó együttható helyére pedig egy egyváltozós függvény lép.  $m \rightarrow s$ , ilyenkor

$$\boxed{x(t) = \int_s \alpha(s) \varphi(t, s) ds \quad \alpha(s) = \int_T x(t) \theta(s, t) dt} \quad (193)$$

integrál-transzformáció párok.

**Példa:** Fourier integrál:  $\varphi(t, s) = 1 / \theta(s, t) = \exp(j2\pi st)$ .

**Megjegyzések:**

1. Diszkrét integrátor: a 43. ábrán látható rendszer időtartományi leírása:

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + y(n), \text{ átviteli függvénye: } \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

Egy ilyen rendszer a bemenetére adott értékeket az előző összeghez adja. Figyeljük meg, hogy az átviteli függvény átírásakor felhasználtuk a mértani sor összegképletét.

2. A Fourier integrál hatása: Az  $x(t)$  jelet szorozzuk az  $\exp(-j2\pi f_0 t)$  komplex exponenciálissal, aminek hatására a jel spektruma balra tolódik  $f_0$ -val. (Lásd 44. ábra.) Az integrálás végtelen keskeny alul-áteresztő szűrőnek felel meg, amelynek kimenetén az  $f_0$  frekvenciánál érvényes spektrum-értéket kapjuk.

**7.3. Megfigyelő jelfeldolgozási feladatokra**

Jelölés:  $\{c_m(n)\}$ ,  $\{g_m(n)\}$  jelöli a bázis/reciprok bázis rendszereket,  $m, n = 0, 1, \dots, N-1$ . A mérendő jelről azt tételezzük fel, hogy a bázis-rendszer elemek lineáris kombinációjaként áll elő, és a bázisvektorok dimenziójának megfelelő mintából álló diszkrét jel. A súlyozó együtthatókat bemenet nélküli, diszkrét integrátorokban tárolt értékek adják. (lásd 45. ábra.) Ezek az értékek a jelet generáló hipotetikus rendszer  $x(n) = [x_0(n) \ x_1(n) \ \dots \ x_{N-1}(n)]^T$  állapotváltozói. Ezek  $\hat{x}(n) = [\hat{x}_0(n) \ \hat{x}_1(n) \ \dots \ \hat{x}_{N-1}(n)]^T$  becslőjét megfigyelővel állítjuk elő. A hipotetikus jelgeneráló rendszert leíró egyenletek:

$$x(n+1) = x(n) \quad y(n) = c^T(n)x(n); \quad (194)$$

a megfigyelőt leíró egyenletek pedig:

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + g(n)c^T(n)[x(n) - \hat{x}(n)] \quad (195)$$

A hibarendszer:

$$x(n+1) - \hat{x}(n+1) = (I - g(n)c^T(n))[x(n) - \hat{x}(n)] \quad (196)$$

$$x(n+1) - \hat{x}(n+1) = \prod_{k=0}^n (I - g(k)c^T(k))[x(0) - \hat{x}(0)] \quad (197)$$

$N$  lépéses konvergenciát akkor kapunk, ha:

$$\prod_{k=0}^{N-1} (I - g(k)c^T(k)) = 0 \quad (198)$$

Ez viszont teljesül, ha  $\{c_m(n)\}$ ,  $\{g_m(n)\}$  bázis/reciprok bázis párt alkotnak ( $m, n = 0, 1, \dots, N-1$ ), ugyanis minden olyan tag, melyben szerepel  $g(i)c^T(i)g(j)c^T(j)$ , és  $i \neq j$ : nullát ad a bázis/reciprok bázis elemek ortogonalitásának köszönhetően, továbbá

$$\prod_{k=0}^{N-1} (I - g(k)c^T(k)) = I - \sum_{i=0}^{N-1} g(i)c^T(i) = 0. \quad (199)$$

**Megjegyzések:**

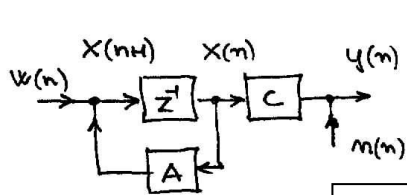
1. A diszkrét Fourier transzformáció (DFT) esetén:

$$\{c_m(n) = \exp(j \frac{2\pi}{N} mn)\}, \quad \{g_m(n) = \frac{1}{N} \exp(-j \frac{2\pi}{N} mn)\} \quad (200)$$

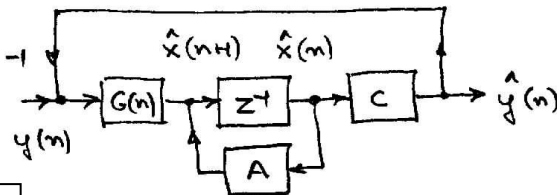
2. A  $\sum_{k=0}^{N-1} g(k)c^T(k) = I$  bizonyítása: Írjuk fel a  $g(k)c^T(k)$  diadikus szorzatot:

$$\begin{bmatrix} g_0(k) \\ g_1(k) \\ \vdots \\ g_{N-1}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0(k) & c_1(k) & \dots & c_{N-1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0(k)c_0(k) & g_0(k)c_1(k) & \dots & g_0(k)c_{N-1}(k) \\ g_1(k)c_0(k) & g_1(k)c_1(k) & \dots & g_1(k)c_{N-1}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}(k)c_0(k) & g_{N-1}(k)c_1(k) & \dots & g_{N-1}(k)c_{N-1}(k) \end{bmatrix}$$

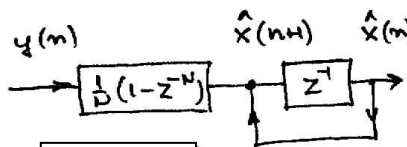
Ha ezek után,  $k$ -t futtatva, minden mátrix elemre végrehajtjuk az összegzést, akkor minden elem helyén egy-egy skalár-szorzatot számítunk ki, aminek eredményeképpen a főátlóban 1-esek, az összes többi helyen pedig 0-ák fognak állni.



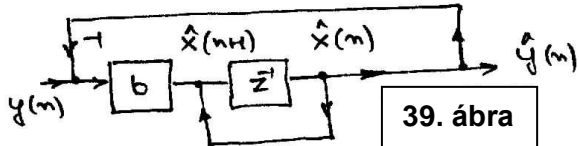
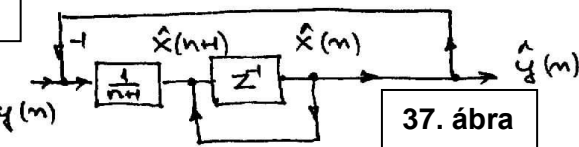
36. ábra



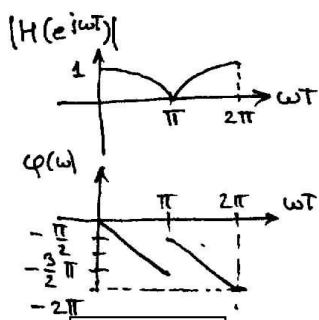
37. ábra



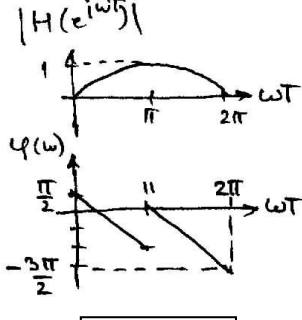
38. ábra



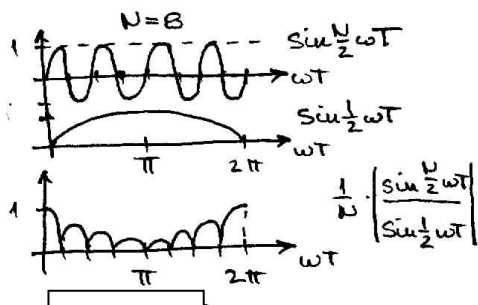
39. ábra



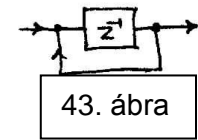
40. ábra



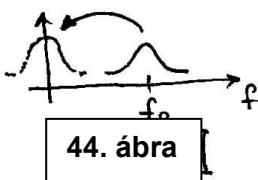
41. ábra



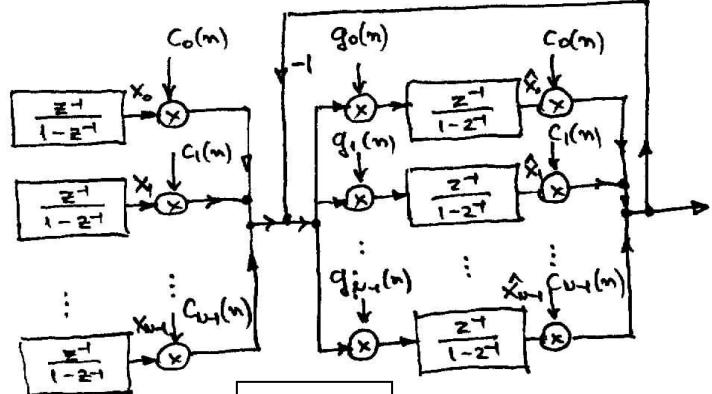
42. ábra



43. ábra



44. ábra



45. ábra