Logikai függvények osztályai

A ***függvényosztály*** a függvények egy halmaza.

A logikai fügvények egy osztálya logikai függvények valamely halmaza. Megadható felsorolással, vagy a tulajdonságainak leírásával.

F={f1, f2, f3,.. fm}

Pl. F={x1+x2, x1x2}

Függvényosztály lezártja [F]
Az F függvényosztály lezártja [F], az eredeti F, plusz a belőle tetszőleges véges számú egymásba helyettesítéssel létrehozható függvények halmaza.

Példa egymásba helyettesítésre az előbbi

$F=\{x1+x2, x1x2\}$ esetére:

Először $x1+x2$ függvénybe $x1$ helyére $x1x2$-őt, $x2$ helyébe $x3x4$-et helyettesítve kapjuk:

$(x1x2)+(x3x4)$

ez az [F] egyik eleme. Ebbe $x4$ helyébe $x2+x5$-öt helyettesítve kapjuk:

$(x1x2)+x3(x2+x5)$

Ez is [F] egy eleme stb.

Zárt függvényosztály

Egy ***függvényosztály zárt***, ha [F]=F vagyis a lezártja önmaga, tehát tetszőleges egymásba helyettesítéssel nem kapunk az F-ben nem szereplő függvényt, vagyis a lezárás nem vezet ki az eredeti halmazból.

Tétel: Zárt függvényosztály lezártja önmaga. [[F]]=[F]
Triviálisan belátható.

Tétel: Zárt függvényosztályok metszete is zárt.
Zárt függvényosztályok F, G, metsztük FG.
FG-beli f-be FG-beli g-t helyettesítve FG beli függvényt kapunk.

Bázis

F ***bázisa*** [F]-nek, ha teszőleges $f \in F$-re
[F-f] !=[F]
Vagyis F-ből bármely elemét elhagyva, a maradék lezártja nem [F].

Funkcionálisan teljes függvényrendszer

F funkcionálisan teljes függvényrendszere A-nak, ha [F]=A.
Ezt úgy is mondják, hogy F kifeszíti A-t.

Pl: F={0, /x,} funkcionálisan teljes függvényrendszere G={0, 1, /x}-nek.
Itt F egyben bázisa is G-nek.

Pl: Legyen A a Boole függvények (összes logikai függvények) halmaza. F={x1x2, x1+x2, /x}
F funkcionálisan teljes fügvényrendszere A-nak, hiszen ÉS, VAGY és INVERTÁLÁS segítségével minden logikai függvény előállítható.
F *nem* bázisa A-nak, mivel F-ből akár a VAGY, akár az ÉS függvény elhagyható, mégis előállítható az összes logikai függvény.
{x1+x2, /x} bázisa A-nak és {x1x2, /x} is az.

Funkcionálisan majdnem teljes függvényrendszer

F funkcionálisan majdnem teljes függvényrendszere az A zárt fügvényosztálynak, ha [F]!=A de tetszőleges f !∈ F-re igaz, hogy [F+f]=A.
Vagyis F nem feszíti ki A-t, de F+f igen.

A Boole függvények osztályára nézve *majdnem teljes függvényosztályok (MTFO)*

A Boole fügvények osztályát tekintve 5 majdnem teljes függvényosztály létezik:

- 0-át megtartó függvények,
- 1-et megtartó függvények,
- monoton függvények,
- önduális függvények,
- lineáris függvények

Mind az 5 MTFO zárt.
Egy logikai függvény egyszerre több MTFO-ba is tartozhat.

0-át megtartó függvények osztálya: T0

A 0-át megtartó függvények azok a függvények, melyekre f(0,0,0..0)=0. Vagyis amelyekbe minden változó helyébe 0-át behelyettesítve 0-át adnak.

A T0 zárt. Két 0-t megtartó függvényt egymásba helyettesítve f(0,0,..g(0,0,..0),..0)=0 szintén 0-át megtartó függvényt kapunk, hiszen g(0,0,..0)=0.

T0 majdnem teljes. T0 elemei
pl. x1x2, x1 EXOR x2.
Egy tetszőleges f !∈T0-ra f(0,0,0…0) =1, így az 1 konstans előállítható. 1 EXOR x= /x, így az invertálás is előállítható. Az {x1x2, /x} pedig az összes Boole függvény egyik bázisa.

Az összes logikai függvények fele a T0-hoz tarozik. (Az igazság táblában egyetlen rubrika kötelezően 0, a többi tetszőleges)
T0 elemei pl. 1, x1x2, x1+x2

1-et megtartó függvények osztálya: T1

1-et megtartó függvények azok a függvények, melyekre f(1,1,1..1)=1

Zárt és majdnem teljes a Boole függvényekre nézve.

Az összes logikai függvények fele a T1-hoz tartozik, bizonyítás, mint T0-nál.

T1 elemei pl. 1, x1x2, x1+x2

Monoton függvények osztálya: M

A monoton függvények osztályába tartoznak azok a függvények, melyekre igaz, ha a függvény tetszőleges számú változóját 0-ról 1-re változtatjuk, akkor a függvény értéke nem csökkenhet. Jelöljük α-val és β-val a változók egy kombinációját $f(\alpha)<=f(\beta)$ ha $\alpha<=\beta$ vagyis β komponensei nem kisebbek α komponenseinél.

Vagyis pl. ha $f \in M$, és $f(1,0,1,1,0)=1$, akkor $f(1,1,1,0,1)=1$, $f(1,0,1,1,1)=1$ $f(1,1,1,1,1)=1$

Egymásba helyettesítésnél a behelyettesített függvény értéke is csak nőhet ha $\alpha<=\beta$, így az egész monoton marad, vagyis zárt.

Monoton függvénnyel nem valósítható meg az invertálás.

Ha egy függvény *nem monoton*, akkor megcsinálható vele az inverter. f(x1x2..xi=0..xn)=1, és (f(x1x2..xi=1..xn)=0. Monoton függvény x1x2. {x1x2, /x} az összes Boole függvényt kifeszíti.

Ha egy függvény legegyszerűbb alakja nem tartalmaz negálást, akkor monoton.

Önduális függvényekosztálya: S

Az önduális függvények önmaguk duálisai. (Egy f függvény duálisa f*, a belőle a változók és az egész függvény negálásával kapott függvény, f*(α)=/f(/α).)

Önduális függvényre f(α)=/f(/α).
Az S függvényosztály zárt és majdnem teljes (nem bizonyítjuk).

Önduális függvény igazságtáblájának egyik fele tetszőlegesen kitölthető, de a másik fele ebből már adódik, mivel ha a változók egy kombinációjához rögzítem a függvény értékét, akkor a változókat negálva kapott kombinációhoz ennek a negáltját kell rendelni. Ebből adódóan ***az igazságtábla két fele egymás tükörképének negáltja lesz***:

ABC α	F
000 α0	**0**
001 α1	**0**
010 α2	**1**
011 α3	**0**
100 /α3	**1**
101 /α2	**0**
110 /α1	**1**
111 /α0	**1**

Az n változós önduális függvények száma:

$$2^{2^{n-1}}$$

Mivel 2^{n-1} féle kombináció tölthető ki szabadon.

Önduális függvények pl. x, /x,
x1x2+x1x3+x2x3, x1⊕x2⊕x3⊕
Nem önduális x1⊕x2!

Az önduális függvények igazságtáblájában megegyezik a 0-ák és az 1-esek száma. (De attól, hogy ez teljesül, még nem biztos, hogy egy függvény önduális. Pl. *Nem* önduális x1⊕x2, pedig a 0-ák és 1-ek száma egyező.)

Lineáris függvények osztálya: L

Ergy f függvény lineáris, ha tetszőleges x1,x2,…xi-1,xi+1,..xn és valódi (nem kiegyszerűsíthető) xi változó esetén f(x1,x2,…xi,..xn)=/f(x1,x2,…/xi,..xn).
Vagyis f tetszőleges egyetlen valódi bemeneti változóját megváltoztatva, a függvény kimenete is megváltozik, de a definíció szerint a 0 és 1 konstansok is ide tartoznak.

Lineáris függvények osztálya az $F=[1, x1 \oplus x2]$, vagyis az EXOR függvénnyel és az 1 konstanssal generálható zárt függvényosztály. Ez a két függvény egyben bázisa is L-nek.
A lineáris függvények tehát az EXOR kapcsolattal és 1 konstanssal generálhatók. Ezek közé tartozik az EKVIVALENCIA függvény is, mely az EXOR negáltja.
Lineáris függvények pl. 0, 1, x, /x, $x1 \oplus x2$, x1 EKV x2

Az EXOR függvény akkor ad 1-et, ha páratlan számú 1-es van a bemenetén.
Az EKV. függvény akkor ad 1-et, ha páros számú 1-es van a bemenetén.

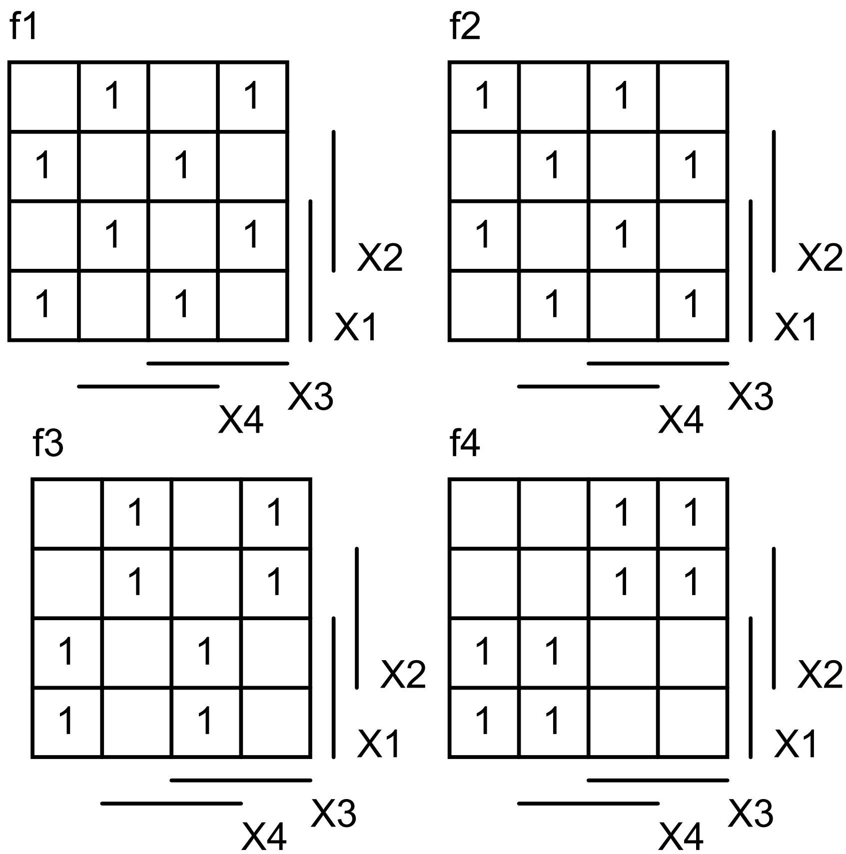
A lineáris függvényeknek a Karnaugh táblája sakktábla szerű elrendezést mutat:

$$f1 = x1 \oplus x2 \oplus x3 \oplus x4$$

$$f2 = x1\,EKV\;x2\,EKV\;x3\,EKV\;x4$$

$$f3 = x1 \oplus x3 \oplus x4$$

$$f4 = x1 \oplus x3$$



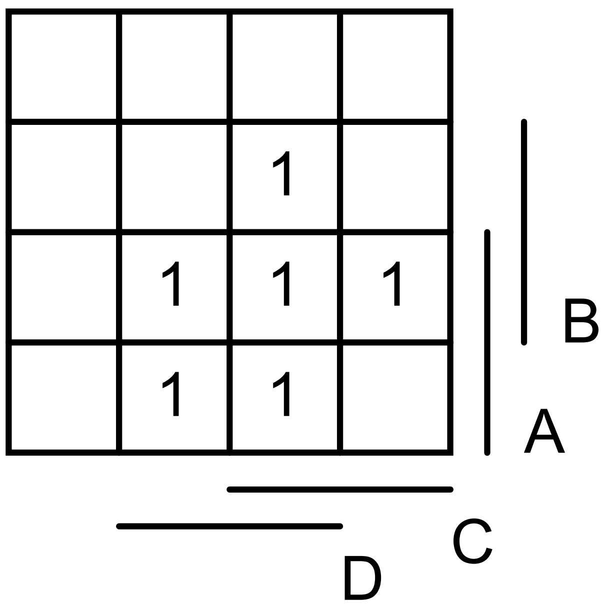
A legegyszerűbb, felesleges változókat nem tartalmazó alak mindig sakktábla jellegű (pl. f1, f2).

A lineáris függvények igazságtáblájában - a konstans függvényeket kivéve - a 0-ák és 1-ek száma azonos.

Példák:

Mely függvényosztályok részei az alábbi függvények?

f1



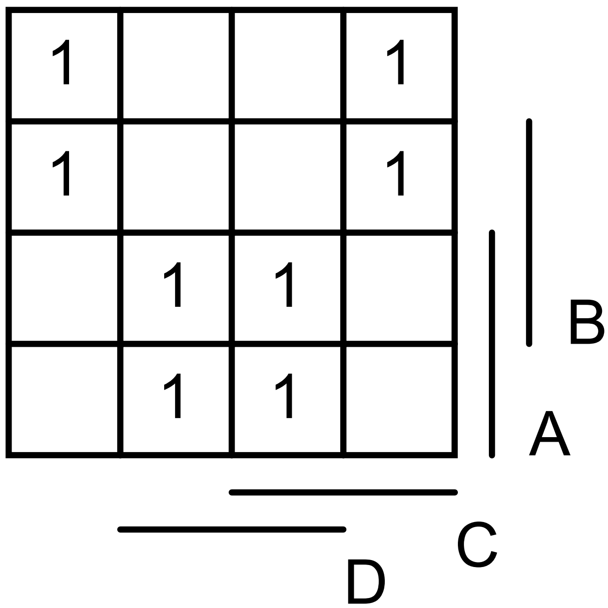
0-át megtartó, mert f(0,0,0,0)=0, T0

1-et megtartó mert f(1,1,1,1)=1   T1

f legegyszerűbb alakja: f=AD+ABC+BCD

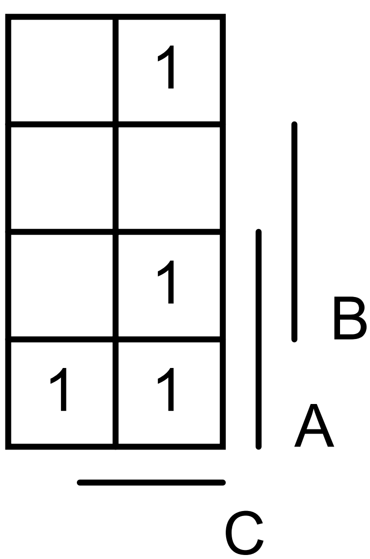
nem tartalmaz invertálást, így f monoton:f nem önduális és nem lineáris, mivel az 1-esek és 0-ák száma különbözik, s ez mindkettőre kizáró ok.

f2



(T1, L)

f3



(T0, T1, S)

f4=C./D + A./D + /B./D + /A./B.C (S)