Exact inference
in polytree Bayesian networks

Outline

- Scenarios using (elementary) probabilistic inference
- Reminder: logical vs probabilistic inference
- Hardness of exact probabilistic inference
- Methods for probabilistic inference
  - Exact, stochastic, mixed
- Exact inference in polytrees

Inference tasks

Simple queries: compute posterior marginal $\mathbf{P}(X_i|\mathbf{E}=\mathbf{e})$
e.g., $P(NoGas|Gauge=empty, Lights=on, Starts=false)$

Conjunctive queries: $\mathbf{P}(X_i, X_j|\mathbf{E}=\mathbf{e}) = \mathbf{P}(X_i|\mathbf{E}=\mathbf{e})\mathbf{P}(X_j|X_i, \mathbf{E}=\mathbf{e})$

Optimal decisions: decision networks include utility information;
probabilistic inference required for $P(outcome|action, evidence)$

Value of information: which evidence to seek next?

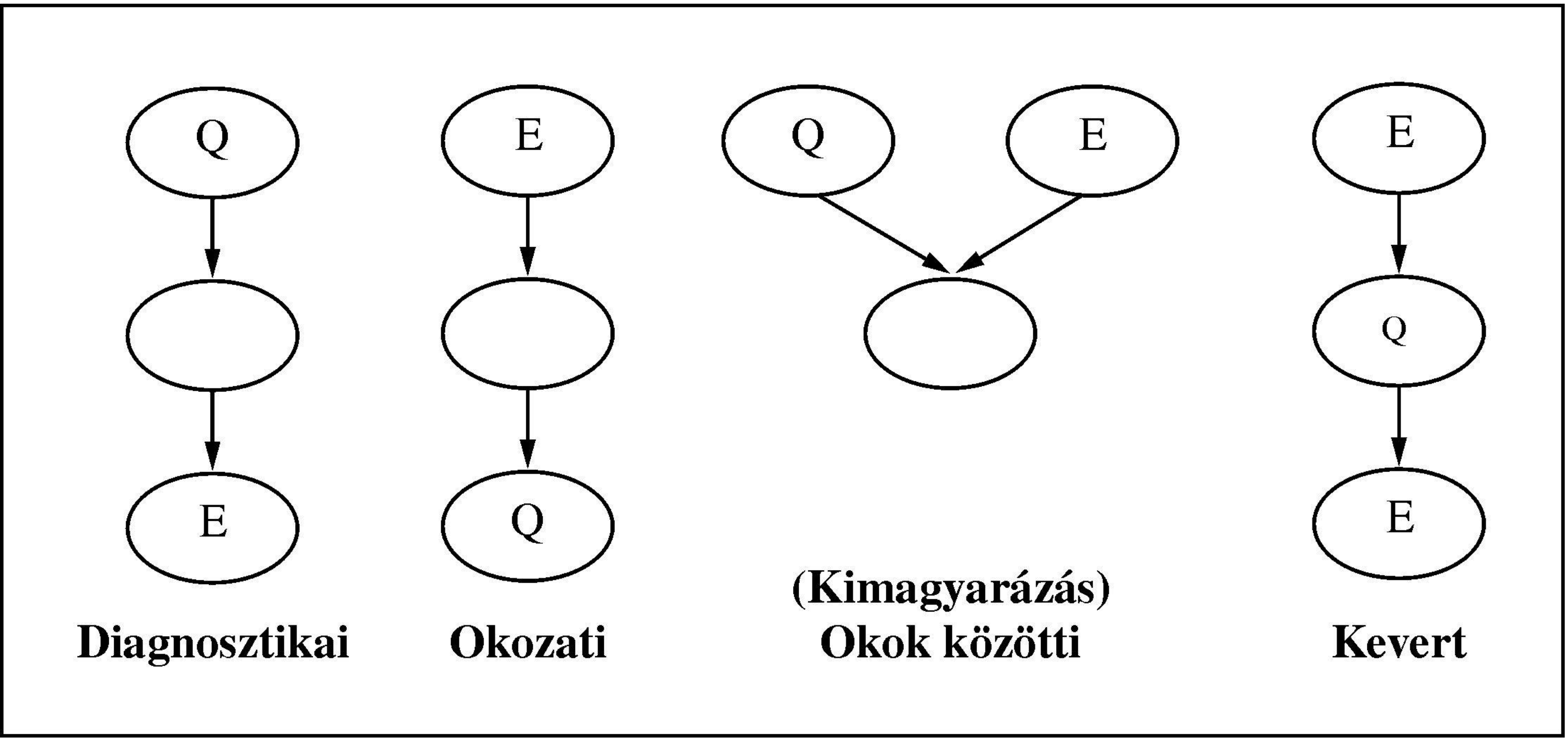
Sensitivity analysis: which probability values are most critical?

Explanation: why do I need a new starter motor?

Causal inference: what is the effect of an intervention?

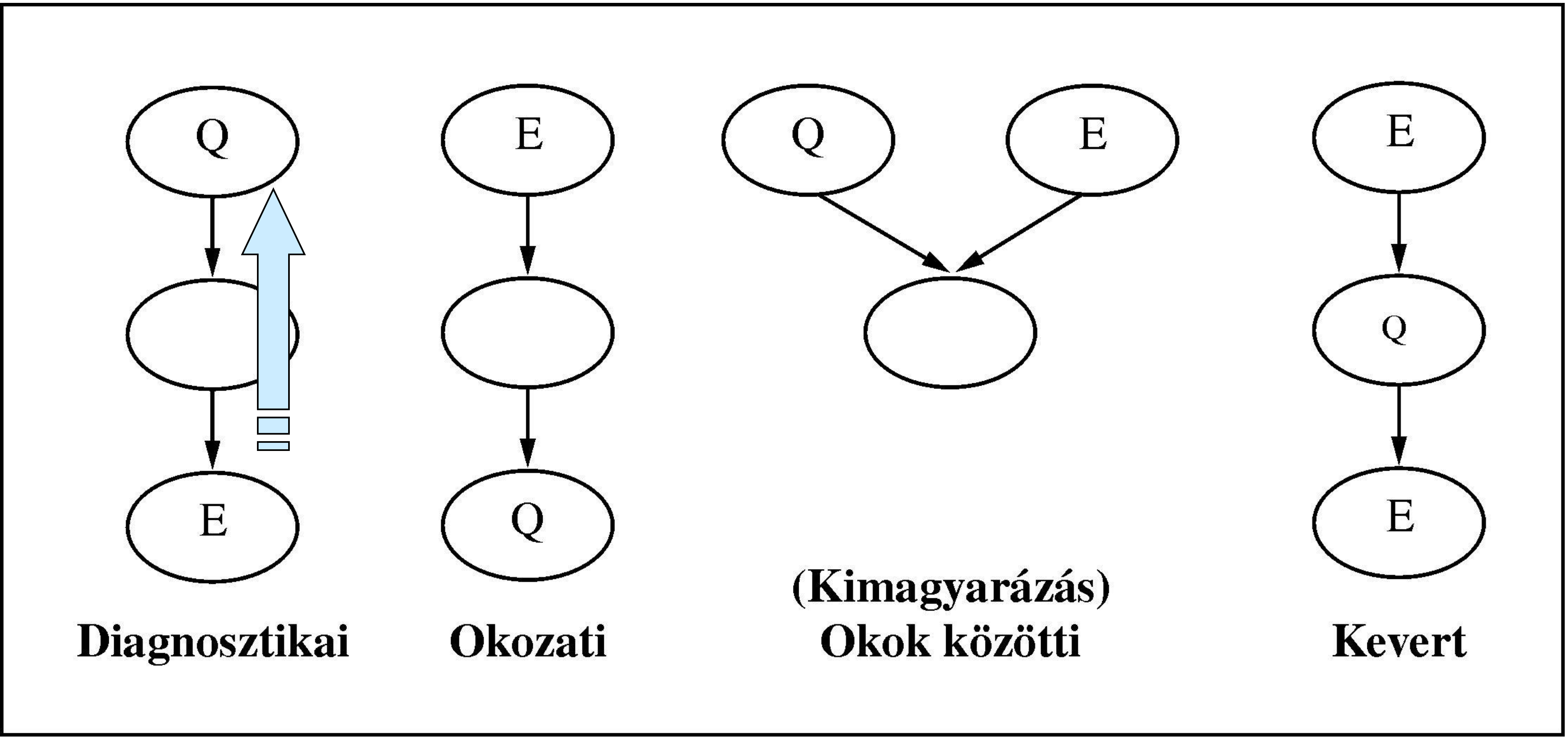
Counterfactual inference: what would have been the effect of a hypothetical/imagery past intervention&observation?

Következtetés valószínűségi hálókban

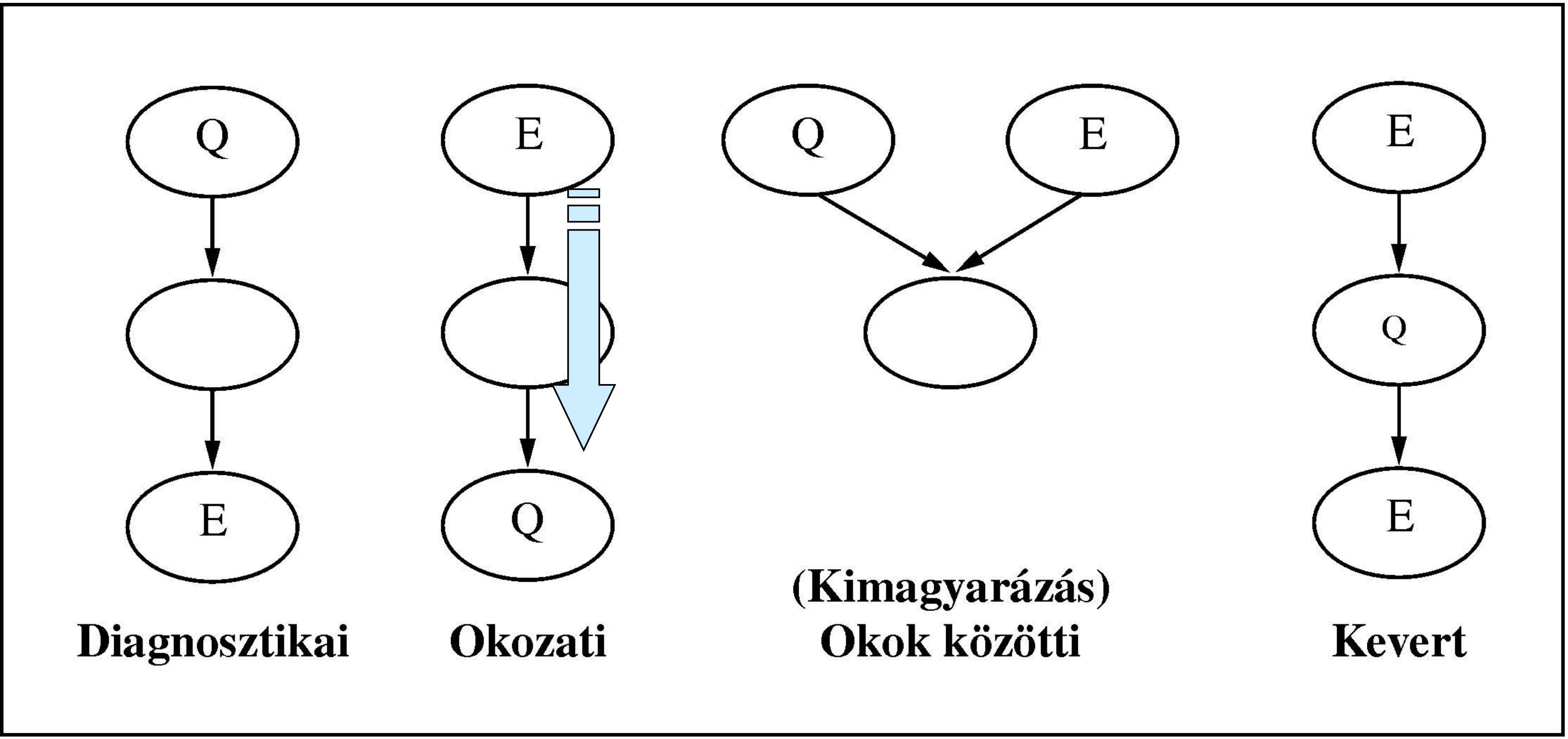


\+ Érzékenységi vizsgálat

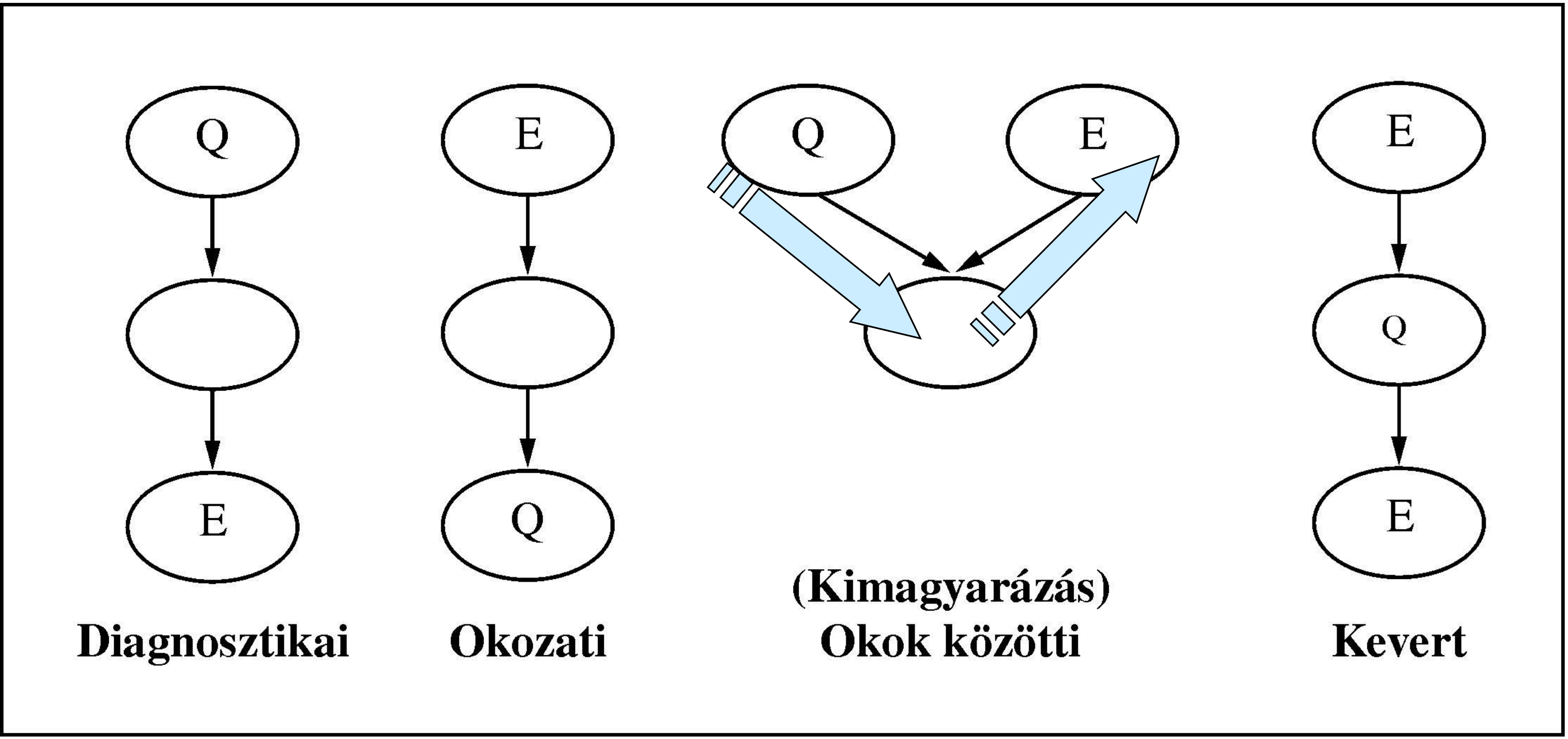
Következtetés valószínűségi hálókban



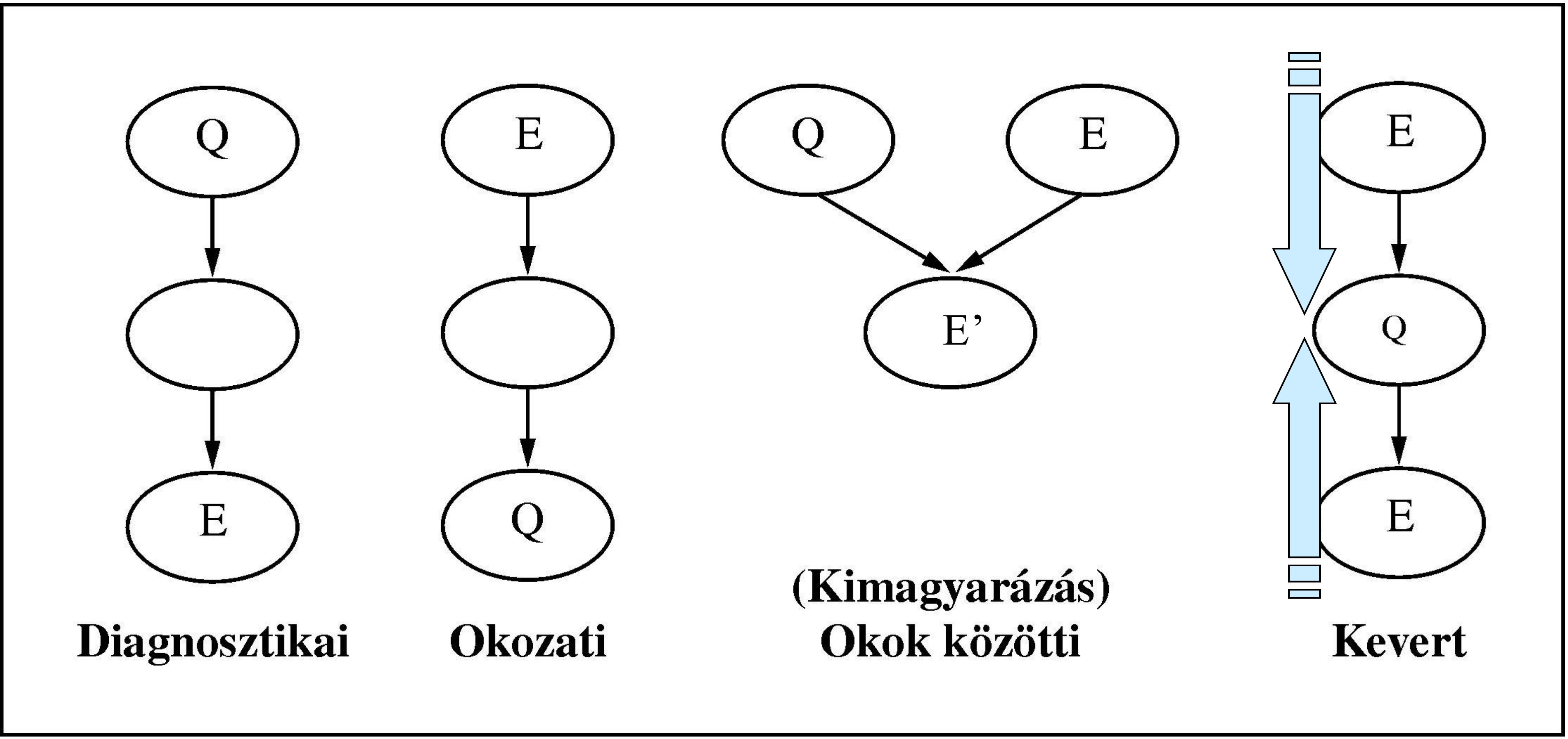
Következtetés valószínűségi hálókban



Következtetés valószínűségi hálókban



Következtetés valószínűségi hálókban



Logic in general

Logics are formal languages for representing information such that conclusions can be drawn

- Syntax defines the sentences in the language
- Semantics define the "meaning" of sentences;

Propositional logic: syntax

- Propositional logic is the simplest logic
- The proposition symbols P_1, P_2 etc are sentences

If S is a sentence, $\neg S$ is a sentence (negation)

- If S_1 and S_2 are sentences, $S_1 \wedge S_2$ is a sentence (conjunction)
- If S_1 and S_2 are sentences, $S_1 \vee S_2$ is a sentence (disjunction)
- If S_1 and S_2 are sentences, $S_1 \Rightarrow S_2$ is a sentence (implication)
- If S_1 and S_2 are sentences, $S_1 \Leftrightarrow S_2$ is a sentence (biconditional)

Propositional logic: semantics

Assuming that true/false values are specified for each proposition symbol

E.g.	$P_{1,2}$	$P_{2,2}$	$P_{3,1}$
	false	true	false

Rules (truth tables) for evaluating meaning (truth):

$\neg S$	is true iff	S is false	
$S_1 \wedge S_2$	is true iff	S_1 is true and	S_2 is true
$S_1 \vee S_2$	is true iff	S_1 is true or	S_2 is true
$S_1 \Rightarrow S_2$	is true iff	S_1 is false or	S_2 is true
i.e.,	is false iff	S_1 is true and	S_2 is false
$S_1 \Leftrightarrow S_2$	is true iff	$S_1 \Rightarrow S_2$ is true and	$S_2 \Rightarrow S_1$ is true

On proof: syntactic inference

$KB \vdash_i \alpha$ = sentence α can be derived from KB by procedure i

- *(Syntactic) Inference methods*
  - Application of inference rules
  - Legitimate (sound) generation of new sentences from old
    - Proof = a sequence of inference rule applications
      Can use inference rules as operators in a standard search algorithm
    - E.g. Modus Ponens, Modus Tollens, resolution
      - Typically require transformation of sentences into a normal form, e.g. into Conjunctive Normal Form (CNF)

On truth: entailment

- Entailment means that one thing follows from another:
- KB $\models \alpha$

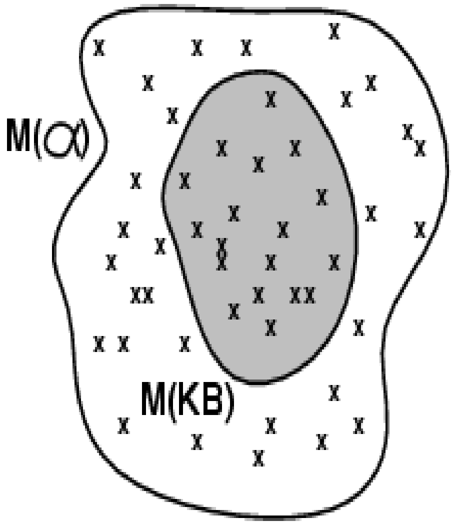
- Knowledge base *KB* entails sentence α if and only if α is true in all worlds where *KB* is true.

Models

Logicians typically think in terms of models, which are formally structured worlds with respect to which truth can be evaluated
We say *m* is a model of a sentence α if α is true in *m*

M(α) is the set of all models of α

Then KB $\models$ α iff *M(KB)* $\subseteq$ *M*(α)



Inference methods in logic

KB $\vdash_i \alpha$ = sentence α can be derived from *KB* by procedure *i*

- *Inference methods divide into (roughly) two kinds:*
  - Application of inference rules
  - Legitimate (sound) generation of new sentences from old
    - Proof = a sequence of inference rule applications
      Can use inference rules as operators in a standard search algorithm
    - E.g. Modus Ponens, Modus Tollens, resolution
      - Typically require transformation of sentences into a normal form, e.g. into Conjunctive Normal Form (CNF)

  - Model checking
  - truth table enumeration (always exponential in *n*)
  - improved backtracking, e.g., Davis--Putnam-Logemann-Loveland
    - heuristic search in model space (sound but incomplete)
      e.g., min-conflicts-like hill-climbing algorithms

On truth and proof: $\models$?? $\vdash$

Soundness: *i* is sound if whenever $KB \vdash_i \alpha$, it is also true that $KB \models \alpha$

- Completeness: *i* is complete if whenever $KB \models \alpha$, it is also true that $KB \vdash_i \alpha$

Inference in probabilistic logic

- Marginalization
  - "summing/integrating out"
  - "averaging out"

Start with the joint probability distribution:

- For any proposition ϕ, sum the atomic events where it is true: $P(\phi) = \Sigma_{\omega:\omega \models \phi} P(\omega)$

Classical vs probabilistic logic: truth and beliefs

P_1	…	P_3	KB	α	pKB	P(α=true|KB)
F	F	F	F	T	.01	.1
F	F	T	T	F	.12	.2
F	T	F	F	T	.35	.3
F	T	T	F	F	..	..
T	F	F	F	T	..	..
T	F	T	T	T	…	…
T	T	F	F	T	..	..
T	T	T	F	T	..	..

Inference by enumeration

Let $\mathbf{X}$ be all the variables. Typically, we want the posterior joint distribution of the query variables $\mathbf{Y}$ given specific values $\mathbf{e}$ for the evidence variables $\mathbf{E}$.

Let the hidden variables be $\mathbf{H} = \mathbf{X} - \mathbf{Y} - \mathbf{E}$.

Then the required summation of joint entries is done by summing out the hidden variables:

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y}|\mathbf{E}=\mathbf{e}) = \alpha\mathbf{P}(\mathbf{Y},\mathbf{E}=\mathbf{e}) = \alpha\Sigma_{\mathbf{h}}\mathbf{P}(\mathbf{Y},\mathbf{E}=\mathbf{e},\mathbf{H}=\mathbf{h})$$

The terms in the summation are joint entries!

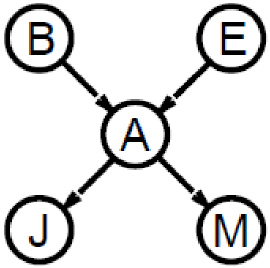
Obvious problems:

1) Worst-case time complexity $O(d^n)$ where d is the largest arity
2) Space complexity $O(d^n)$ to store the joint distribution
3) How to find the numbers for $O(d^n)$ entries???

Inference by enumeration: goal oriented

Slightly intelligent way to sum out variables from the joint without actually constructing its explicit representation

Simple query on the burglary network:



$\mathbf{P}(B|j,m)$
$= \mathbf{P}(B,j,m)/P(j,m)$
$= \alpha\mathbf{P}(B,j,m)$
$= \alpha \sum_e \sum_a \mathbf{P}(B,e,a,j,m)$

Rewrite full joint entries using product of CPT entries:

$\mathbf{P}(B|j,m)$
$= \alpha \sum_e \sum_a \mathbf{P}(B)P(e)\mathbf{P}(a|B,e)P(j|a)P(m|a)$
$= \alpha\mathbf{P}(B) \sum_e P(e) \sum_a \mathbf{P}(a|B,e)P(j|a)P(m|a)$

Recursive depth-first enumeration: $O(n)$ space, $O(d^n)$ time

Complexity of exact inference

Singly connected networks (or polytrees):

– any two nodes are connected by at most one (undirected) path

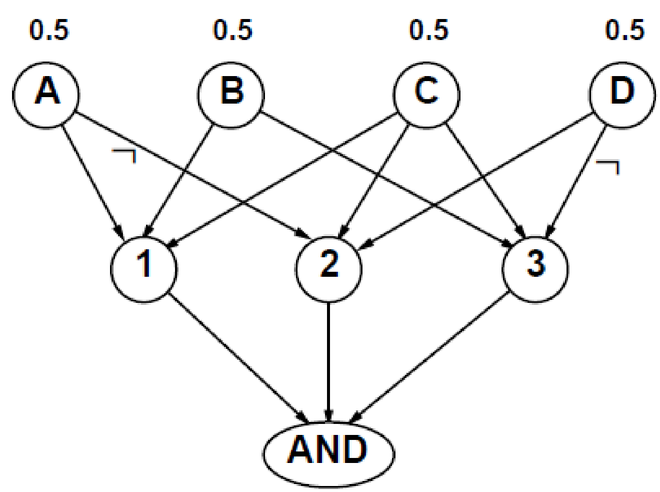
– time and space cost of exact inference $O(d^k n)$

Multiply connected networks:

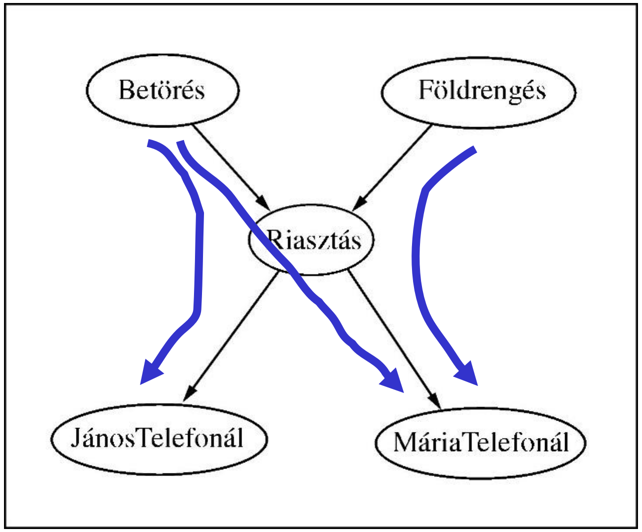
– can reduce 3SAT to exact inference: 0<p(AND)? $\Rightarrow$ NP-hard

– equivalent to **counting** 3SAT models $\Rightarrow$ #P-complete

1. A v B v C
2. C v D v ¬A
3. B v C v ¬D



Egy algoritmus lekérdezések megválaszolására

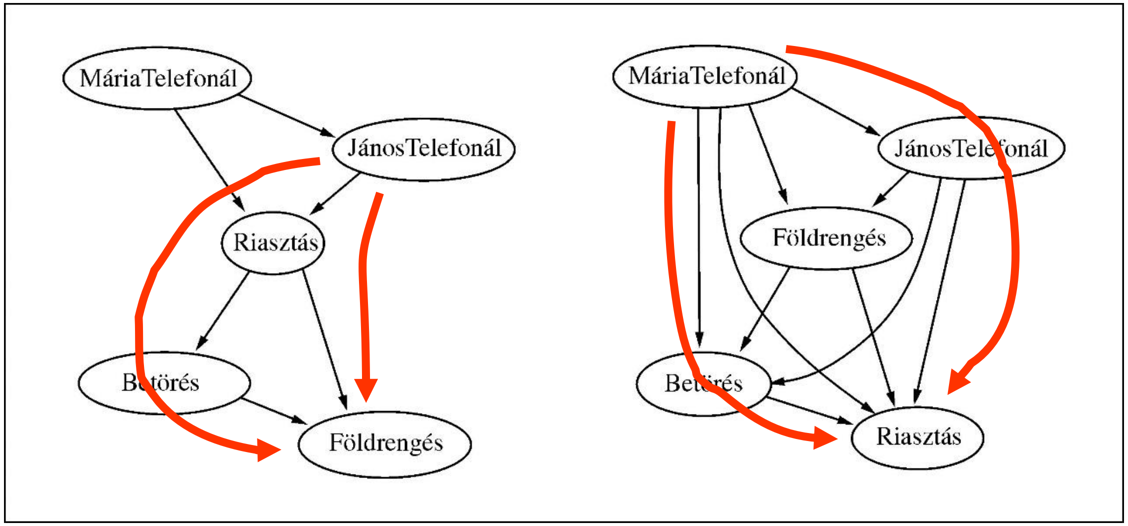


egyszeresen összekötött,

bármely két csp. között legfeljebb egyetlen egy irányítatlan út

többszörösen összekötött

bármely két csp. között több út



Feltételes függetlenségi relációk valószínűségi hálókban

Feltételes függetlenség változók között:

kevesebb feltétel, egyszerűbb kifejezés

Feltételes függetlenség háló részek között

következtetésnél

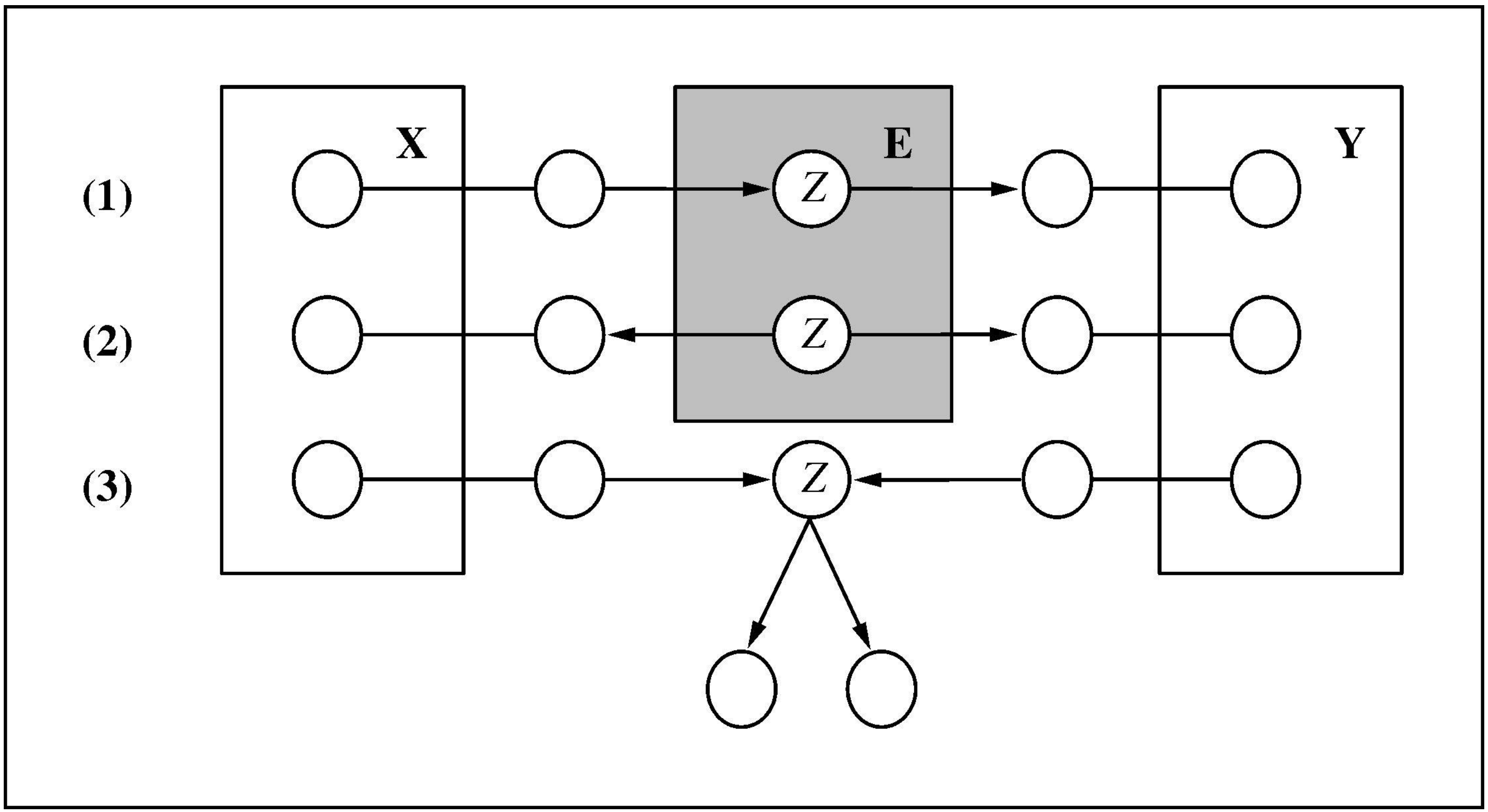
kevesebb keresés

kevesebb érték

egyszerűbb kifejezések

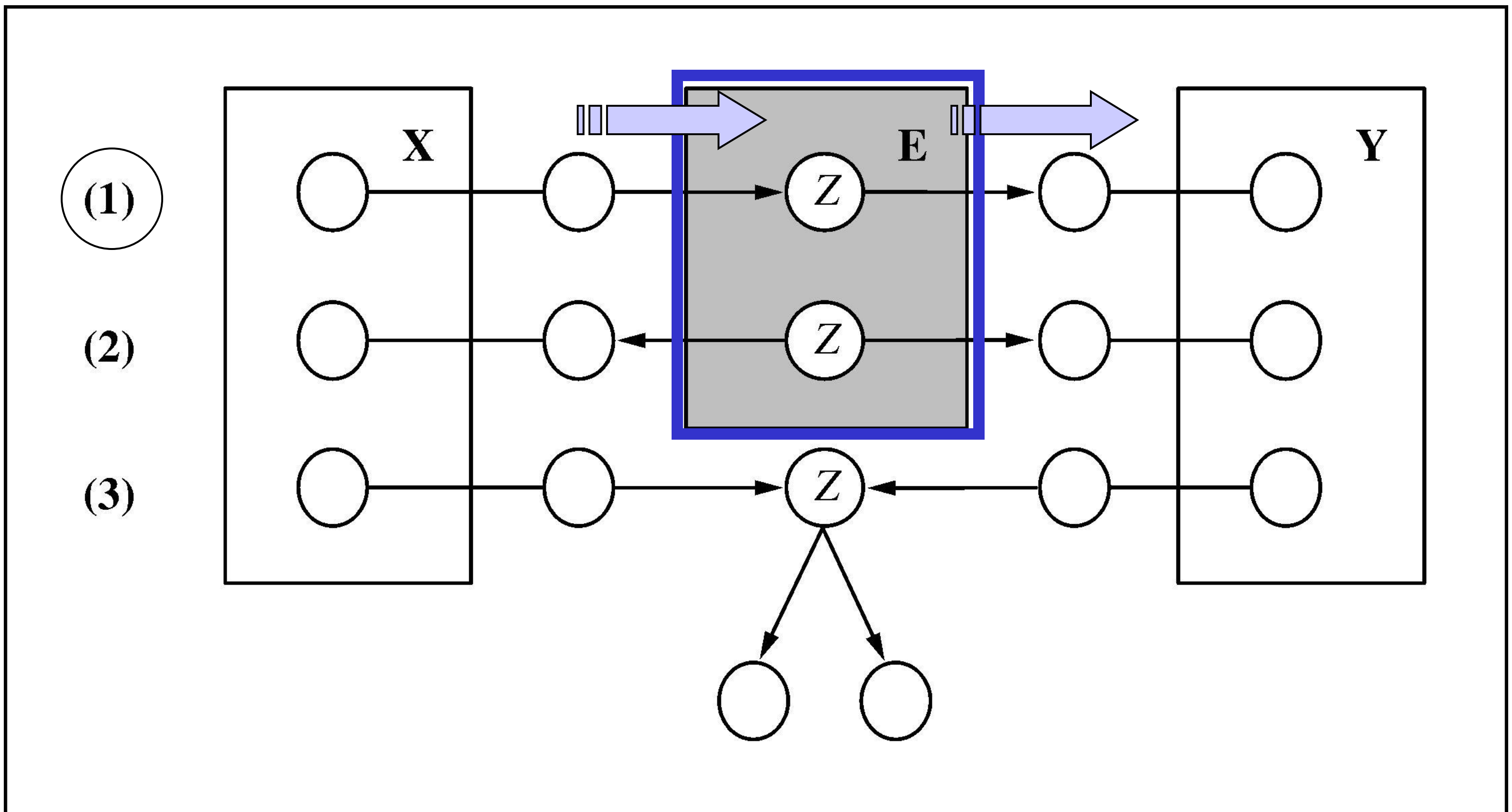
Irány-függő-elválasztás vagy **d-elválasztás**

Minden egy X-beli csomóponttól egy Y-beli csomópontba vezető irányítatlan út E által d-elválasztott, akkor **X és Y feltételesen független feltéve E-**t.



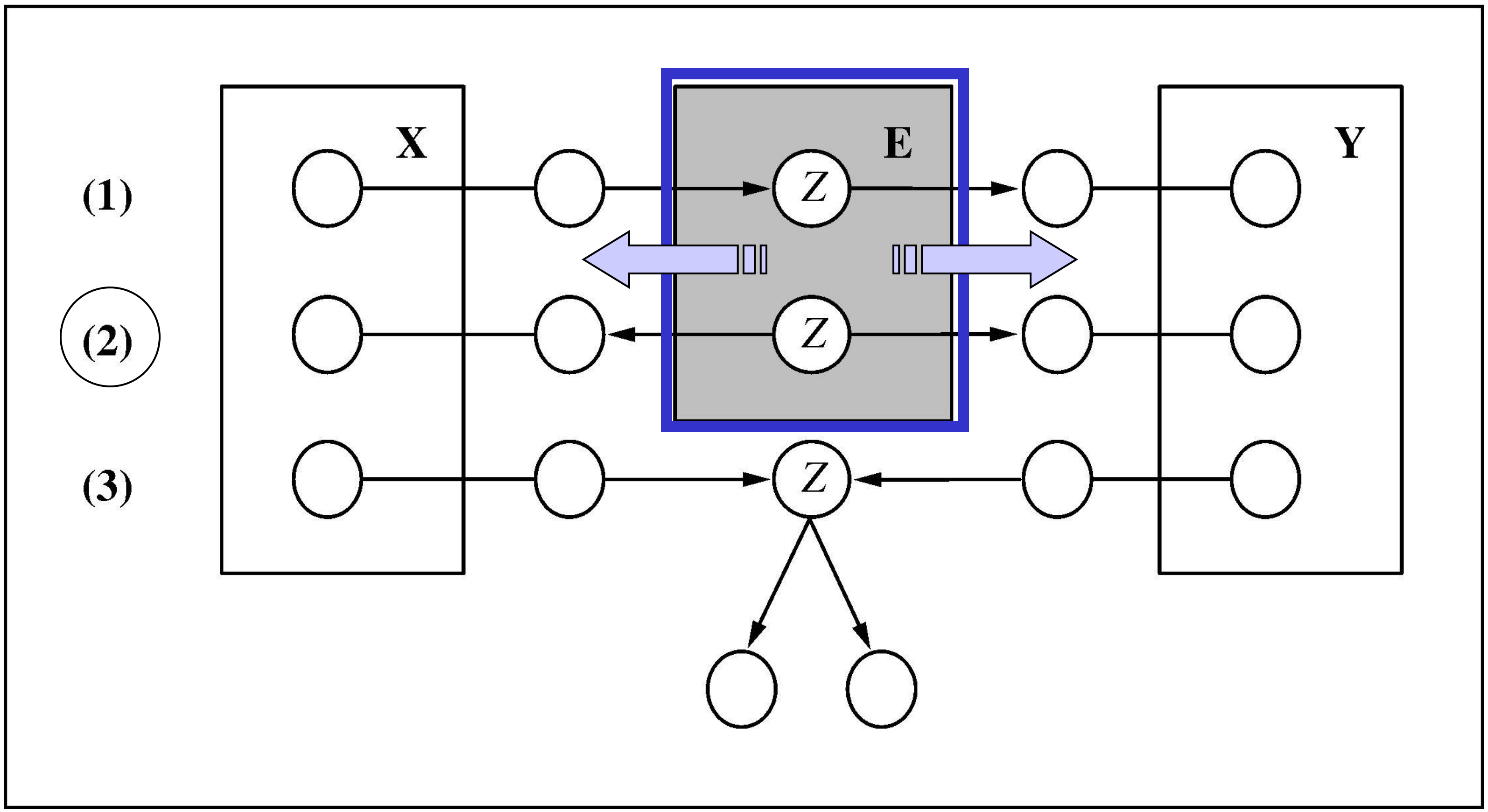
Irány-függő-elválasztás vagy **d-elválasztás**

Ha minden egy X-beli csomóponttól egy Y-beli csomópontba vezető irányítatlan út E által d-elválasztott, akkor X és Y feltételesen független feltéve E-t.



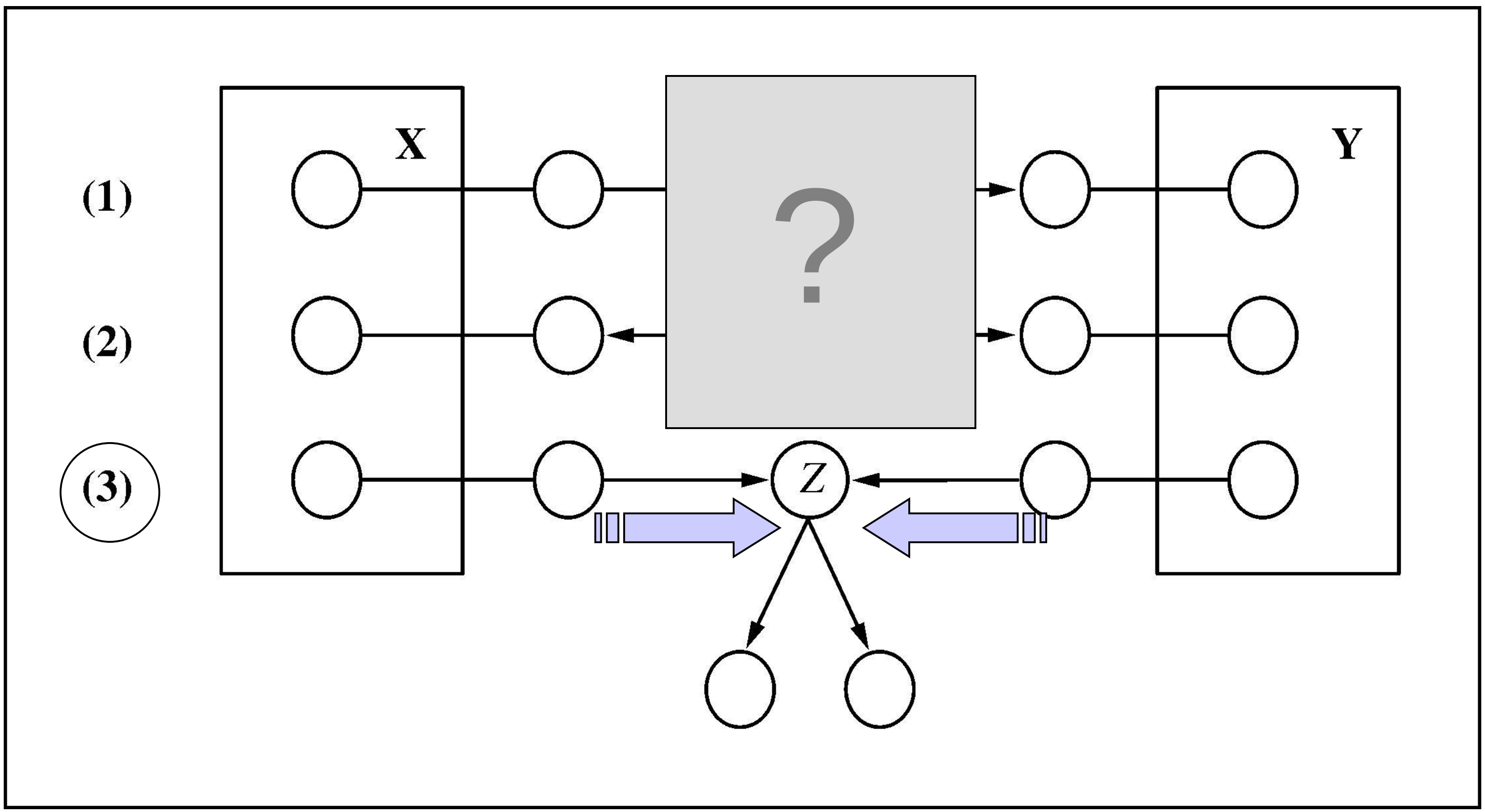
Irány-függő-elválasztás vagy **d-elválasztás**

Ha minden egy X-beli csomóponttól egy Y-beli csomópontba vezető irányítatlan út E által d-elválasztott, akkor X és Y feltételesen független feltéve E-t.

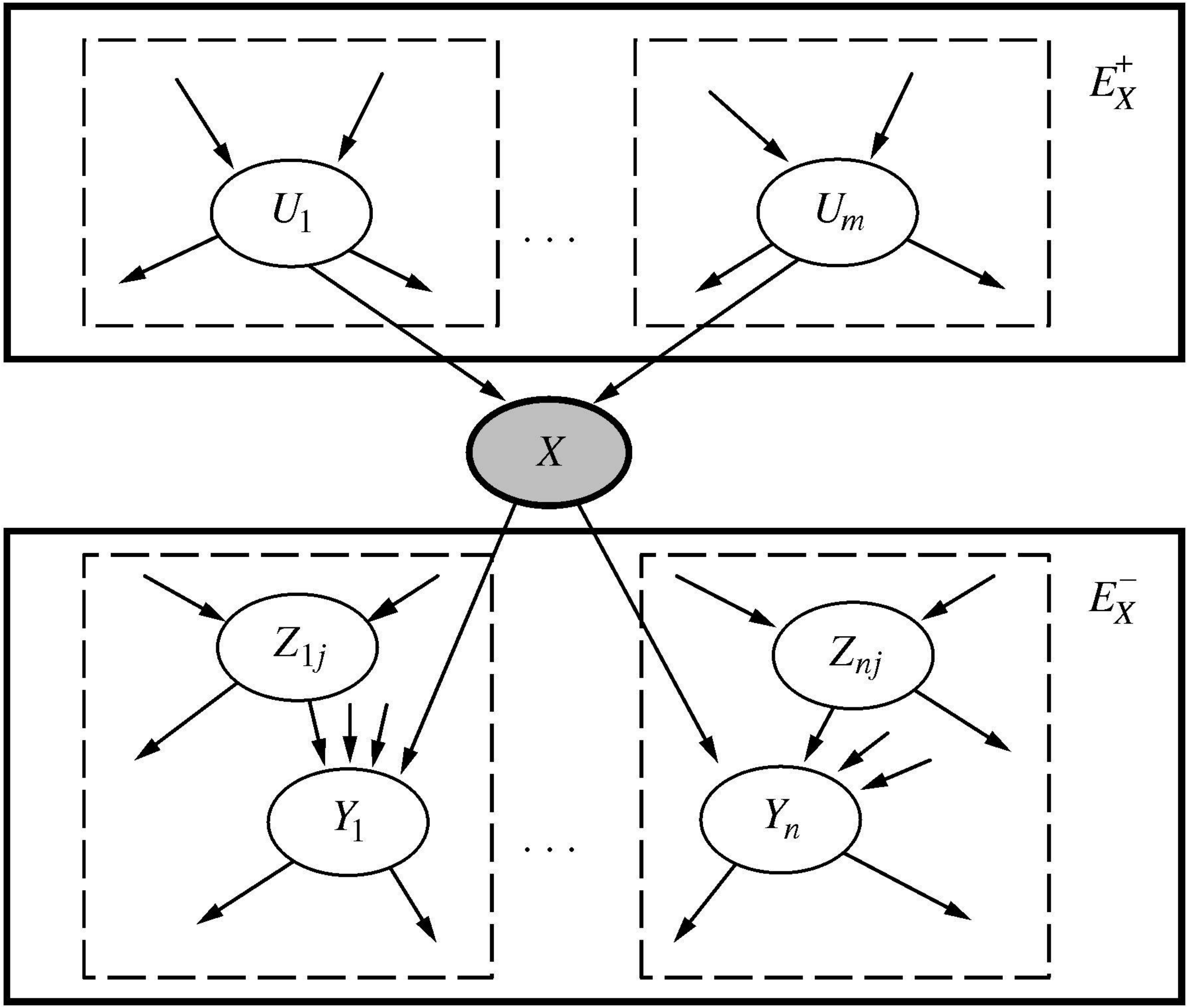


Irány-függő-elválasztás vagy **d-elválasztás**

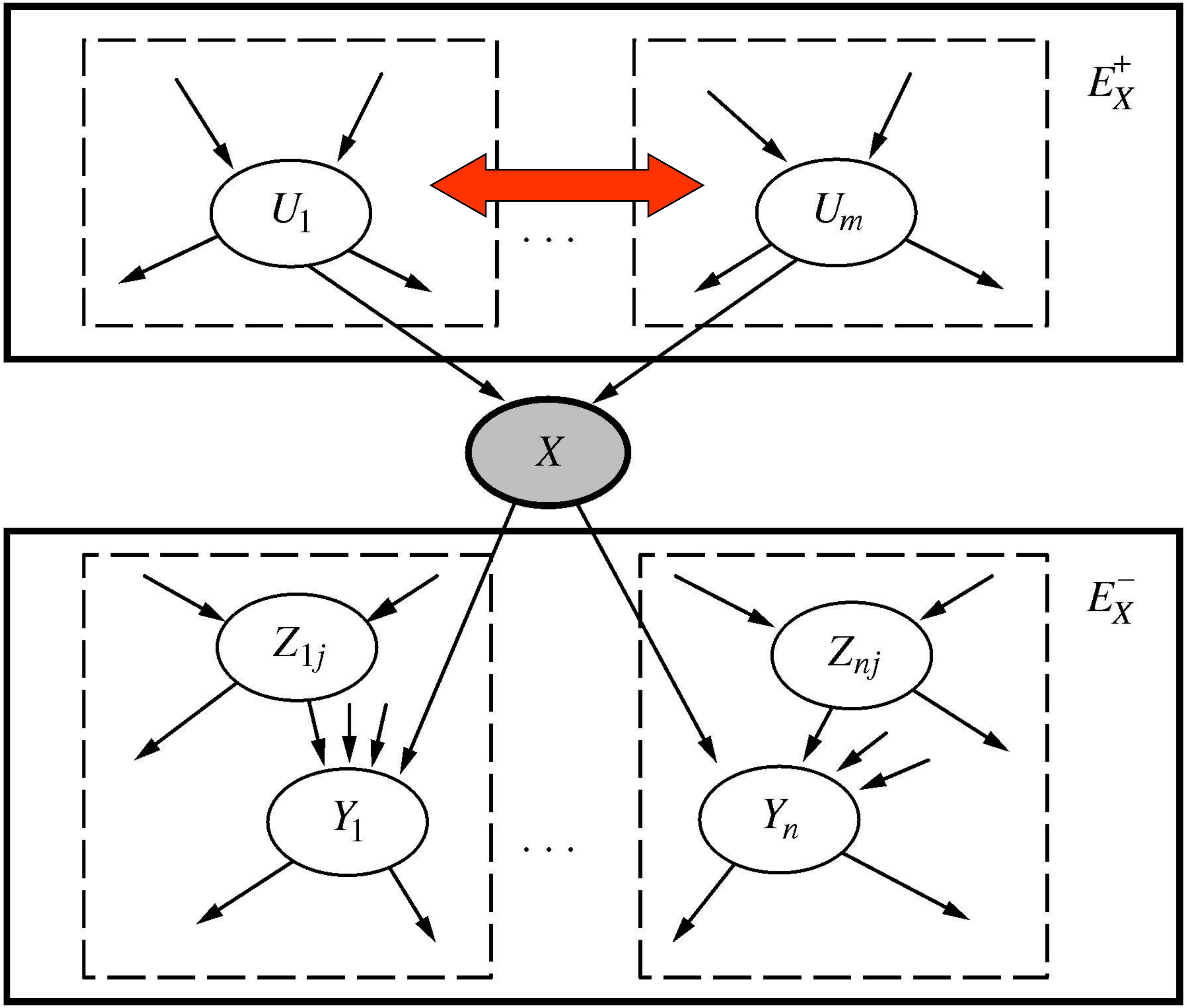
Ha minden egy X-beli csomóponttól egy Y-beli csomópontba vezető irányítatlan út E által d-elválasztott, akkor X és Y feltételesen független feltéve E-t.



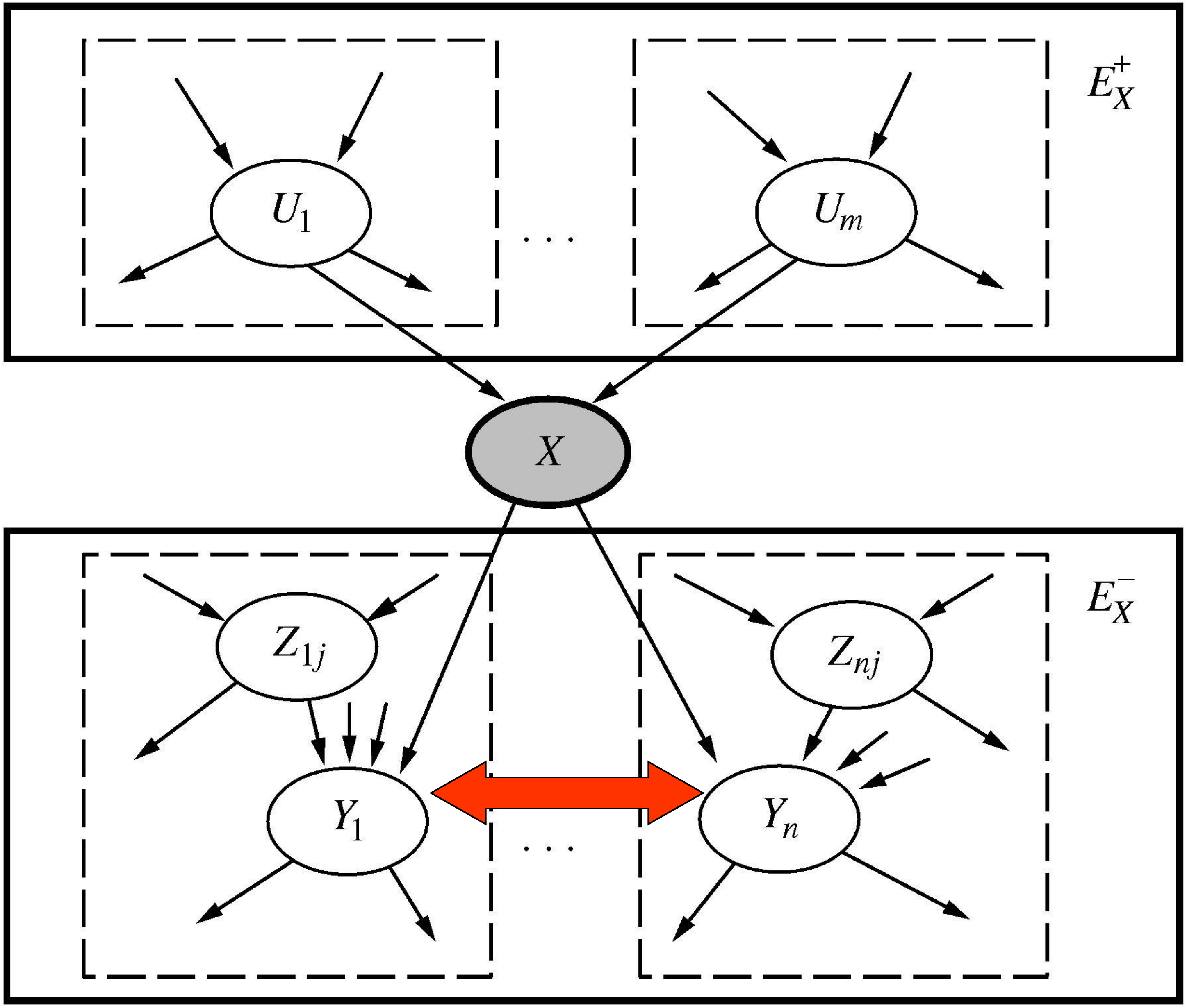
Általános helyzet – egyszeresen összekötött



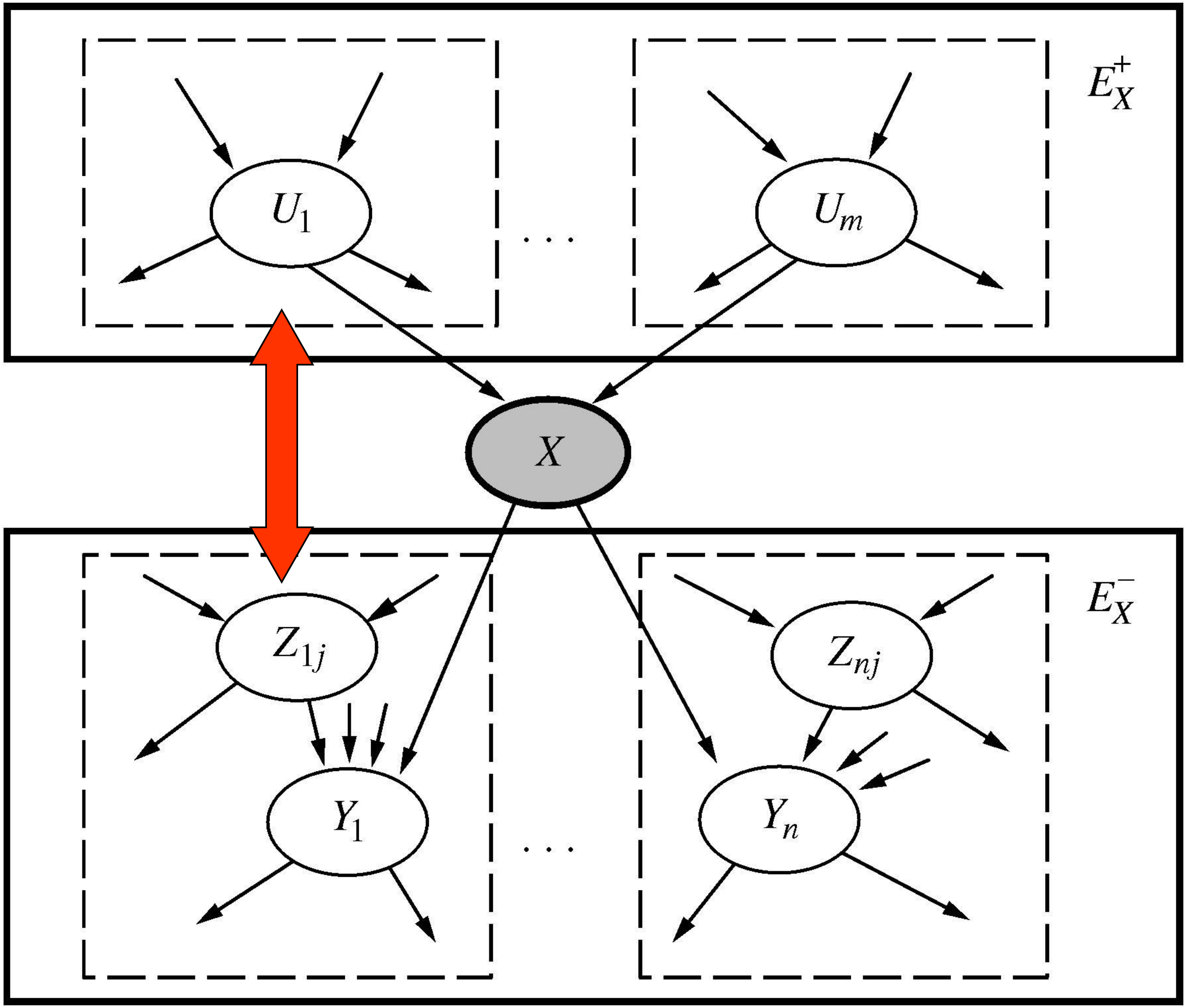
Függetlenek



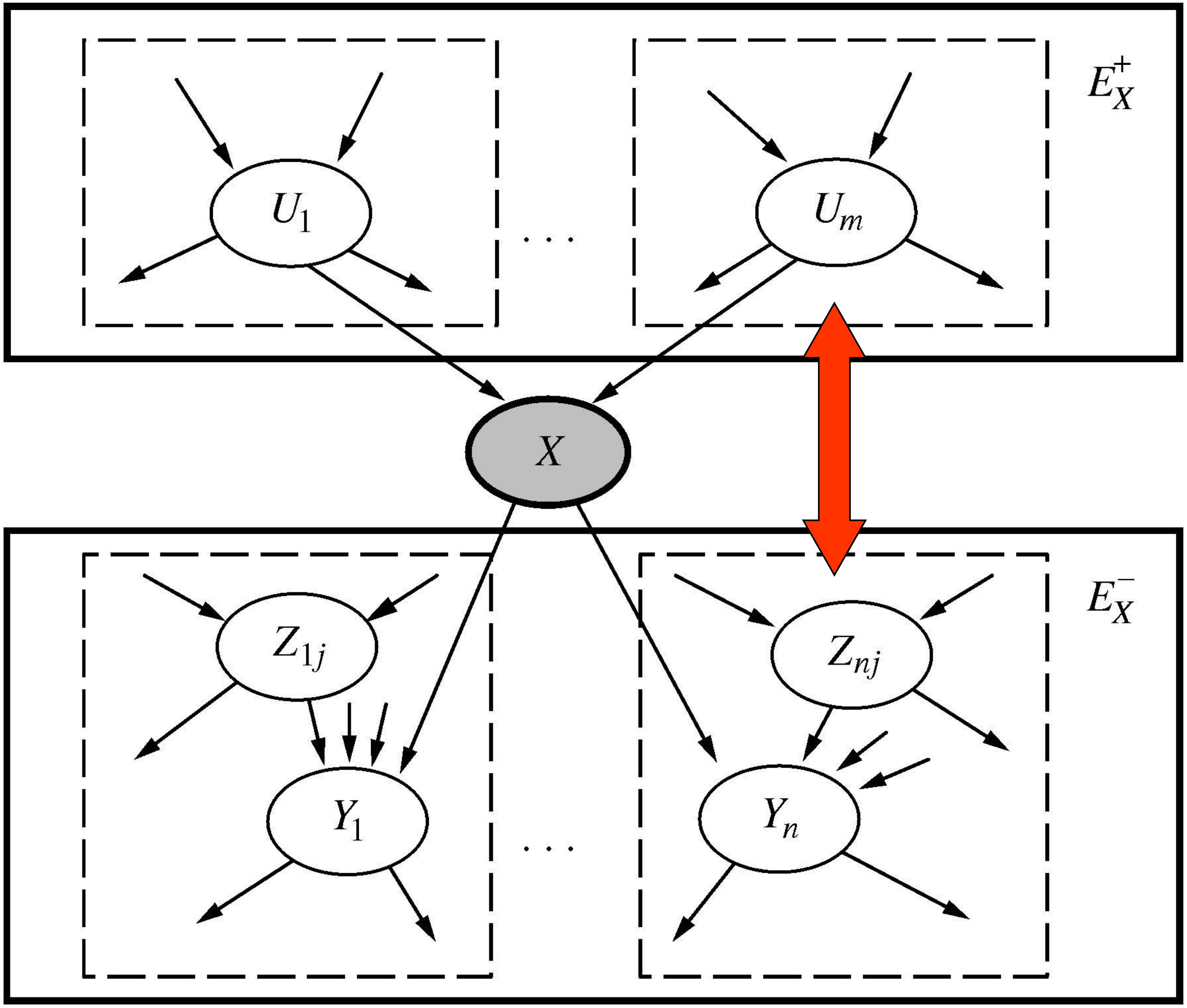
Feltételesen függetlenek



Feltételesen függetlenek



Feltételesen függetlenek



Egy algoritmus lekérdezések megválaszolására

egyszeresen összekötött:

a dobozok különállóak és nincsen közöttük többszörös összeköttetés

feltételesen függetlenek!

X a lekérdezéses változó

E a tény változók halmaza

a cél a $\mathbf{P}(X \mid E)$ kiszámítása

Emlékeztető: következtetés Rejtett Markov Modellekben

Egy algoritmus lekérdezések megválaszolására

E_X^+ az *X* **okozati halmaza** – az *X* „feletti” tényváltozók, az *X*-hez az *X* szülein keresztül kapcsolódnak.

E_X^- az *X* **tényhalmaza** – az *X* „alatti” tényváltozók, az *X*-hez az *X* gyermekein keresztül kapcsolódnak.

$$\boxed{\mathbf{P}(X|E) = \mathbf{P}(X|E_X^-, E_X^+).}$$

$E_{U_i \setminus X}$ az U_i-hoz kapcsolódó összes tényhalmaz, *kivéve* az *X*-en keresztül csatlakozók.

$E^+_{Y_i \setminus X}$ a tények azon halmaza, amik Y_i-hez Y_i szülein keresztül kapcsolódnak, kivéve az *X*-en keresztül csatlakozókat

P(*X* | *E*) kiszámítása – általános stratégia:

Fejezzük ki **P**(*X* | *E*)-t felbontva az E_X^+ és E_X^- hozzájárulásának megfelelően.

Számítsuk ki E_X^+ hozzájárulását két lépésben.

Először E_X^+ hatása *X* szüleire, majd ennek hatása *X*-re.

Az *X* szüleire gyakorolt hatás: ugyanaz a probléma rekurzíve, mint az *X*-re gyakorolt hatás.

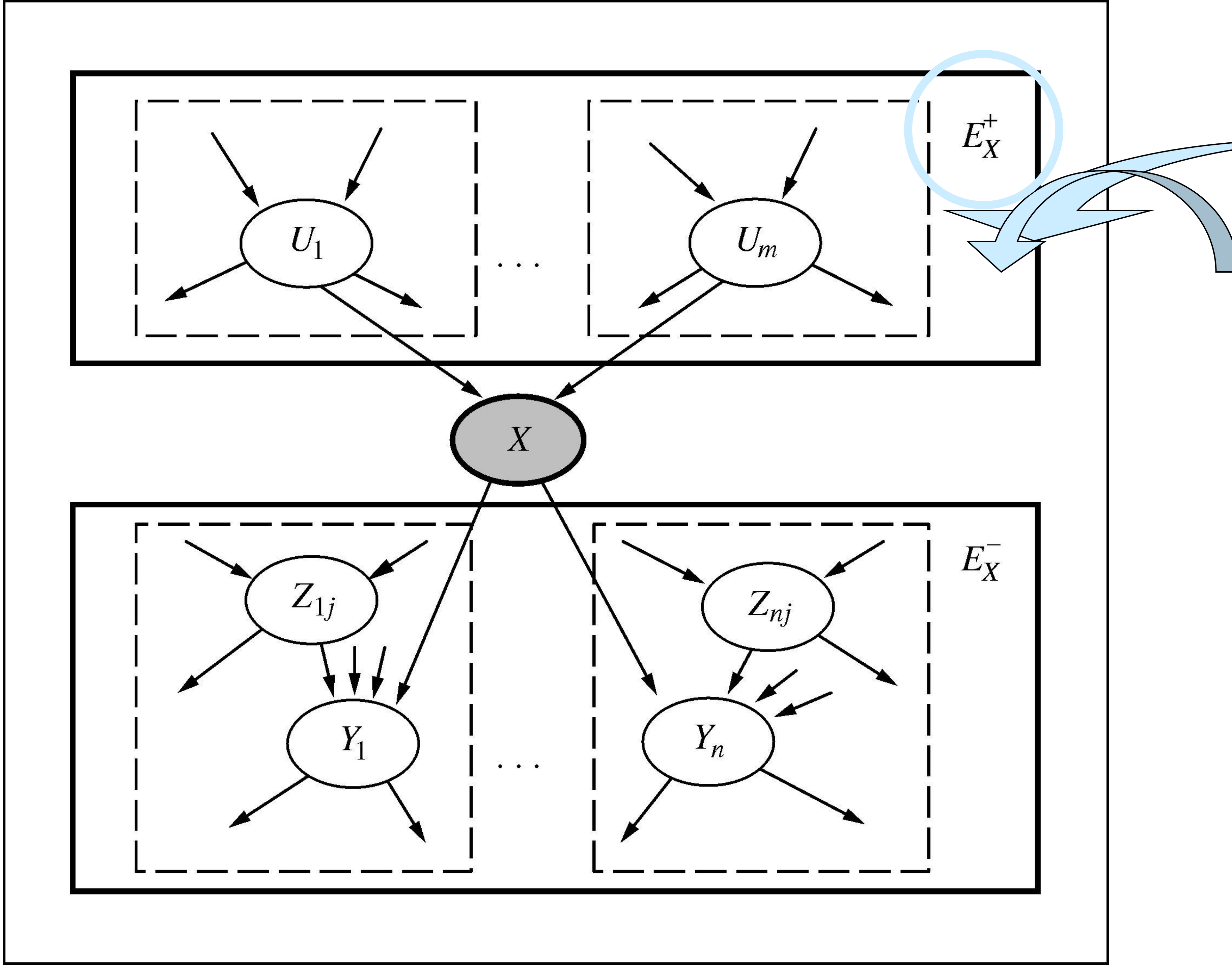
$\mathbf{P}(X \mid E)$ kiszámítása – általános stratégia:

Fejezzük ki $\mathbf{P}(X \mid E)$-t felbontva az E_X^+ és E_X^- hozzájárulásának megfelelően.

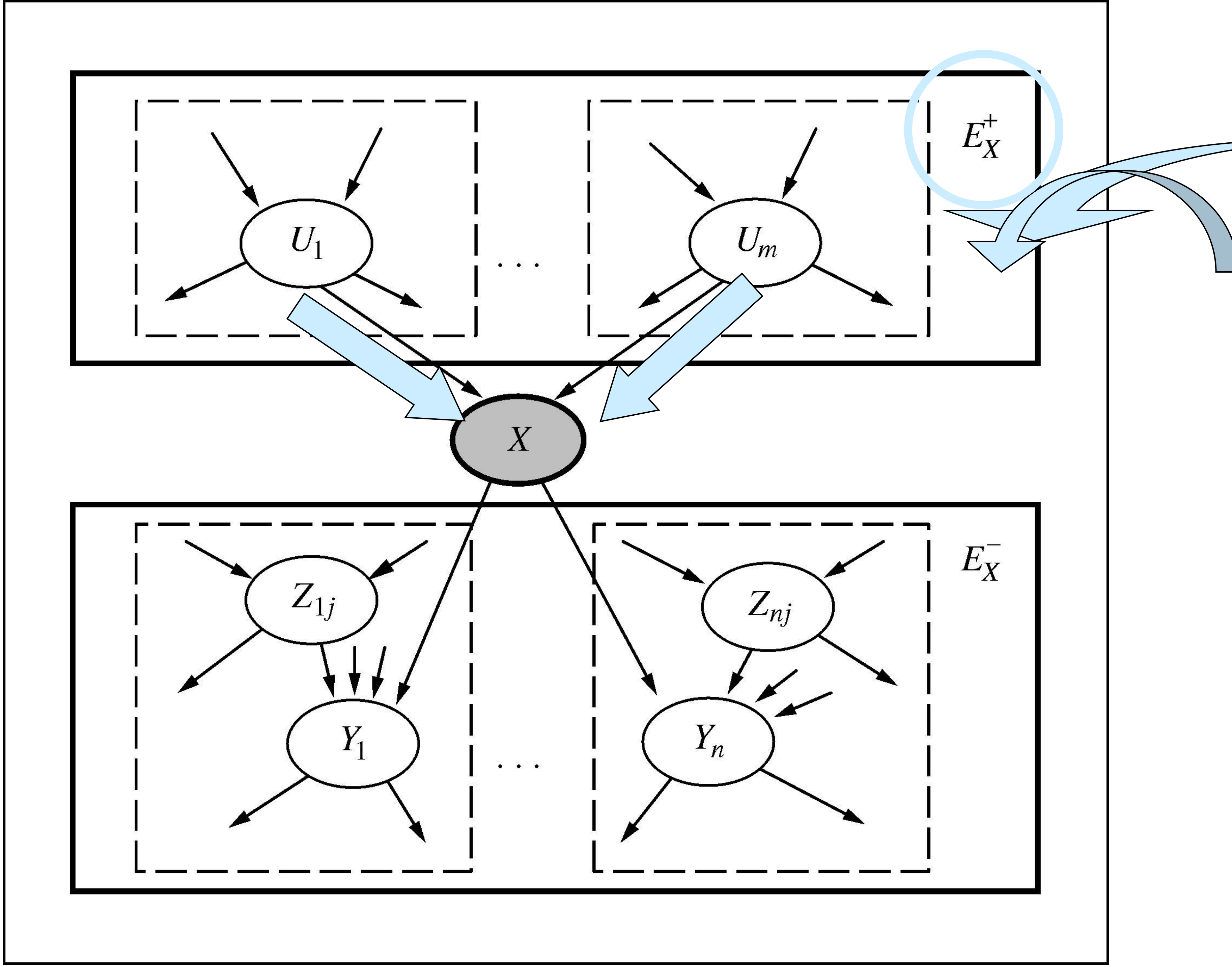
Számítsuk ki E_X^- hozzájárulását két lépésben.

Először E_X^- hatása X gyermekeire, majd ennek hatása X-re.

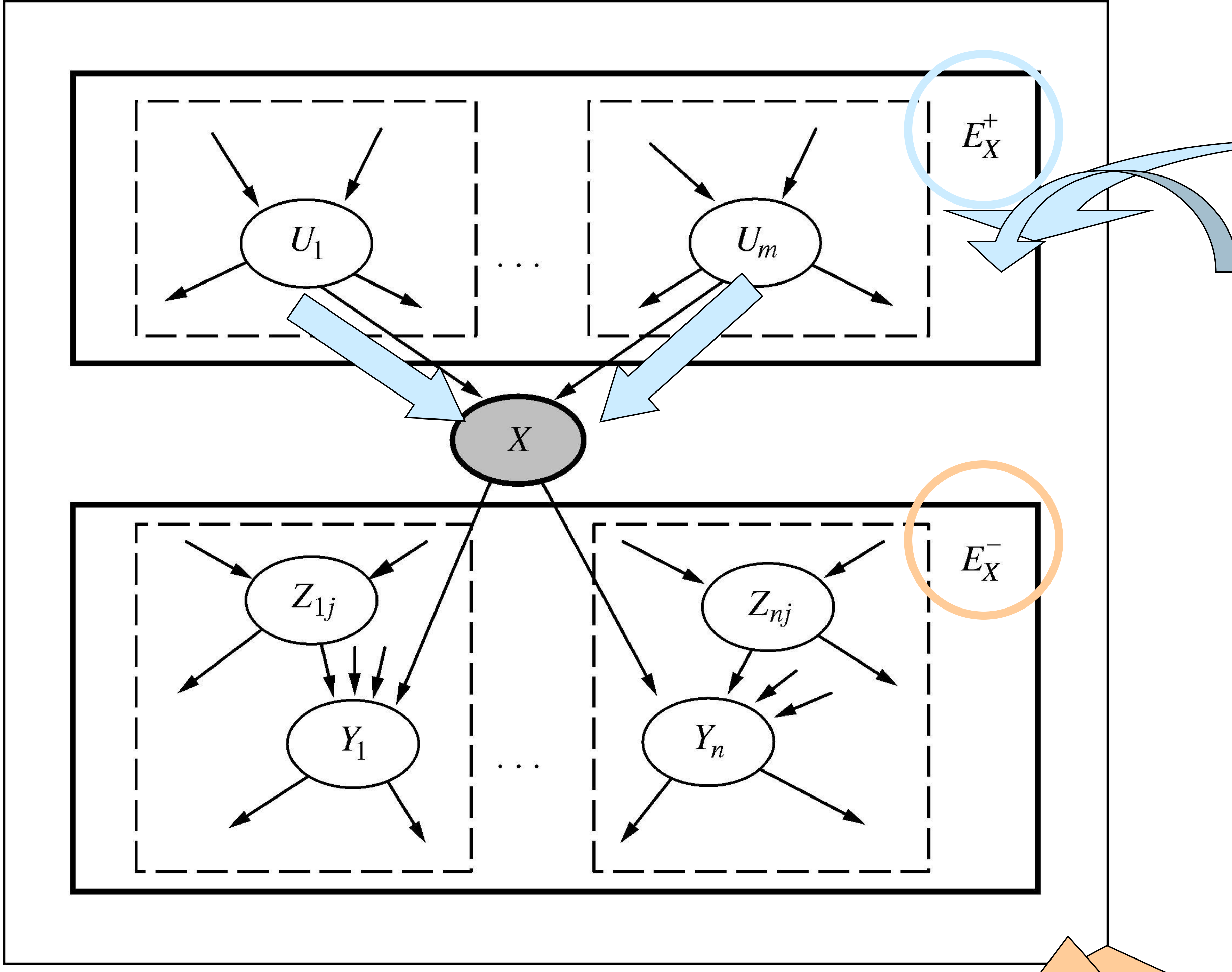
Az X gyermekeire gyakorolt hatás: ugyanaz a probléma rekurzíve, mint az X-re gyakorolt hatás.



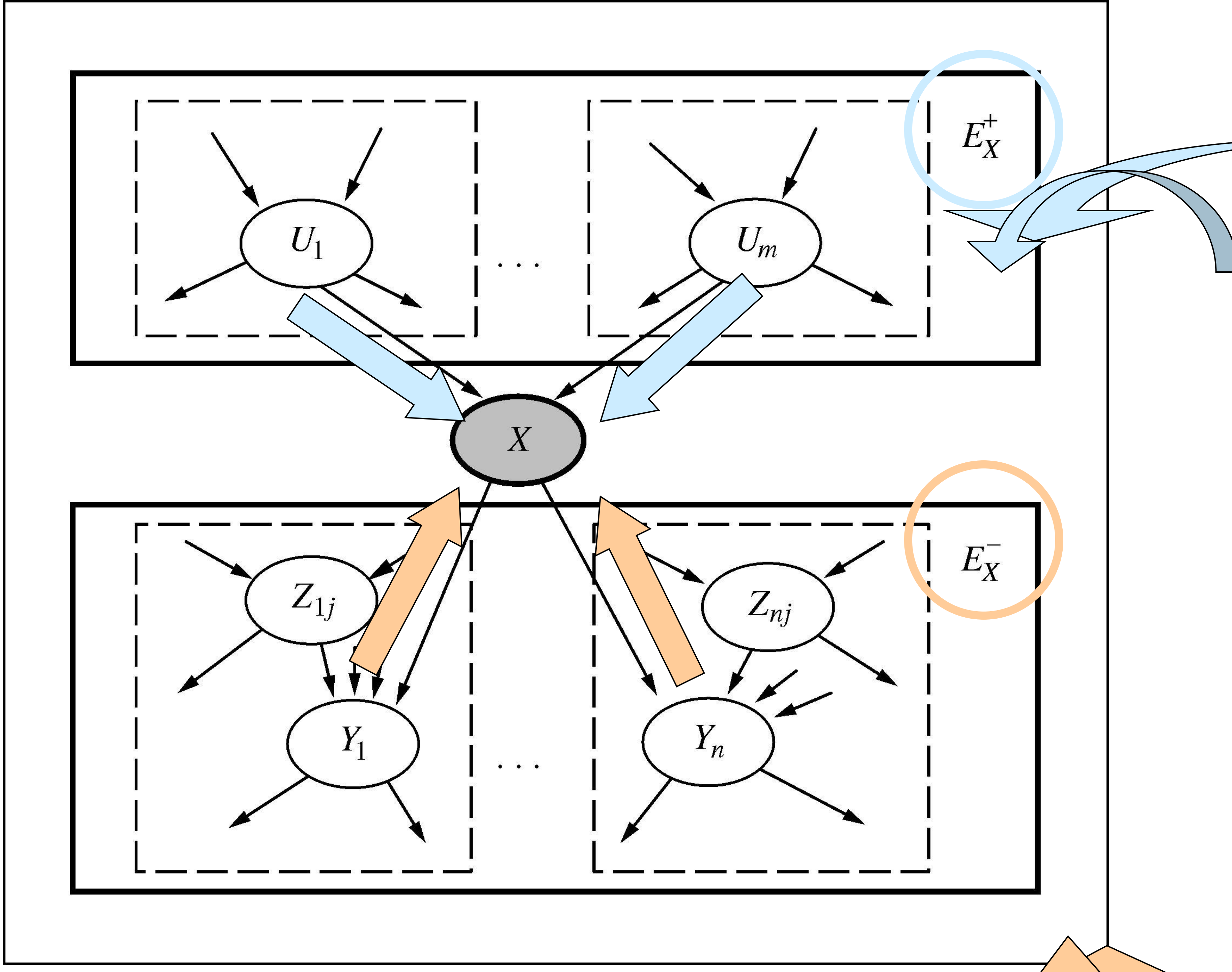
U_1
. . .
U_m
E_X^+
X
Z_{1j}
Z_{nj}
E_X^-
Y_1
. . .
Y_n



E_X^+
U_1
. . .
U_m
X
E_X^-
Z_{1j}
Z_{nj}
Y_1
. . .
Y_n



E_X^+
U_1
U_m
X
E_X^-
Z_{1j}
Z_{nj}
Y_1
Y_n



E_X^+
U_1
. . .
U_m
X
E_X^-
Z_{1j}
Z_{nj}
Y_1
. . .
Y_n

A teljes E ténymhalmaz: X feletti és X alatti tények,
X nem E-beli

$$\mathbf{P}(X|E) = \mathbf{P}(X|E_X^-, E_X^+).$$

Az E_X^+ és E_X^- hozzájárulásának szétválasztása:

Bayes-szabály feltételes verziója, E_X^+ rögzített

háttérbizonyíték

$$\mathbf{P}(X|E_X^-, E_X^+) = \frac{\mathbf{P}(E_X^-|X, E_X^+)\mathbf{P}(X|E_X^+)}{\mathbf{P}(E_X^-|E_X^+)}.$$

X d-elválasztja E_X^+ -et és E_X^- -et a hálóban,

feltételes függetlenség!!!!

$$\mathbf{P}(E_X^- | X, E_X^+) = \mathbf{P}(E_X^- | X)$$

Az $\mathbf{P}(E_X^- | E_X^+)$ normalizálásra szolgáló konstans:

$$\mathbf{P}(X | E_X^-, E_X^+) = \frac{\mathbf{P}(E_X^- | X, E_X^+)\mathbf{P}(X | E_X^+)}{\mathbf{P}(E_X^- | E_X^+)}.$$

$$\mathbf{P}(X | E) = \alpha\, \mathbf{P}(E_X^- | X)\mathbf{P}(X | E_X^+)$$

$\mathbf{P}(X|E_X^+)$ -et megkaphatjuk, ha a ***szülők*** összes lehetséges konfigurációja esetén számba vesszük mennyire valószínűek, ha E_X^+ adott.

Ha minden konfiguráció adott,
X valószínűsége: FVT-ből valószínűségeket átlagoljuk az egyes konfigurációk valószínűségével súlyozva.

Legyen **U** az *U*1, …, *Un* szülők vektora, és legyen **u** egy hozzájuk rendelt érték (szülői feltétel):

$$\mathbf{P}(X|E_X^+) = \sum_{\mathbf{u}} \mathbf{P}(X|\mathbf{u}, E_X^+) P(\mathbf{u}|E_X^+).$$

U d-elválasztja *X*-et és E_X^+ -et, így az első tényező:

$$\mathbf{P}(X|\mathbf{u}, E_X^+) = \mathbf{P}(X|\mathbf{u})$$

Továbbá, egyszeres összekötöttség miatt az *Ui*-k d-elválasztottak egymástól, ezért független valószínűségi változók együttes valószínűsége az egyes változók valószínűségeinek szorzata:

$$\mathbf{P}(X|E_X^+) = \sum_{\mathbf{u}} \mathbf{P}(X|\mathbf{u}, E_X^+) P(\mathbf{u}|E_X^+).$$

$$\mathbf{P}(X|E_X^+) = \sum_{\mathbf{u}} \mathbf{P}(X|\mathbf{u}) \prod_i \mathbf{P}(u_i|E_X^+).$$

Az utolsó lépés, hogy felbontsuk

E_X^+ -t $E_{U_i \setminus X}$ részekre

(az *ábra* különálló dobozai), és kihasználjuk ezt

$E_{U_i \setminus X}$ d-elválasztott a többi E_X^+ -beli ténytől.

Ez alapján

$$\mathbf{P}(X|E_X^+) = \sum_{\mathbf{u}} \mathbf{P}(X|\mathbf{u}) \prod_i \mathbf{P}(u_i|E_X^+).$$

$$\mathbf{P}(X|E_X^+) = \sum_{\mathbf{u}} \mathbf{P}(X|\mathbf{u}) \prod_i \mathbf{P}(u_i|E_{U_i \setminus X}),$$

amit visszaírva a korábbi egyenletünkbe:

$$\mathbf{P}(X|E) = \alpha\,\mathbf{P}(E_X^-|X)\sum_{\mathbf{u}}\mathbf{P}(X|\mathbf{u})\prod_i \mathbf{P}(U_i|E_{u_i \setminus X}).$$

Kezd alakulni: $\mathbf{P}(X|\mathbf{u})$ egy bejegyzés X FVT-jában

$\mathbf{P}(U_i|E_{u_i \setminus X})$ egy rekurzív megjelenése az eredeti problémának, ami $\mathbf{P}(X|E)$ kiszámítása volt

A rekurzív hívásban szereplő tényváltozók elemei az eredeti hívásban szereplőnek (de kevesebb) – egy jó jel, hogy az algoritmus le fog állni

$\mathbf{P}(E_X^- | X)$ szintén egy rekurzív megoldás kell!

X gyermekei, az *Yi*-k, értékei alapján átlagolunk,
de szintén figyelembe kell vennünk az *Yi* szüleit.

Legyenek **Z***i*-k az *Yi*-k szüleit, *X*-et leszámítva, és jelölje **z***i* a hozzájuk rendelt értékeket.

A tények az *Yi*-khez tartozó dobozokban feltételesen függetlenek, ha *X* adott:

$$\mathbf{P}(E_X^- | X) = \prod_i \mathbf{P}(E_{Y_i \setminus X} | X).$$

Átlagolva *Yi* és ***zi*** felett (P(A) = Σ_k P(A | ok$_k$) P(ok$_k$)):

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \prod_i \sum_{y_i} \sum_{\mathbf{z}_i} \mathbf{P}(E_{Y_i \setminus X}|X, y_i, \mathbf{z}_i)\mathbf{P}(y_i, \mathbf{z}_i|X).$$

$$E_{Y_i \setminus X}$$

Felbontva függetlenre:

$$E^-_{Y_i} \qquad E^+_{Y_i \setminus X}$$

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \prod_i \sum_{y_i} \sum_{\mathbf{z}_i} \mathbf{P}(E_{Y_i}^-|X, y_i, \mathbf{z}_i)\mathbf{P}(E_{Y_i \setminus X}^+|X, y_i, \mathbf{z}_i)\mathbf{P}(y_i, \mathbf{z}_i|X).$$

$E^{-}_{Y_i}$ független X-től és $\mathbf{z}i$-től, ha yi adott

$E^{+}_{Y_i \setminus X}$ független X-től és yi-től, ha $\mathbf{z}i$ adott.

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \prod_i \sum_{y_i} \sum_{\mathbf{z}_i} \mathbf{P}(E_{Y_i}^-|X, y_i, \mathbf{z}_i)\mathbf{P}(E_{Y_i \setminus X}^+|X, y_i, \mathbf{z}_i)\mathbf{P}(y_i, \mathbf{z}_i|X).$$

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \prod_i \sum_{y_i} P(E_{Y_i}^-|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \mathbf{P}(E_{Y_i \setminus X}^+|\mathbf{z}_i)\mathbf{P}(y_i, \mathbf{z}_i|X).$$

A $\mathbf{z}i$ összegzésből kiemelhetünk egy tényezőt, amiben nem szerepel $\mathbf{z}i$

Most jön a Bayes-szabály:

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \prod_i \sum_{y_i} P(E_{Y_i}^-|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \mathbf{P}(E_{Y_i \setminus X}^+|\mathbf{z}_i)\mathbf{P}(y_i, \mathbf{z}_i|X).$$

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \prod_i \sum_{y_i} P(E_{Y_i}^-|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \frac{P(\mathbf{z}_i|E_{Y_i \setminus X}^+)P(E_{Y_i \setminus X}^+)}{P(\mathbf{z}_i)} \mathbf{P}(y_i, \mathbf{z}_i|X).$$

Bontva **z***i*-t és *Yi*-t (P(A B) = P(A | B) P(B)):

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \prod_i \sum_{y_i} P(E_{Y_i}^-|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \frac{P(\mathbf{z}_i|E_{Y_i\setminus X}^+)P(E_{Y_i\setminus X}^+)}{P(\mathbf{z}_i)} \mathbf{P}(y_i, \mathbf{z}_i|X).$$

$$\mathbf{P}(E_X^-|x) = \prod_i \sum_{y_i} P(E_{Y_i}^-|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \frac{P(\mathbf{z}_i|E_{Y_i\setminus X}^+)P(E_{Y_i\setminus X}^+)}{P(\mathbf{z}_i)} \mathbf{P}(y_i|X, \mathbf{z}_i)\mathbf{P}(\mathbf{z}_i|X).$$

$\mathbf{P}(\mathbf{z}i \mid X) = \mathbf{P}(\mathbf{z}i)$, mivel **Z** és X d-elválasztottak, így egyszerűsíthetünk velük.

Továbbá bevezethetünk egy $\boldsymbol{\beta}i$ normalizációs állandót:

$$\mathbf{P}(E_X^-|x) = \prod_i \sum_{y_i} P(E_{Y_i}^-|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \frac{P(\mathbf{z}_i|E_{Y_i\setminus X}^+)P(E_{Y_i\setminus X}^+)}{\cancel{P(\mathbf{z}_i)}} \mathbf{P}(y_i|X,\mathbf{z}_i)\cancel{\mathbf{P}(\mathbf{z}_i|X)}.$$

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \prod_i \sum_{Y_i} P(E_{Y_i}^-|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \beta_i P(\mathbf{z}_i \Big| E_{Y_i\setminus X}^+)\mathbf{P}(y_i|X,\mathbf{z}_i).$$

Yi szülei (*Zij*-vel jelölve) függetlenek egymástól

együttes valószínűségük felbontható szorzatukra

βi -ket összevonhatjuk egyetlen β normalizációs állandóba

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \prod_i \sum_{Y_i} P(E_{Y_i}^-|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \beta_i P(\mathbf{z}_i \big| E_{Y_i \setminus X}^+) \mathbf{P}(y_i|X,\mathbf{z}_i).$$

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \beta \prod_i \sum_{y_i} P(E_{Y_i}^-|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \mathbf{P}(y_i|X,\mathbf{z}_i) \prod_j P(z_{ij}|E_{Z_{ij} \setminus Y_i}).$$

$$\mathbf{P}(E_X^-|X) = \beta \prod_i \sum_{y_i} P(E_{Y_i}^-|y_i) \sum_{\mathbf{z}_i} \mathbf{P}(y_i|X, \mathbf{z}_i) \prod_j P(z_{ij}|E_{Z_{ij} \setminus Y_i}).$$

A kapott kifejezés mindegyik tényezője könnyedén kiértékelhető:

- egy rekurzív megjelenése $\mathbf{P}(E_X^-|X)$ -nek.
- az *Yi* feltételes valószínűségi táblájában egy bejegyzés.
- egy rekurzív megjelenése a ***P***(*X* | *E*) kiszámításának –
  azaz ***P***(*X* | $E_{X\setminus}$)-nek.

A számítás rekurzív hívásokból áll, amik X-ből indulva haladnak a hálóban minden lehetséges úton.

A rekurzió leáll a:

- **ténycsomópontokon**,
- **gyökércsomópontokon** (szülő nélküli csomópont) és
- **levélcsomópontokon** (gyermek nélküli csomópont).

Minden rekurzív hívás kizárja azt a csomópontot ahonnan hívták, így a fa minden csomópontját pontosan egyszer érintjük.

Az algoritmus **lineáris** a háló csomópontjainak számában.

Emlékezhetünk azonban, hogy ez csak azért lehetséges, mert a háló *fa gráf.*

Következtetés többszörösen összekötött hálókban

Összevonós eljárások:

átalakítják a hálót egy valószínűségek szempontjából ekvivalens (de más topológiájú) fa gráffá, a nem megfelelő csomópontokat összevonva.

Sztochasztikus szimulációs eljárások:

a tárgytartomány nagyon nagy számú konkrét modelljét generálják le, ami konzisztens a valószínűségi háló által definiált eloszlással. Ez alapján az egzakt eredmények közelítését adják.